Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 09 - Aula 2
Aplicações das integrais duplas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Aplicações de integrais duplas

- Nesta aula, vamos explorar as aplicações físicas das integrais duplas tais como:
  1. cálculo de massa e densidade;
  2. carga elétrica;
  3. momentos e centro de massa;
  4. momento de inércia.

Aplicações de integrais duplas

- Nesta aula, vamos explorar as aplicações físicas das integrais duplas tais como:
  1. cálculo de massa e densidade;
  2. carga elétrica;
  3. momentos e centro de massa;
  4. momento de inércia.
- Essas ideias também são importantes quando aplicadas a funções densidade de probabilidade de duas variáveis e áreas de superfícies.

1. Densidade e massa

- No cálculo I, determinamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas.
- Naqueles casos a densidade era constante e usamos as integrais unidimensionais.
- Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável.

1. Densidade e massa

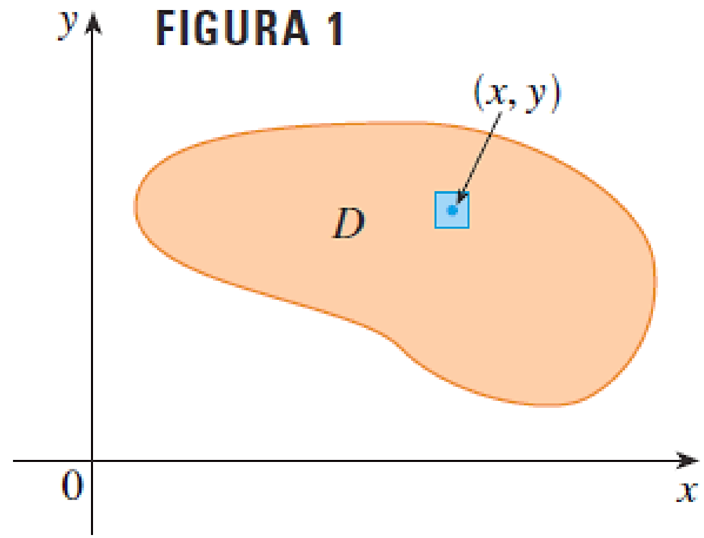
- No cálculo I, determinamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas.
- Naqueles casos a densidade era constante e usamos as integrais unidimensionais.
- Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável.
- Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy, e que sua densidade de massa em um ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua de duas variáveis em D.

1. Densidade e massa

- Considerando Δm e ΔA a massa e a área de um pequeno retângulo que contém o ponto (x, y).

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

FIGURA 1



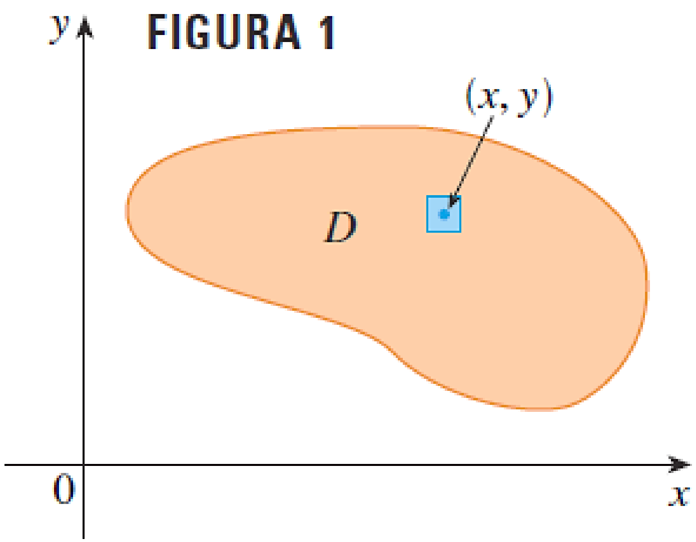
1. Densidade e massa

- Considerando Δm e ΔA a massa e a área de um pequeno retângulo que contém o ponto (x, y).

