Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 09 - Aula 1
Integrais duplas em coordenadas polares

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Coordenadas polares

- As coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Coordenadas polares

- As coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

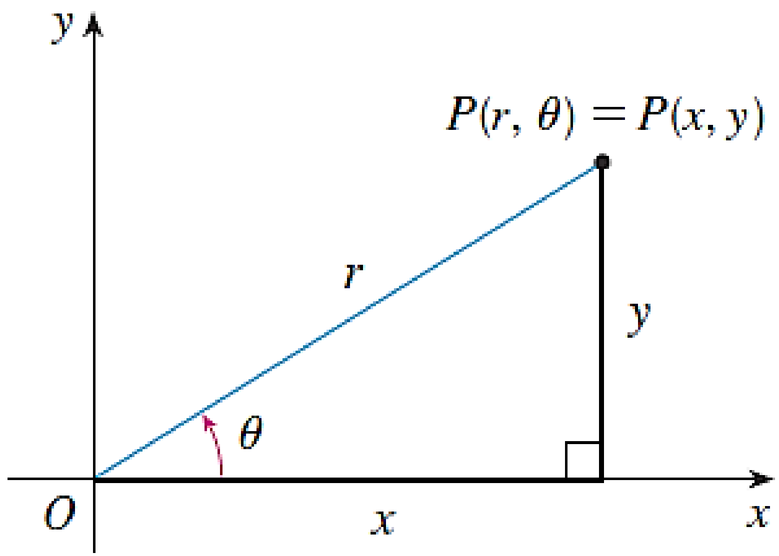
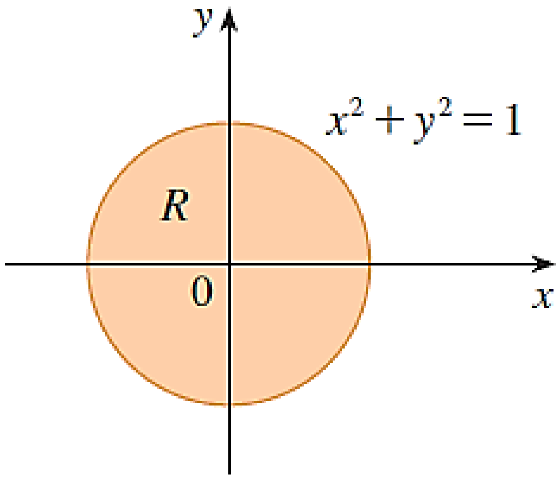


FIGURA 2

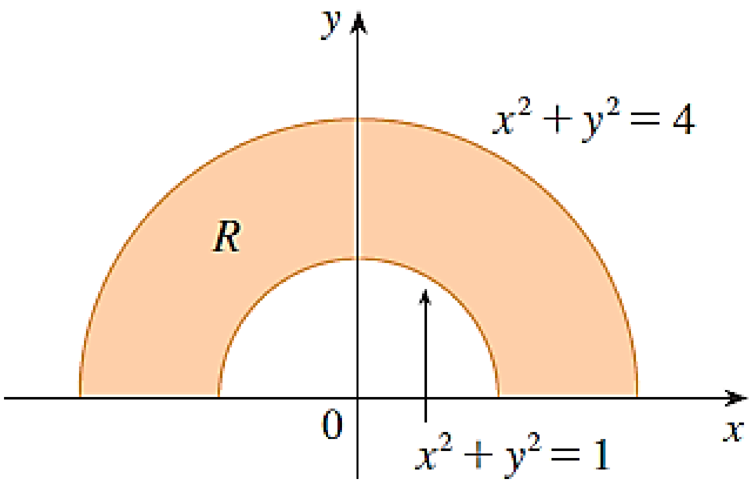
Coordenadas polares

- As regiões da Figura abaixo são casos especiais de um **retângulo polar**:

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$



(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Integrais duplas em coordenadas polares

Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é um retângulo polar, apresentado na Figura 3

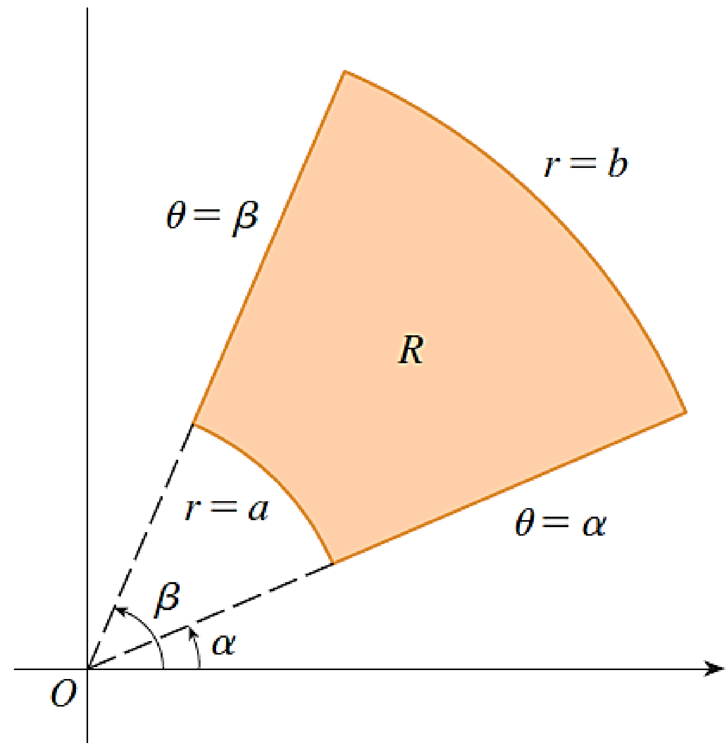


FIGURA 3 Retângulo polar

Integrais duplas em coordenadas polares

Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é um retângulo polar, apresentado na Figura 3

dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e

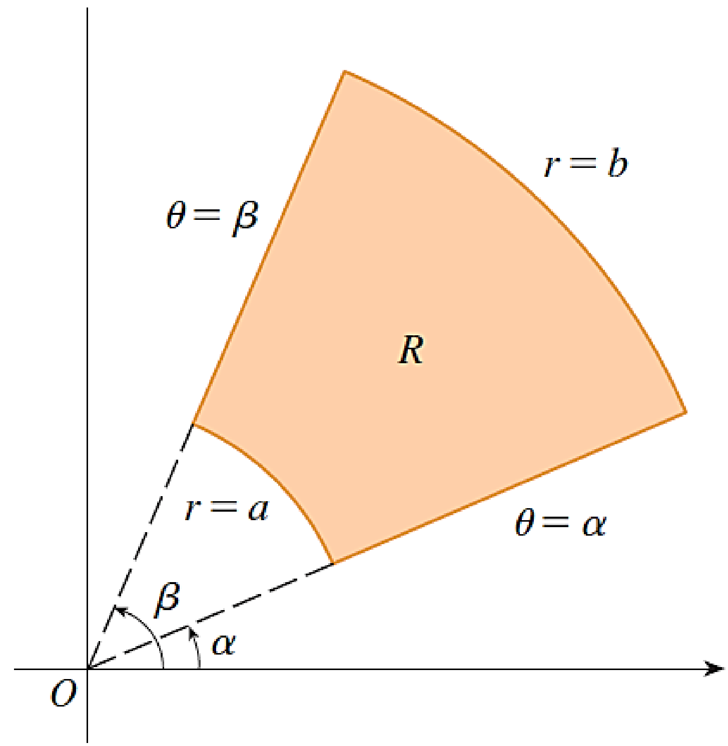


FIGURA 3 Retângulo polar

Integrais duplas em coordenadas polares

Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é um retângulo polar, apresentado na Figura 3

dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e

o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$.

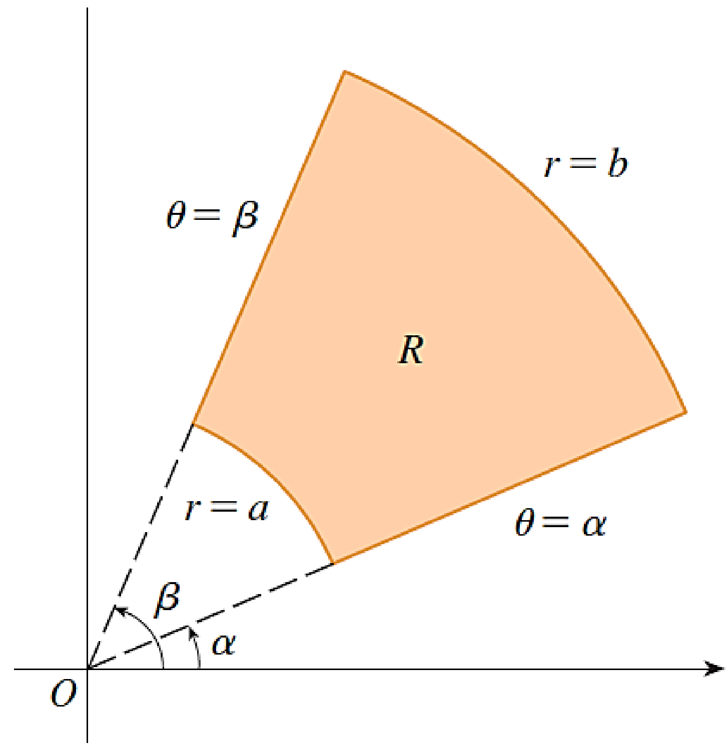
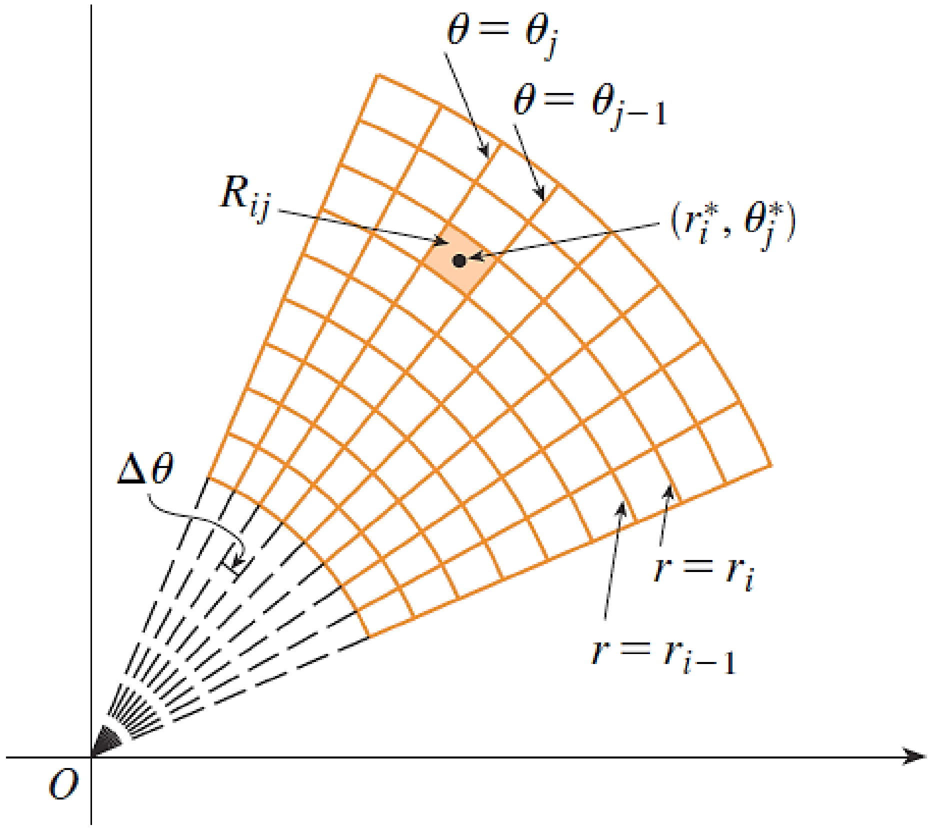


