

Cálculo I

Licenciatura

Semana 09 - Aula 1

Logarítmica e Exponencial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas

- Para encerrar os conceitos iniciais sobre as derivadas abordaremos na aula de hoje:
 - ✓ Derivadas das funções logarítmicas;
 - ✓ Derivadas das funções exponenciais.

Derivada das funções logarítmicas

The background is a dark green chalkboard filled with faint, white mathematical content. It includes various algebraic and trigonometric formulas, such as $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$, and trigonometric identities like $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. There are also several geometric diagrams, including a sphere with a grid of latitude and longitude lines, a circular sector, and various lines and angles.

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$;
- Aplicando a definição da derivada:

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$;
- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$;
- Aplicando a definição da derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$;
- Aplicando a definição da derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$;
- Aplicando a definição da derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}\end{aligned}$$

➤ Substituindo:

$$\begin{aligned}v &= \frac{h}{x} \Rightarrow (h = vx) \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{qdo } h \rightarrow 0\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx}$$

Substituindo:

$$v = \frac{h}{x} \Rightarrow (h = vx)$$
$$v \rightarrow 0 \quad \text{qdo } h \rightarrow 0$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)^{1/v}\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)^{1/v} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} \right]\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)^{1/v} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} \right]\end{aligned}$$

➤ Mas: $\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} = e$

Derivada das funções logarítmicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)^{1/v} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} \right]\end{aligned}$$

➤ Mas: $\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \ln e$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln x] &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + v)}{vx} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)^{1/v} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} \right]\end{aligned}$$

➤ Mas: $\lim_{v \rightarrow 0} (1 + v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \ln e$$

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

Derivada das funções logarítmicas

➤ Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

Derivada das funções logarítmicas

➤ Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\log_b x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\ln x}{\ln b} \right] \\ &= \frac{1}{\ln b} \frac{d}{dx} [\ln x]\end{aligned}$$

Derivada das funções logarítmicas

➤ Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\log_b x] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\ln x}{\ln b} \right] \\ &= \frac{1}{\ln b} \frac{d}{dx} [\ln x]\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} [\log_b x] = \frac{1}{x \ln b} \quad x > 0$$

Exemplo 1 Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

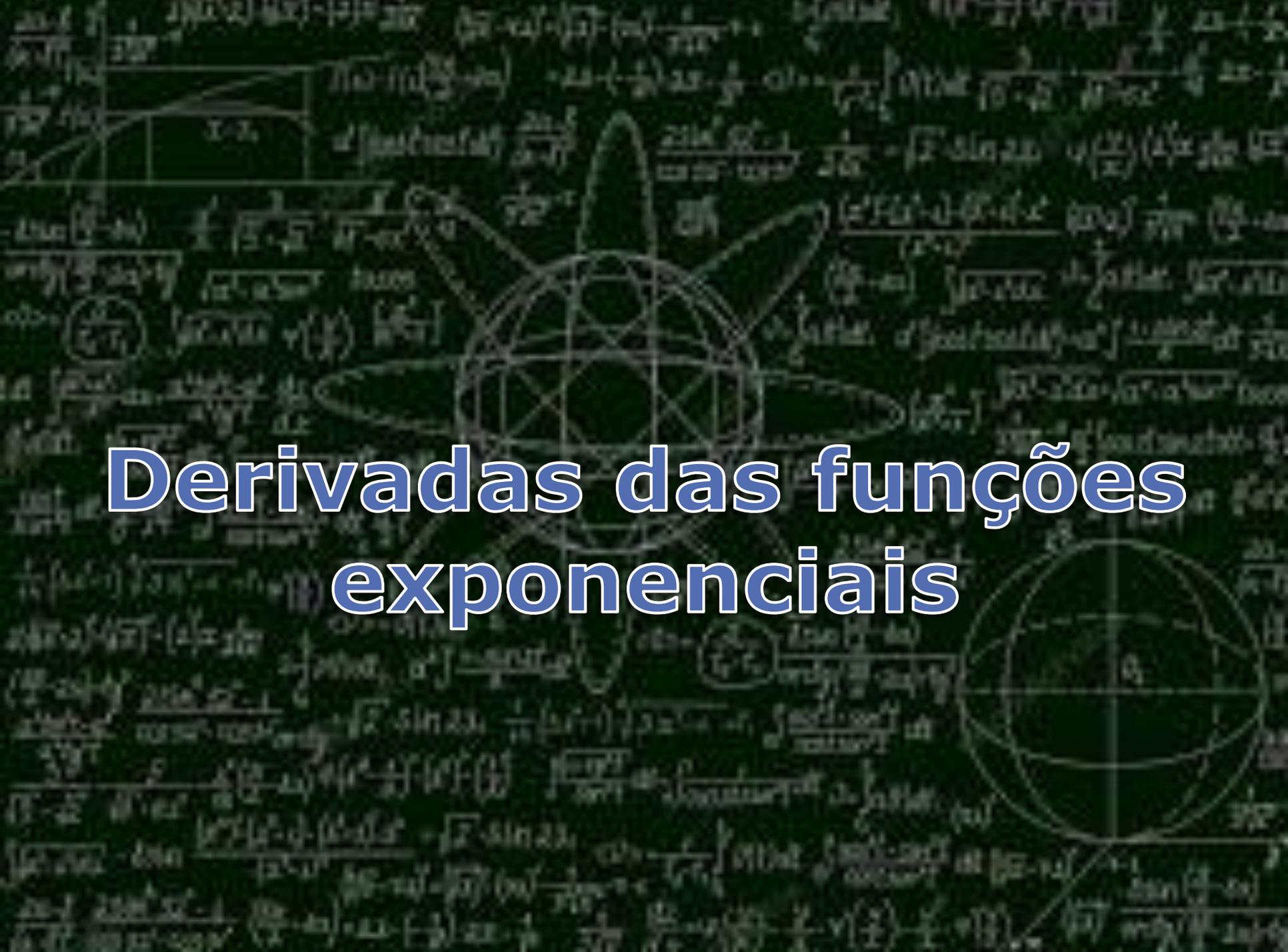
Exercício Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