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

- A massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$

FIGURA 1



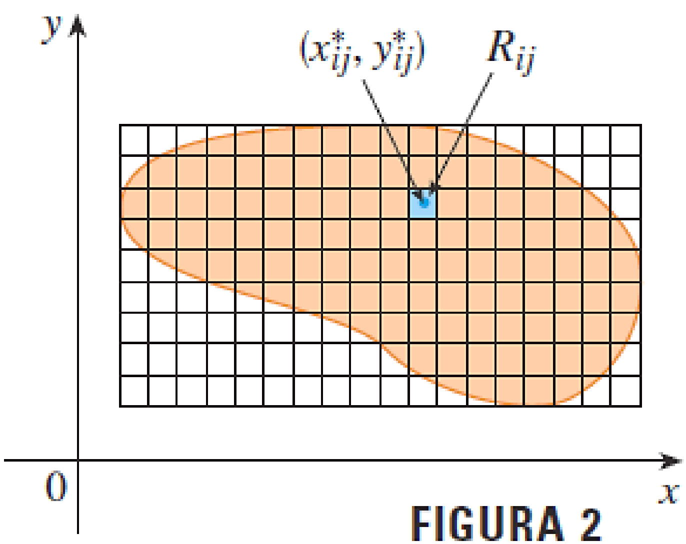


FIGURA 2

1. Densidade e massa

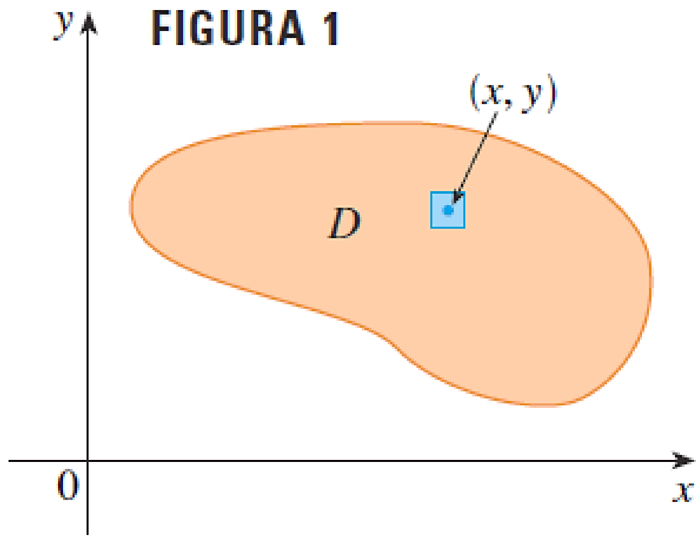
- Considerando Δm e ΔA a massa e a área de um pequeno retângulo que contém o ponto (x, y).

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

- A massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

FIGURA 1



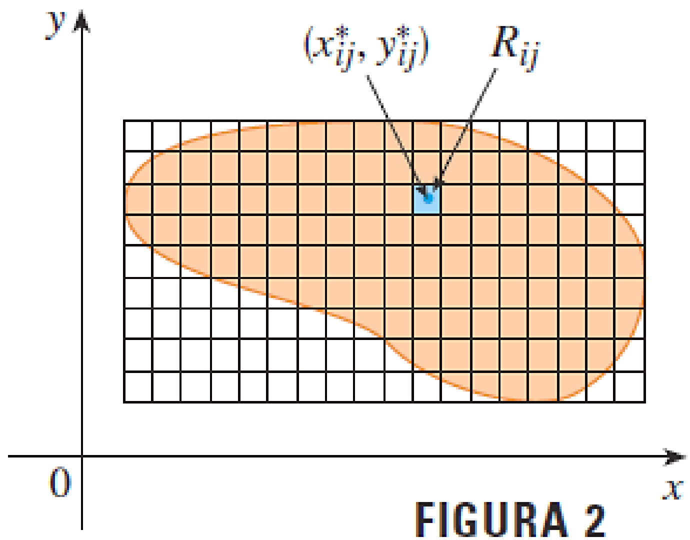


FIGURA 2

1. Densidade e massa

- Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina.