FIGURA 3 Retângulo polar

Integrais duplas em coordenadas polares

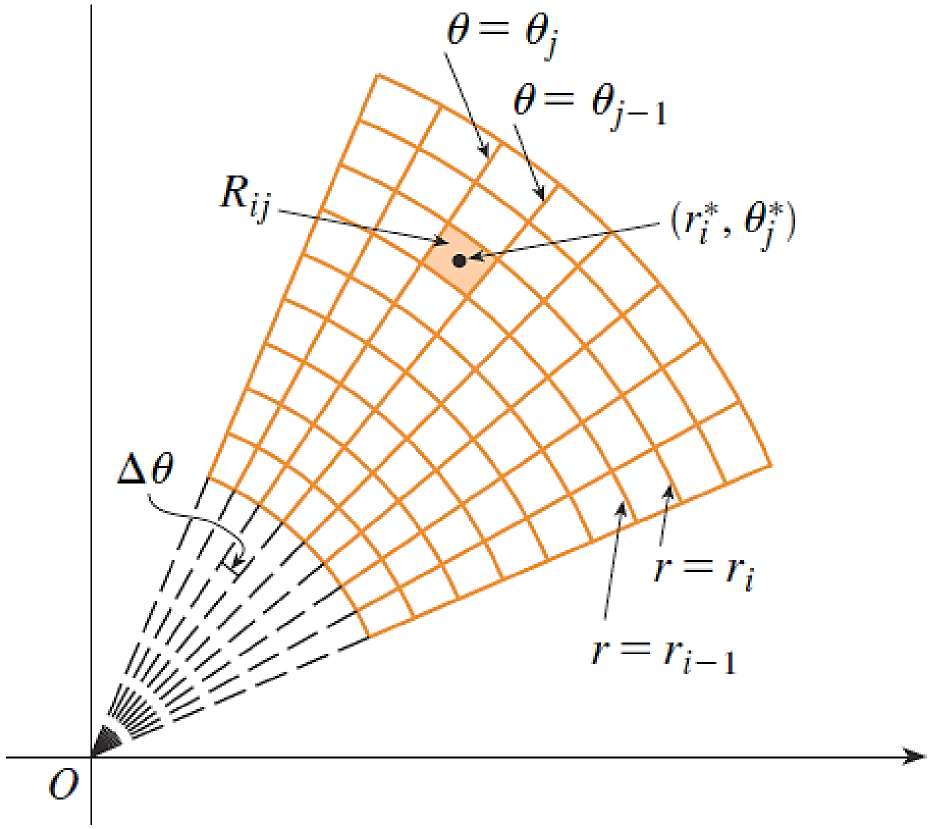
Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} mostrados na Figura 4.



Integrais duplas em coordenadas polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\ \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$



tem coordenadas polares

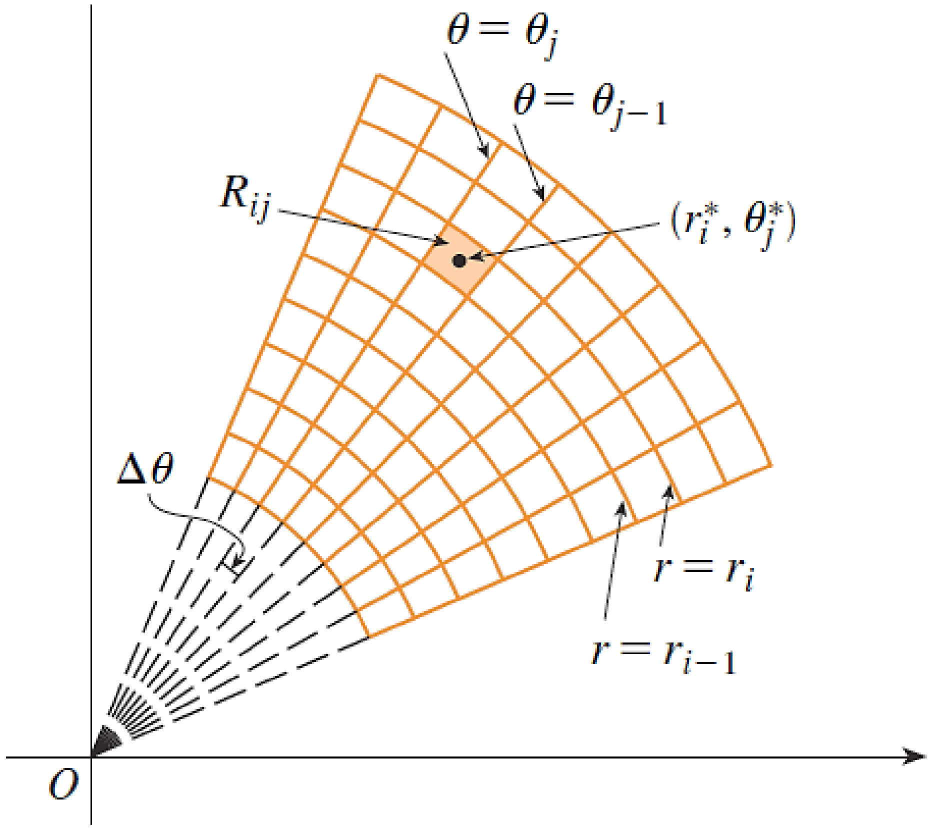
$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Integrais duplas em coordenadas polares

