Cálculo I

Licenciatura

Semana 09 - Aula 1

Logarítimica e Exponencial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas

- Para encerrar os conceitos iniciais sobre as derivadas abordaremos na aula de hoje:
  - ✓ Derivadas das funções logarítmicas;
  - ✓ Derivadas das funções exponenciais.

Derivada das funções logarítmicas

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-lnx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

- Substituindo:

$$\boldsymbol{v = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad (h = vx)}$$

$$\boldsymbol{v \to 0 \quad qdo \;\; h \to 0}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

Substituindo:

$$\boldsymbol{v = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad (h = vx)}$$

$$\boldsymbol{v \to 0 \quad qdo \;\; h \to 0}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} lne$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} lne$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}} \qquad x > 0$$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \dfrac{lnx}{lnb}$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \dfrac{lnx}{lnb}$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}[\frac{lnx}{lnb}]$$

$$= \frac{1}{lnb}\frac{d}{dx}[lnx]$$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \dfrac{lnx}{lnb}$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}[\frac{lnx}{lnb}]$$

$$= \frac{1}{lnb}\frac{d}{dx}[lnx]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x\, lnb}} \qquad x > 0$$

Exemplo 1 Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

Exercício Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

$$y = \ln\left(\frac{x^2 senx}{\sqrt{1+x}}\right)$$

Diferenciação logarítmica

- Técnica útil para derivar funções compostas de produtos, quocientes e potências.
- **Exemplo 2**

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ em $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$

Derivadas das funções exponenciais

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;

- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x$$

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;

- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\, lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\,lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = ylnb$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\, lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = ylnb$$

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x lnb$$

- quando: $b = e = 2{,}71\ldots$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Exemplo 1 Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

a) $y = 2^x$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = e^{cos x}$

Derivadas das funções *log* e *exp*

Regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}[lnu] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x\, lnb} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b u] = \frac{1}{u\, lnb}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x lnb$$

$$\frac{d}{dx}[b^u] = b^u lnb\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\frac{du}{dx}$$

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Fazer a lista de exercícios.

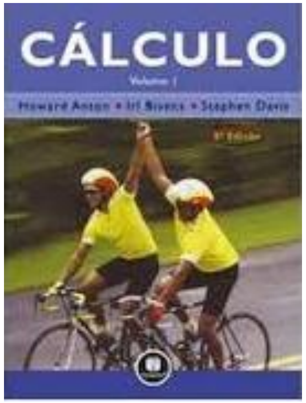
Próxima aula:

- Crescimento e concavidade.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br