$$m = \lim_{k,\, l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

1. Densidade e massa

- Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina.

$$m = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\, \Delta A = \iint_{D} \rho(x, y)\, dA$$

2. Carga elétrica

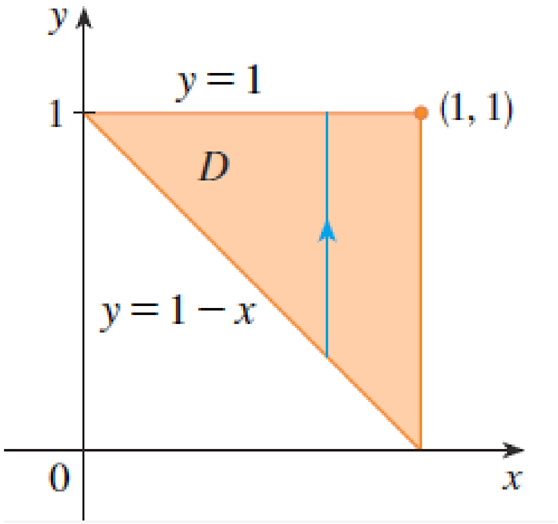
- Se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga é $\sigma(x, y)$ em D, então a carga total Q é dada por:

$$Q = \iint_{D} \sigma(x, y)\, dA$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

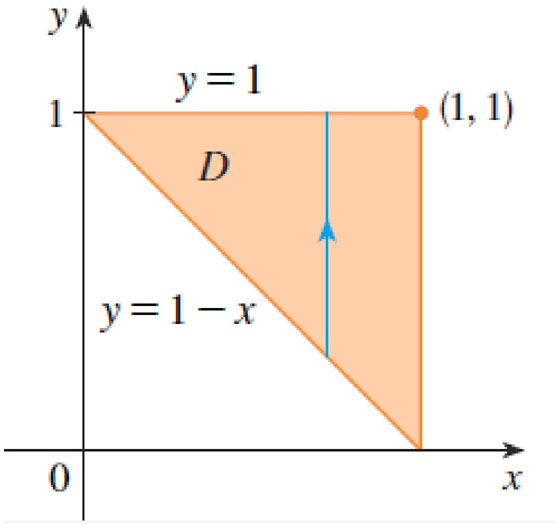
Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m^2). Determine a carga total.



2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m²). Determine a carga total.



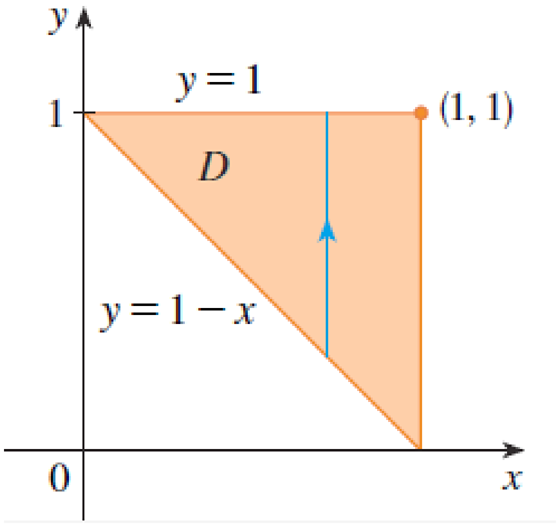
Solução:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m²). Determine a carga total.