O “centro” do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$



tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

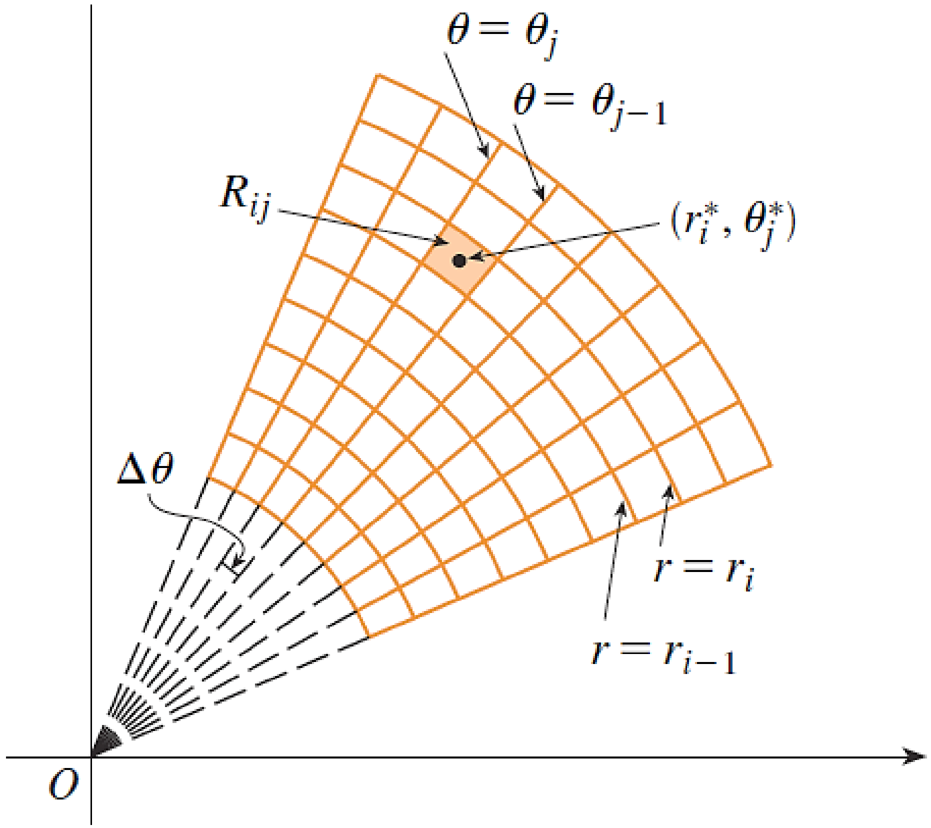
Calculamos a área de R_{ij}

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\ \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$



tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij}

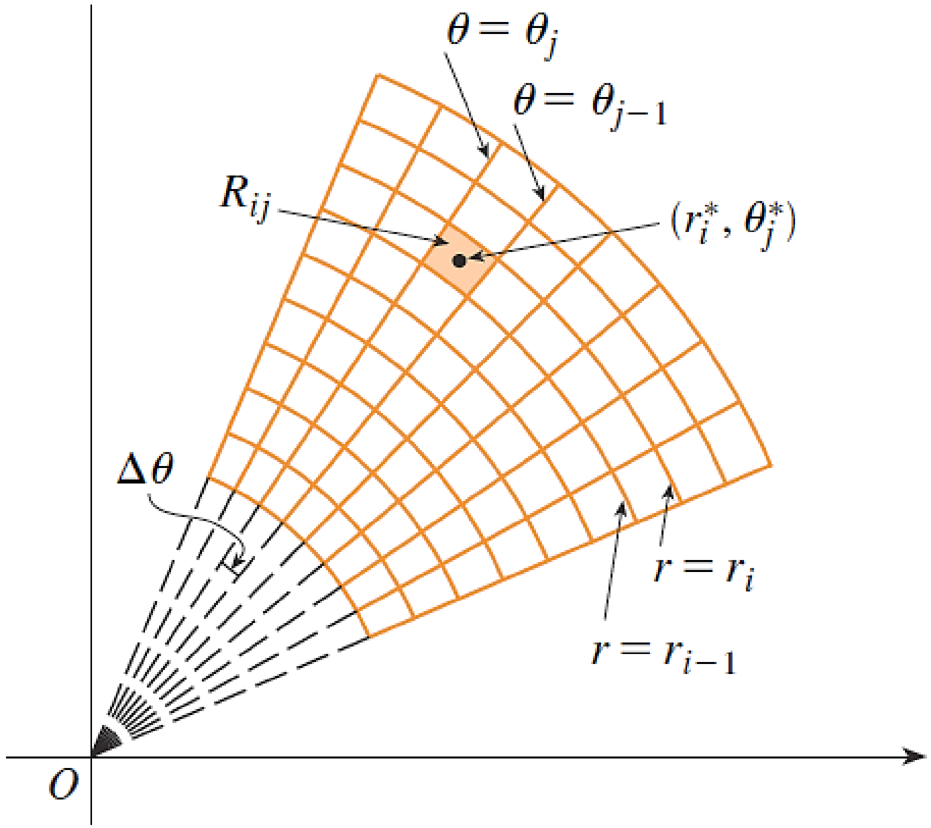
$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2} r_i^2\, \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2\, \Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\, \Delta\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\ \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$



tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

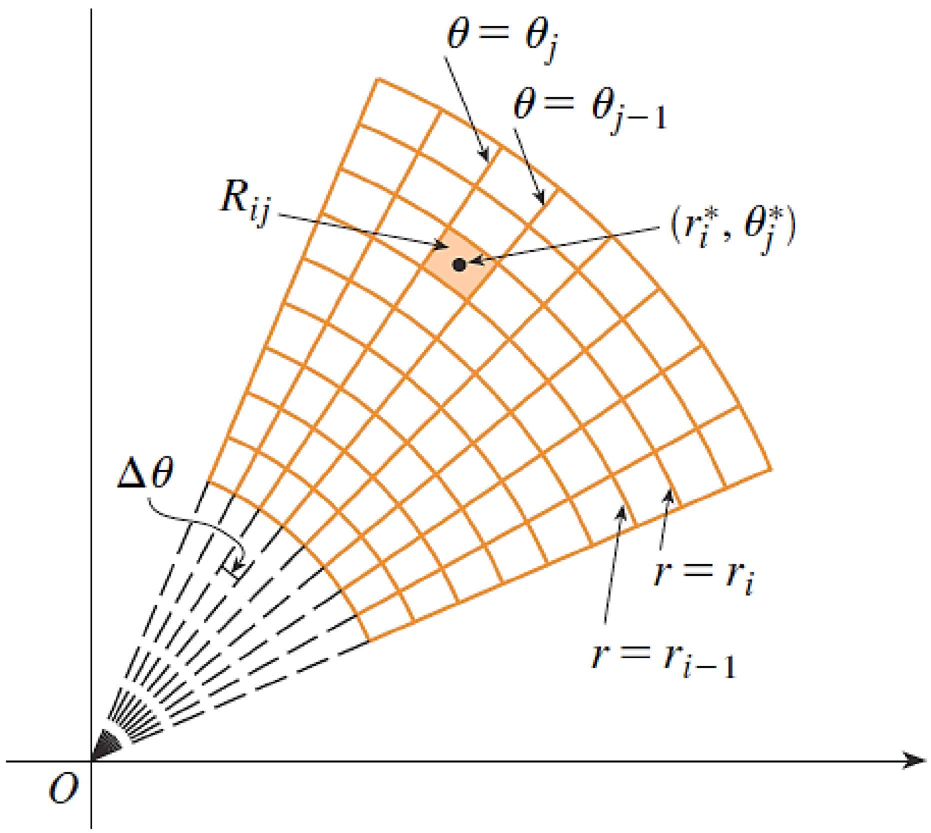
Calculamos a área de R_{ij}

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Integrais duplas em coordenadas polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$



tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

$$\theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij}

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta \\ &= r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Integrais duplas em coordenadas polares