$$y = \ln\left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x}}\right)$$

Diferenciação logarítmica

- Técnica útil para derivar funções compostas de produtos, quocientes e potências.
- **Exemplo 2**

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ em $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$

The background is a dark green chalkboard filled with faint, white mathematical formulas and diagrams. The formulas include various mathematical expressions such as $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, and $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$. There are also diagrams of a sphere with a grid of lines, a coordinate system with a curve, and other geometric shapes. The text is centered in the middle of the board.

Derivadas das funções exponenciais

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;
- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \Rightarrow \log_b y = x$$

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;
- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \Rightarrow \log_b y = x$$

$$\frac{d}{dx} [\log_b y] = \frac{d}{dx} [x]$$

$$\frac{1}{y \ln b} \frac{dy}{dx} = 1$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \Rightarrow \log_b y = x \Rightarrow \frac{d}{dx} [\log_b y] = \frac{d}{dx} [x]$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \Rightarrow \log_b y = x \Rightarrow \frac{d}{dx} [\log_b y] = \frac{d}{dx} [x]$$

$$\frac{1}{y \ln b} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \Rightarrow \log_b y = x \Rightarrow \frac{d}{dx} [\log_b y] = \frac{d}{dx} [x]$$

$$\frac{1}{y \ln b} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b$$

$$\frac{d}{dx} [b^x] = b^x \ln b$$

➤ quando:
 $b = e = 2,71\dots$

$$\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

Exemplo 1 Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

a) $y = 2^x$

b) $y = e^{-2x}$

c) $y = e^{\cos x}$

Derivadas das funções *log* e *exp*

Regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [\log_b x] = \frac{1}{x \ln b} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx} [\log_b u] = \frac{1}{u \ln b} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [b^x] = b^x \ln b$$

$$\frac{d}{dx} [b^u] = b^u \ln b \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx} [e^u] = e^u \frac{du}{dx}$$

Para depois desta aula:

- Rer ler o capítulo no livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Fazer a lista de exercícios.

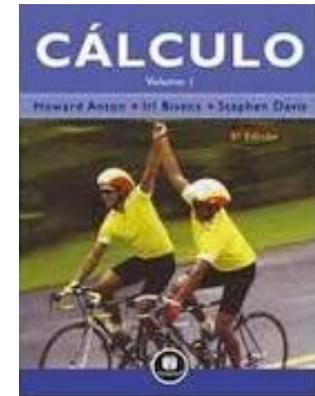
Próxima aula:

- Crescimento e concavidade.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br