Solução:

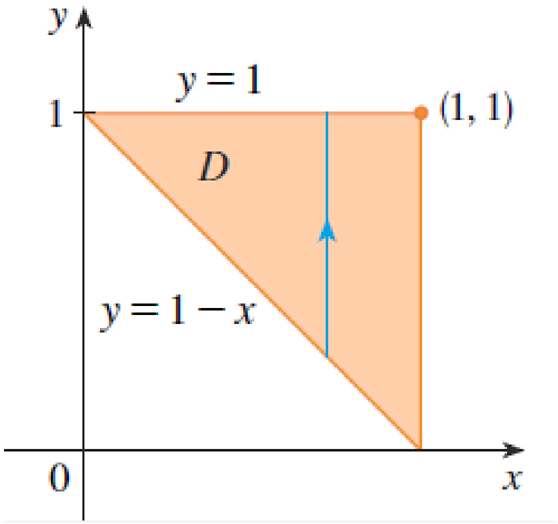
$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m²). Determine a carga total.



Solução:

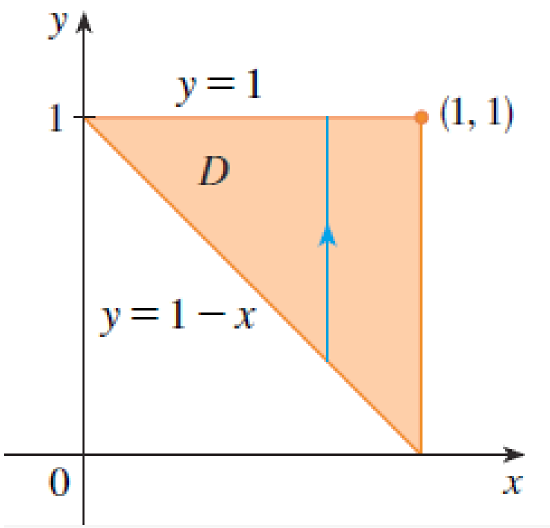
$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \quad = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1 - x)^2]\, dx$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m^2). Determine a carga total.



Solução:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

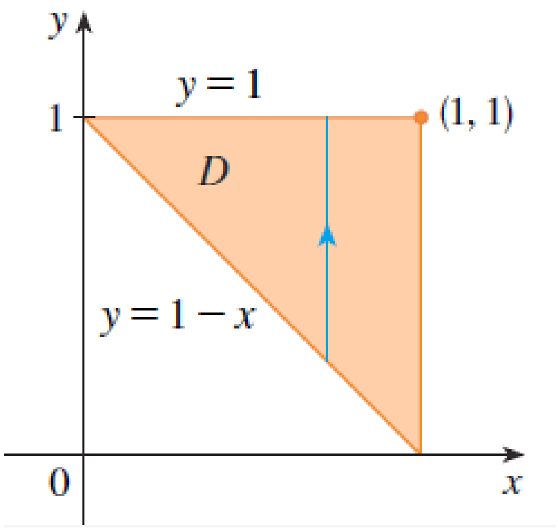
$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \quad = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1 - x)^2]dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m²). Determine a carga total.



Solução:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

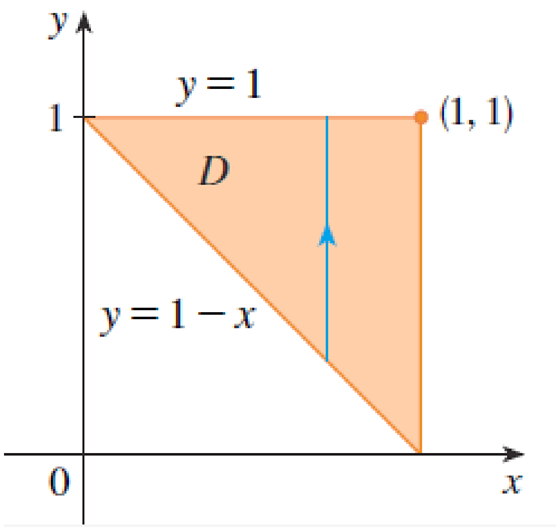
$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \quad = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1 - x)^2]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 =$$

2. Carga elétrica

Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em (C/m²). Determine a carga total.