As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são

$(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann é

Integrais duplas em coordenadas polares

As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são

$(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \text{ sen } \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \text{ sen } \theta_j^*) \, \Delta A_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \text{ sen } \theta_j^*) \, r_i^* \, \Delta r \, \Delta \theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são

$(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, r_i^*\, \Delta r\, \Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, a soma de Riemann pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\, \Delta r\, \Delta\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Portanto, temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Portanto, temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i$$

$$= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\, \Delta r\, \Delta\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Portanto, temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i$$

$$= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\, \Delta r\, \Delta\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\, dr\, d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Portanto, temos

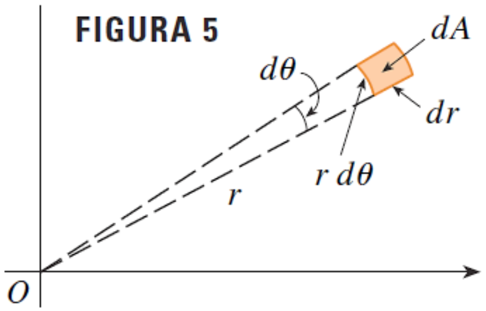
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\, \Delta r\, \Delta\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

FIGURA 5



Integrais duplas em coordenadas polares

Convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e substituindo dA por $r\,dr\,d\theta$.

Integrais duplas em coordenadas polares

Convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e substituindo dA por $r\,dr\,d\theta$.

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Se f é contínua no retângulo polar R dado por

$0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$,

então

Integrais duplas em coordenadas polares

Convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e substituindo dA por $r\,dr\,d\theta$.

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Se f é contínua no retângulo polar R dado por

$0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$,

então

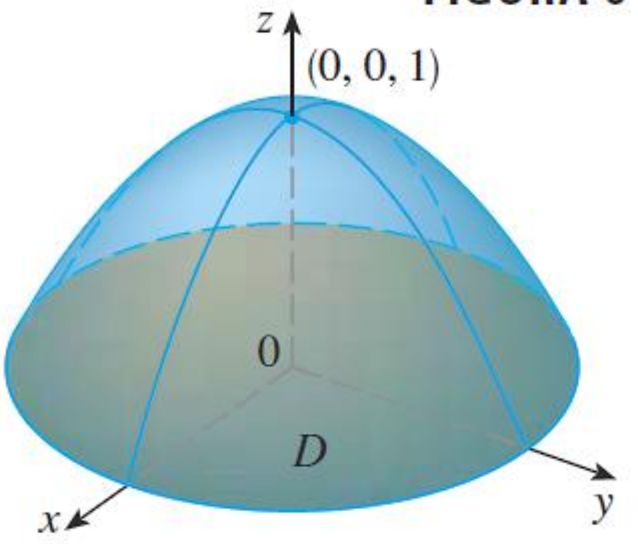
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

FIGURA 6

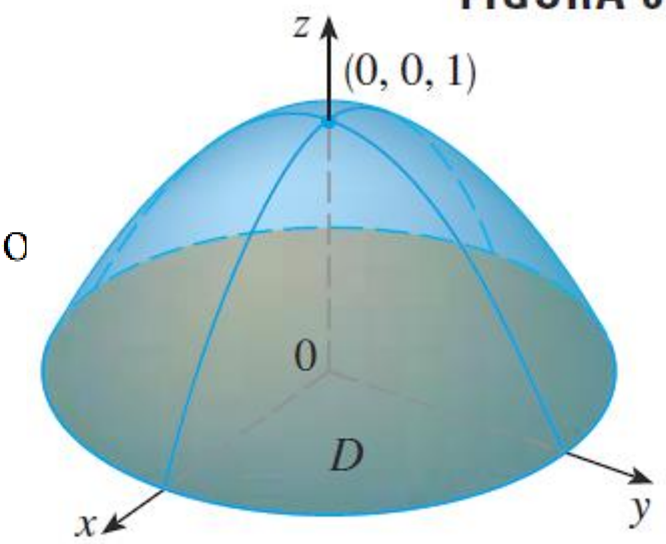


Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

FIGURA 6



Solução:

Se tomarmos $z = 0$ obteremos $x^2 + y^2 = 1$.

o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$

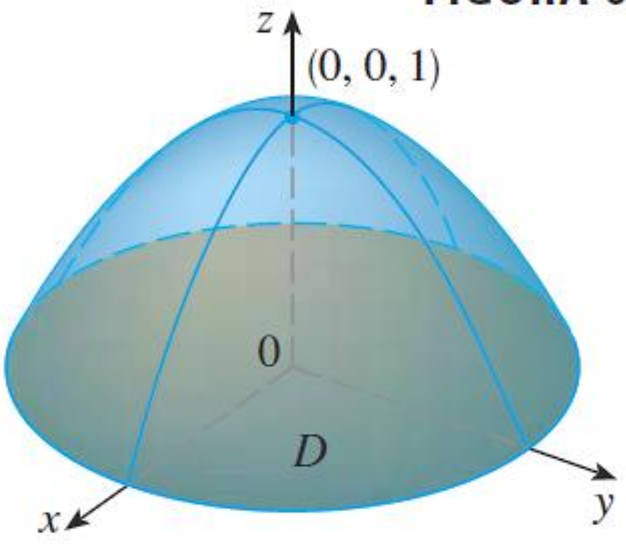
Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1

Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solução:

FIGURA 6



Se tomarmos $z = 0$ obteremos $x^2 + y^2 = 1$.
o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$

Em coordenadas polares, D é dado por

$$0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

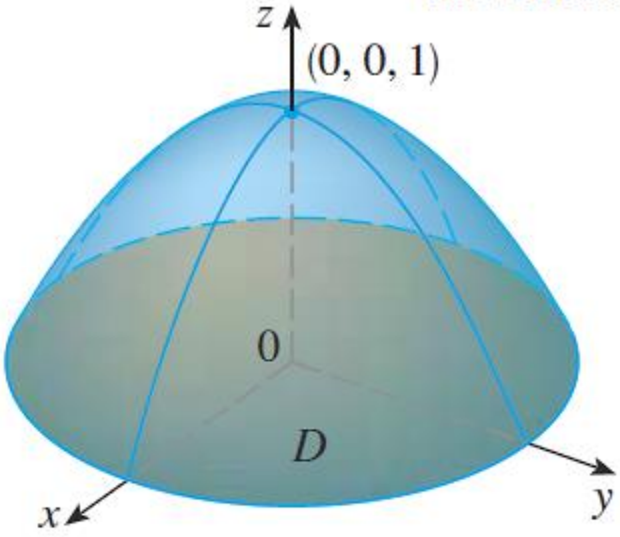
Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1 solução:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

FIGURA 6



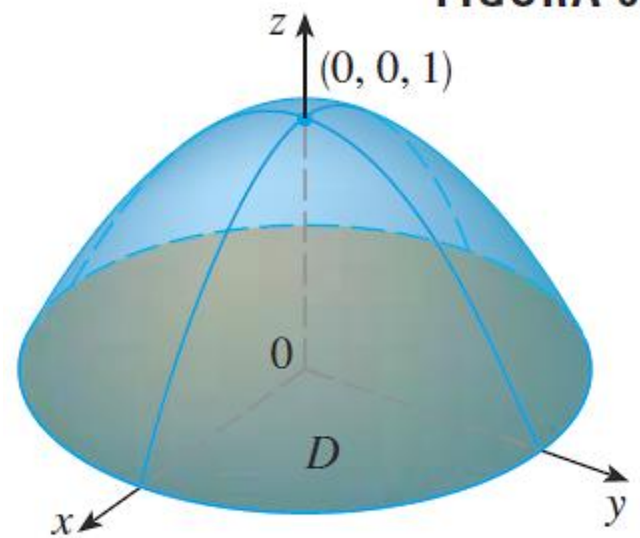
Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1 solução:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

FIGURA 6



Integrais duplas em coordenadas polares

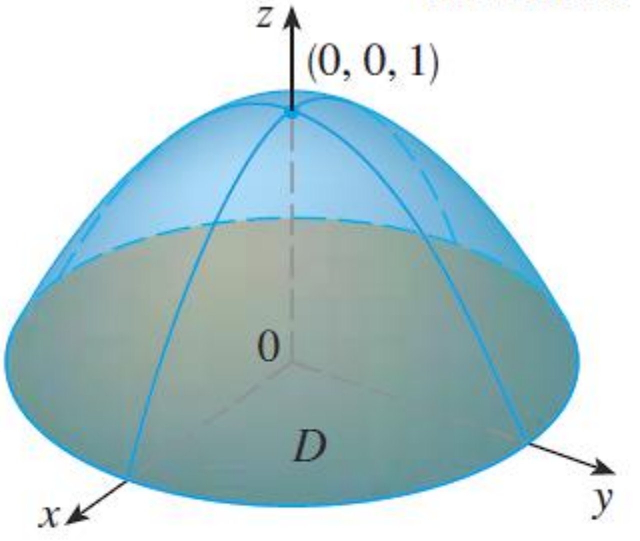
Exemplo 1 solução:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

FIGURA 6



Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1 solução:

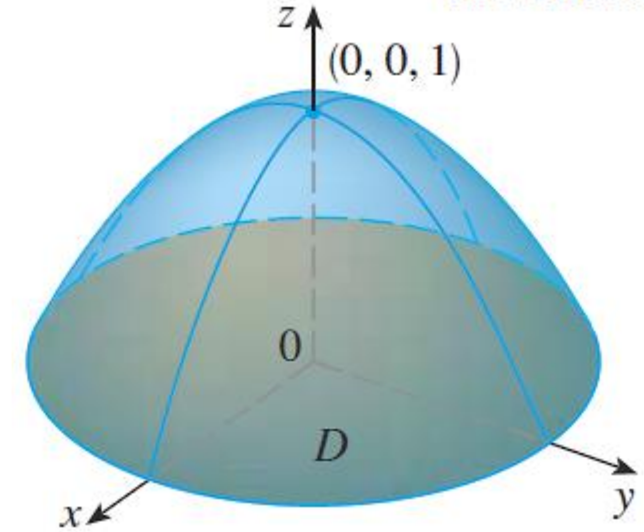
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

FIGURA 6



Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 1 solução:

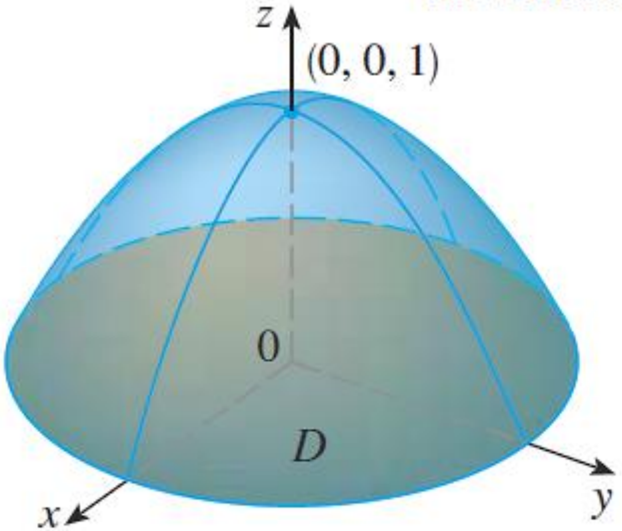
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

FIGURA 6

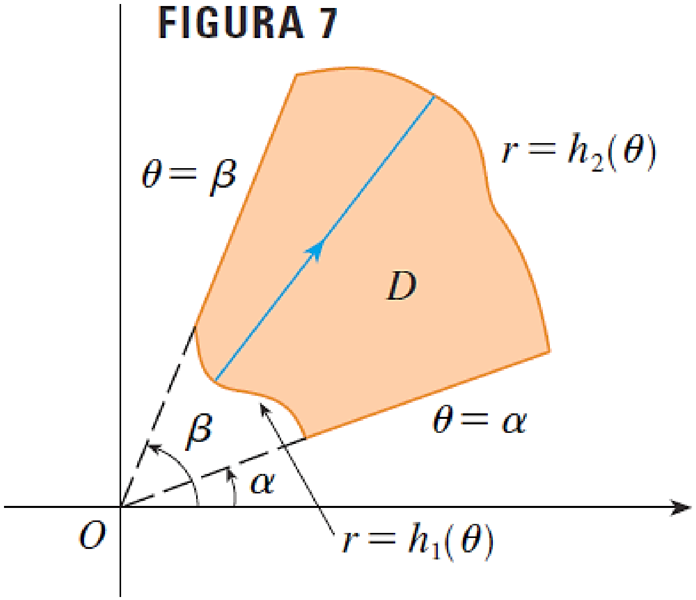


Se trabalhássemos com coordenadas retangulares

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

que não é fácil de calcular, pois envolve $\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$.