Solução:

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx \quad = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1 - x)^2] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24} \text{ C.}$$

carga total

3. Momentos e centros de massa

- Suponha que uma lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade.
- Podemos aproximar o momento de R_{ij} (Figura 2) com relação ao eixo x por: $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A]\,y_{ij}^*$

3. Momentos e centros de massa

- Suponha que uma lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade.
- Podemos aproximar o momento de R_{ij} (Figura 2) com relação ao eixo x por: $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A]\,y_{ij}^*$
- Se tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o momento da lâmina inteira em relação ao eixo x:

$$M_x = \lim_{m,\,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^* \, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

3. Momentos e centros de massa

- Suponha que uma lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade.
- Podemos aproximar o momento de R_{ij} (Figura 2) com relação ao eixo x por: $[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A]y_{ij}^*$
- Se tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o momento da lâmina inteira em relação ao eixo x:

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^* \, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A = \iint_D y\,\rho(x, y)\, dA$$

- De maneira análoga para o eixo y:

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* \, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A = \iint_D x\,\rho(x, y)\, dA$$

3. Momentos e centros de massa

- O significado do centro de massa é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada no ponto do centro de massa.

- Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa, como na Figura 4.

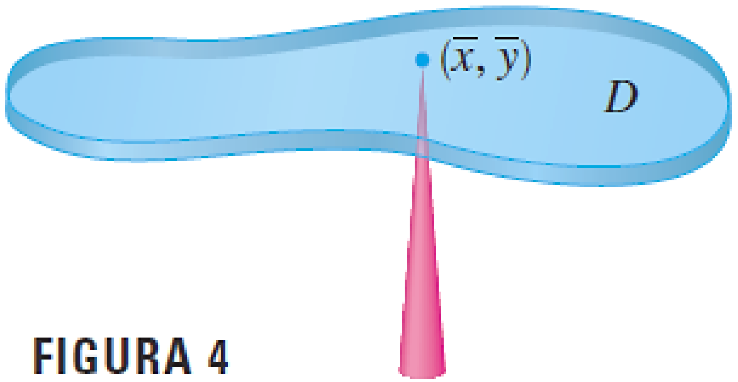


FIGURA 4

3. Momentos e centros de massa

As coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

3. Momentos e centros de massa

As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\,\rho(x, y)\, dA$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\, dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2

A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2

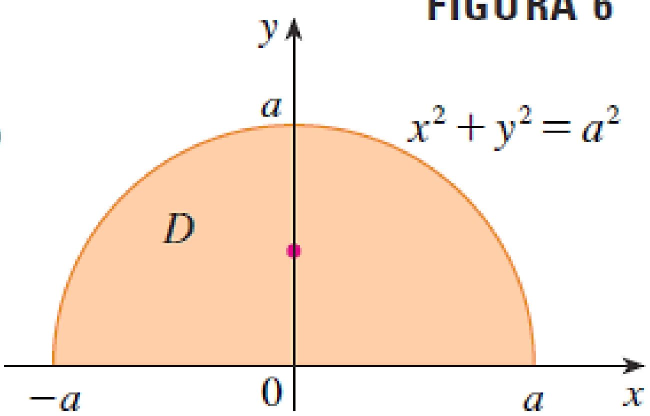
A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Solução:

Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Veja a Figura 6.)

Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$.

FIGURA 6



3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2

A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

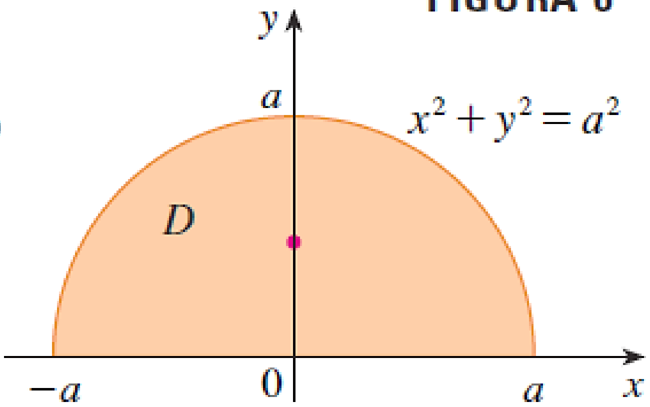
Solução:

Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Veja a Figura 6.) Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante.