Integrais duplas em regiões mais complicadas

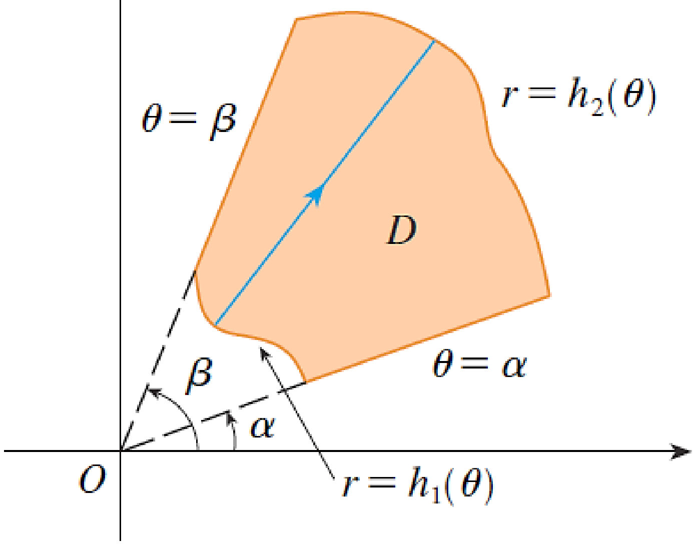


Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Integrais duplas em regiões mais complicadas



Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

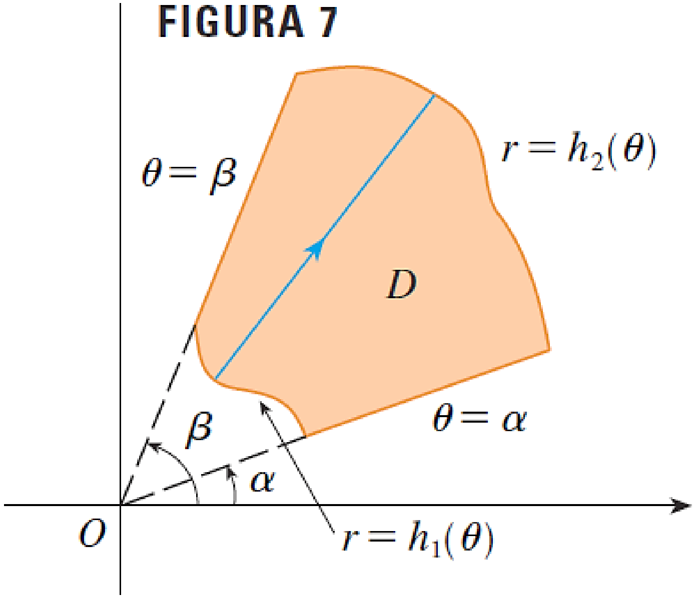
Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$

a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

Integrais duplas em regiões mais complicadas

FIGURA 7



Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$

a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

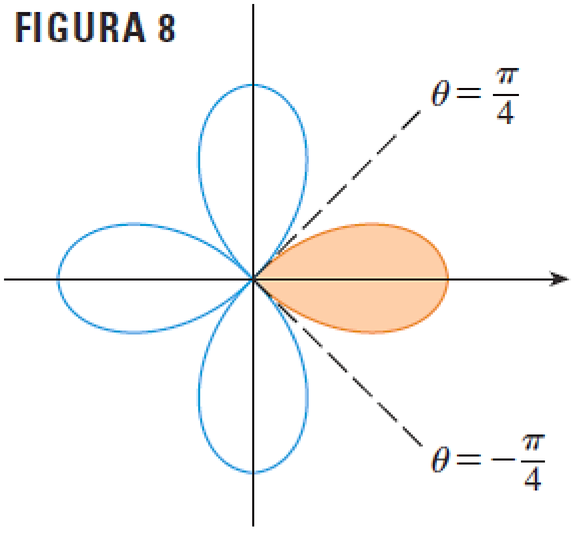
$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8

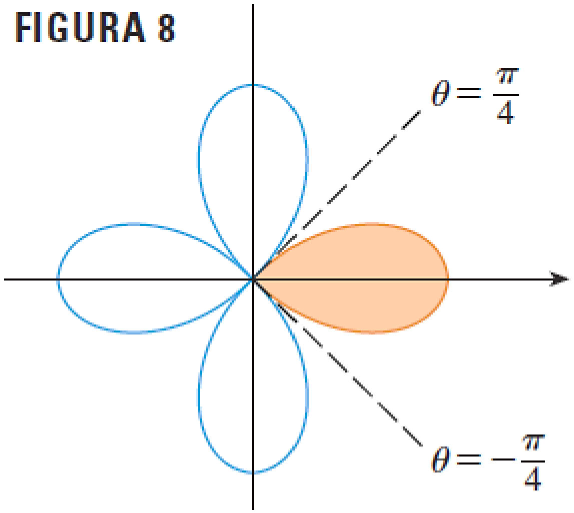


Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

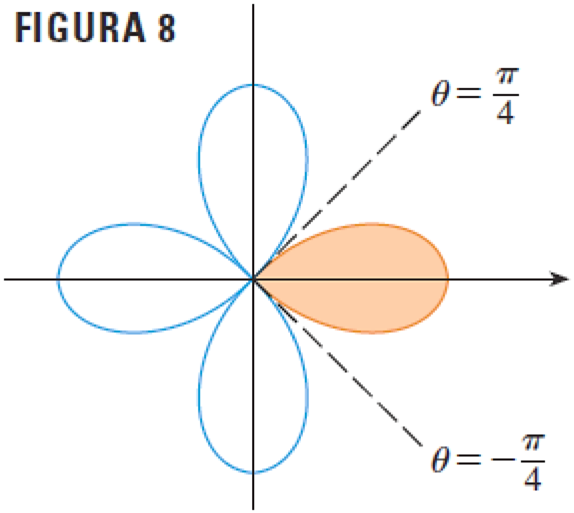
Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

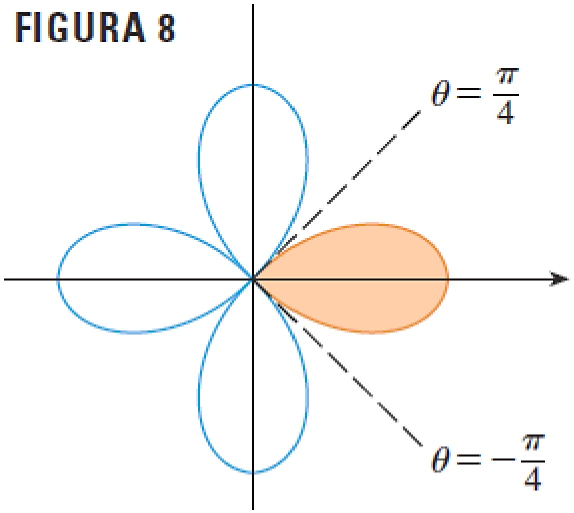
$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

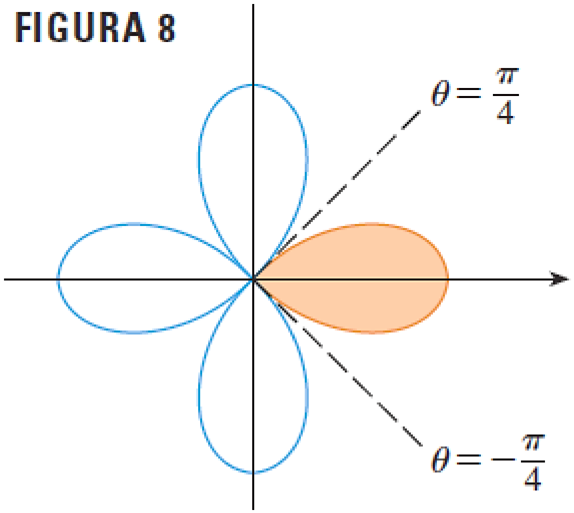
$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

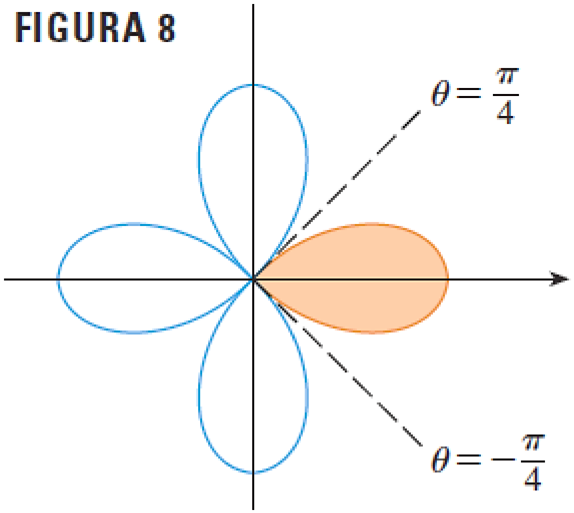
$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

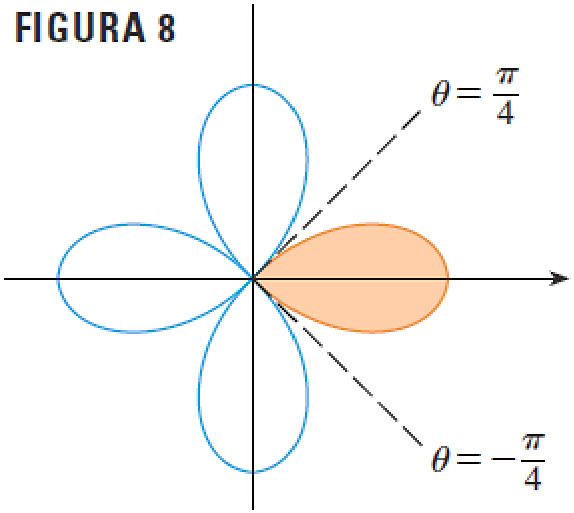
$$= \tfrac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta$$

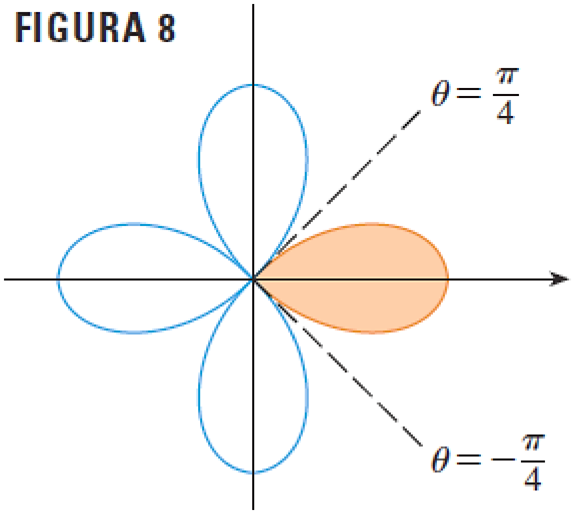
$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo 2

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

FIGURA 8



Solução:

Do esboço na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região $D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

Para depois desta aula:

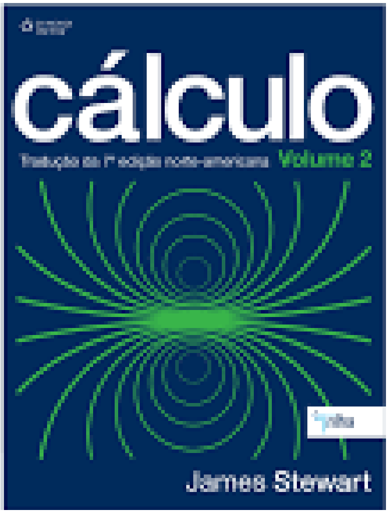
- Estudar seção 15.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

Próxima aula:

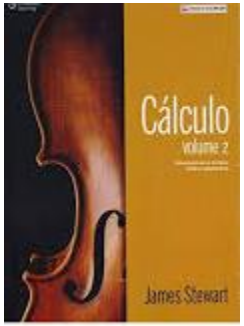
- Aplicações de Integrais duplas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.



Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br