FIGURA 6



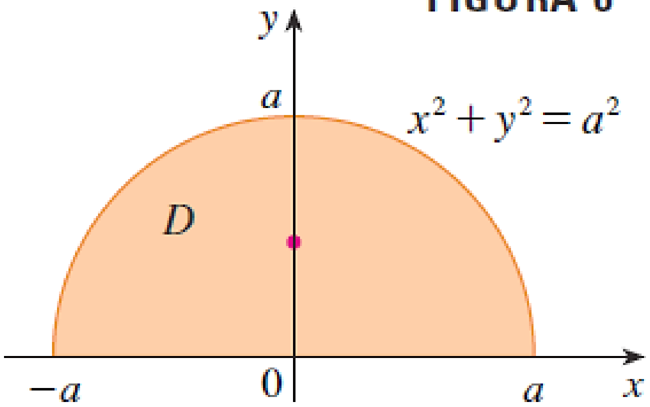
3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Então a conversão para coordenadas polares $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo,

FIGURA 6



3. Momentos e centros de massa

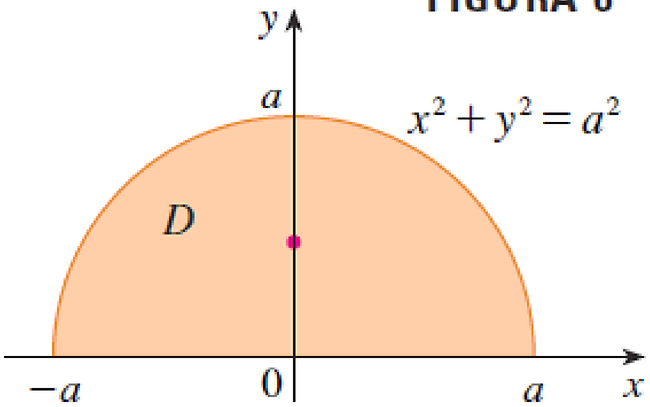
Exemplo 2 solução:

Então a conversão para coordenadas polares $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo,

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

FIGURA 6



3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

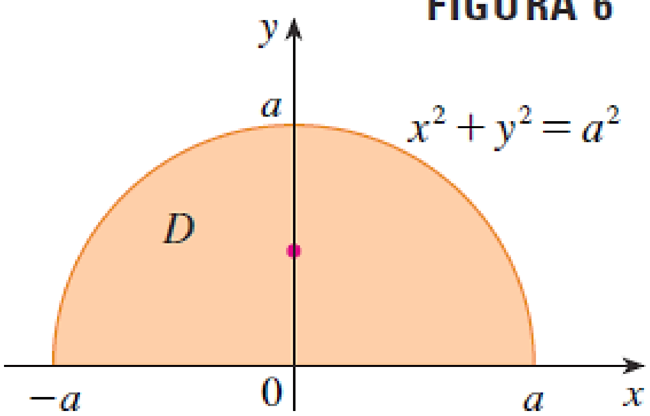
Então a conversão para coordenadas polares $\sqrt{x^2+y^2}=r$

e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo,

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \iint_D K\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{a} (Kr)\,r\,dr\,d\theta = K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\,dr$$

FIGURA 6



3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Então a conversão para coordenadas polares $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

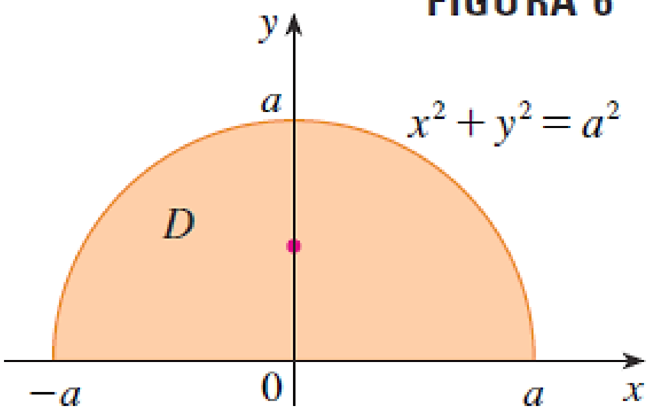
e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo,

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{a} (Kr)\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr$$

$$= K\pi \frac{r^3}{3}\Bigg]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

FIGURA 6



3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\overline{x} = 0$.

3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$.

A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \operatorname{sen} \theta \,(Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$.

A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \operatorname{sen}\theta\,(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^{a} r^3\,dr = \frac{3}{\pi a^3} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a}$$

3. Momentos e centros de massa

Exemplo 2 solução:

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$.

A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \operatorname{sen} \theta\,(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta\,d\theta \int_0^{a} r^3\,dr = \frac{3}{\pi a^3} \left[-\cos \theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a}$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

4. Momento de inércia

- O **momento de inércia** de uma partícula de **massa** $\boldsymbol{m}$ em relação a um eixo de rotação é definido como $\boldsymbol{mr^2}$, onde $\boldsymbol{r}$ **é a distância da partícula ao eixo**.
- Estendemos este conceito para uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ que ocupa uma região D.

4. Momento de inércia

- O **momento de inércia** de uma partícula de **massa** $\boldsymbol{m}$ em relação a um eixo de rotação é definido como $\boldsymbol{mr^2}$, onde $\boldsymbol{r}$ **é a distância da partícula ao eixo**.
- Estendemos este conceito para uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ que ocupa uma região D.
- O momento de inércia tem um papel em um movimento de rotação, semelhante ao que a massa tem em um movimento linear.
- Quanto maior o momento de inércia de uma roda mais difícil será começar ou parar a sua rotação.

4. Momento de inércia

- Momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x:

$$I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

4. Momento de inércia

➢ Momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x:

$$I_x = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dA$$

➢ Momento de inércia da lâmina em relação ao eixo y:

$$I_y = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dA$$

4. Momento de inércia

- Momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x:

$$I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

- Momento de inércia da lâmina em relação ao eixo y:

$$I_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

- Momento de inércia da lâmina em relação á origem:

$$I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dA$$

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

Solução:

O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a$.

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

Solução:

O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta$$

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

Solução:

O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

Solução:

O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

$I_x = I_y$ (da simetria do problema) e $I_x + I_y = I_0$. Assim

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$

4. Momento de inércia

Exemplo 3

Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

Solução:

O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

$I_x = I_y$ (da simetria do problema) e $I_x + I_y = I_0$. Assim

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$ observe que a massa do disco é $\rho(\pi a^2)$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.4 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

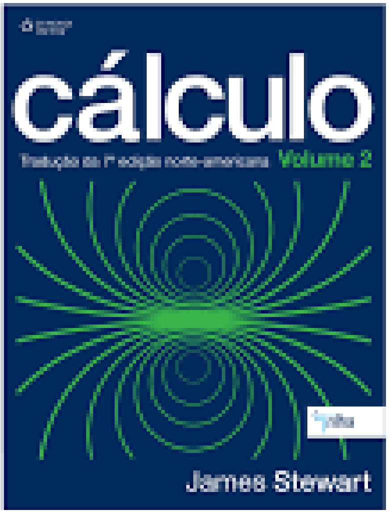
Próxima aula:

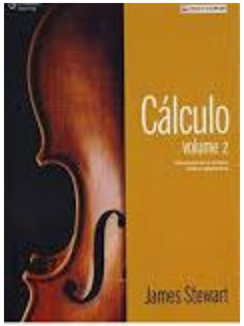
- Probabilidade e área de superfícies.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ►





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br