Cálculo I

Licenciatura

Semana 09 - Aula 2
Crescimento, decrescimento, concavidade e ponto de inflexão

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Introdução

- ✓ Recursos computacionais são úteis para visualizar gráficos de funções;

- ✓ Porém, nos problemas que requerem precisão de análise a aplicação da derivada é mais vantajosa;

Introdução

- ✓ Recursos computacionais são úteis para visualizar gráficos de funções;

- ✓ Porém, nos problemas que requerem precisão de análise a aplicação da derivada é mais vantajosa;

- ✓ Nesta semana desenvolveremos formas matemáticas para encontrar a forma exata do gráfico de funções.

A – Funções crescentes e decrescentes

- ✓ Os termos crescente, decrescente e constante descrevem o comportamento de funções;
- ✓ O procedimento é feito varrendo-se o gráfico, em um intervalo, da esquerda para direita;

A – Funções crescentes e decrescentes

- ✓ Os termos crescente, decrescente e constante descrevem o comportamento de funções;
- ✓ O procedimento é feito varrendo-se o gráfico, em um intervalo, da esquerda para direita;
- ✓ Se funções representam modelos, a análise do crescimento fornece uma relação de proporcionalidade entre as variáveis.

Definição 5.1.1 (8ª *ed. Anton*)

4.1.1 DEFINIÇÃO Seja f definida em um intervalo, e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.

(a) f é ***crescente*** no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição 5.1.1 (8^a *ed. Anton*)

4.1.1 DEFINIÇÃO Seja f definida em um intervalo, e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.

(*a*) f é ***crescente*** no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

(*b*) f é ***decrescente*** no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição 5.1.1 (8^a *ed. Anton*)

4.1.1 DEFINIÇÃO Seja f definida em um intervalo, e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.

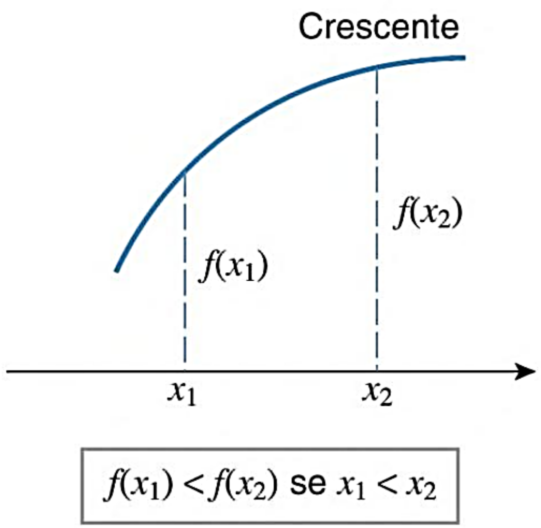
(*a*) f é ***crescente*** no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

(*b*) f é ***decrescente*** no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

(*c*) f é ***constante*** no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$, quaisquer que sejam os pontos x_1 e x_2.

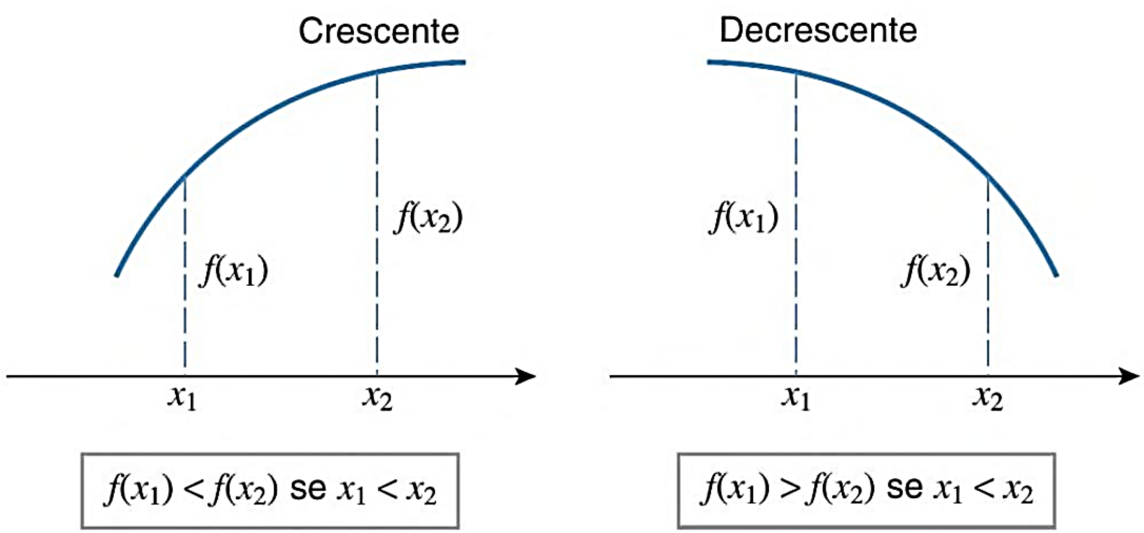
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A – Funções crescentes e decrescentes



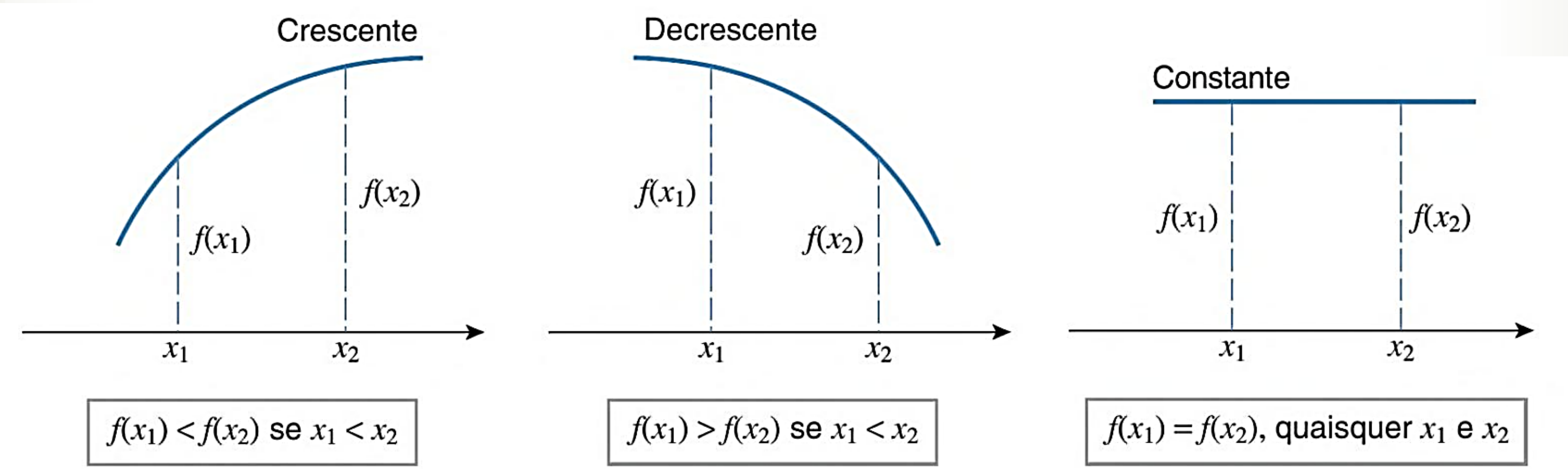
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A – Funções crescentes e decrescentes



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A – Funções crescentes e decrescentes

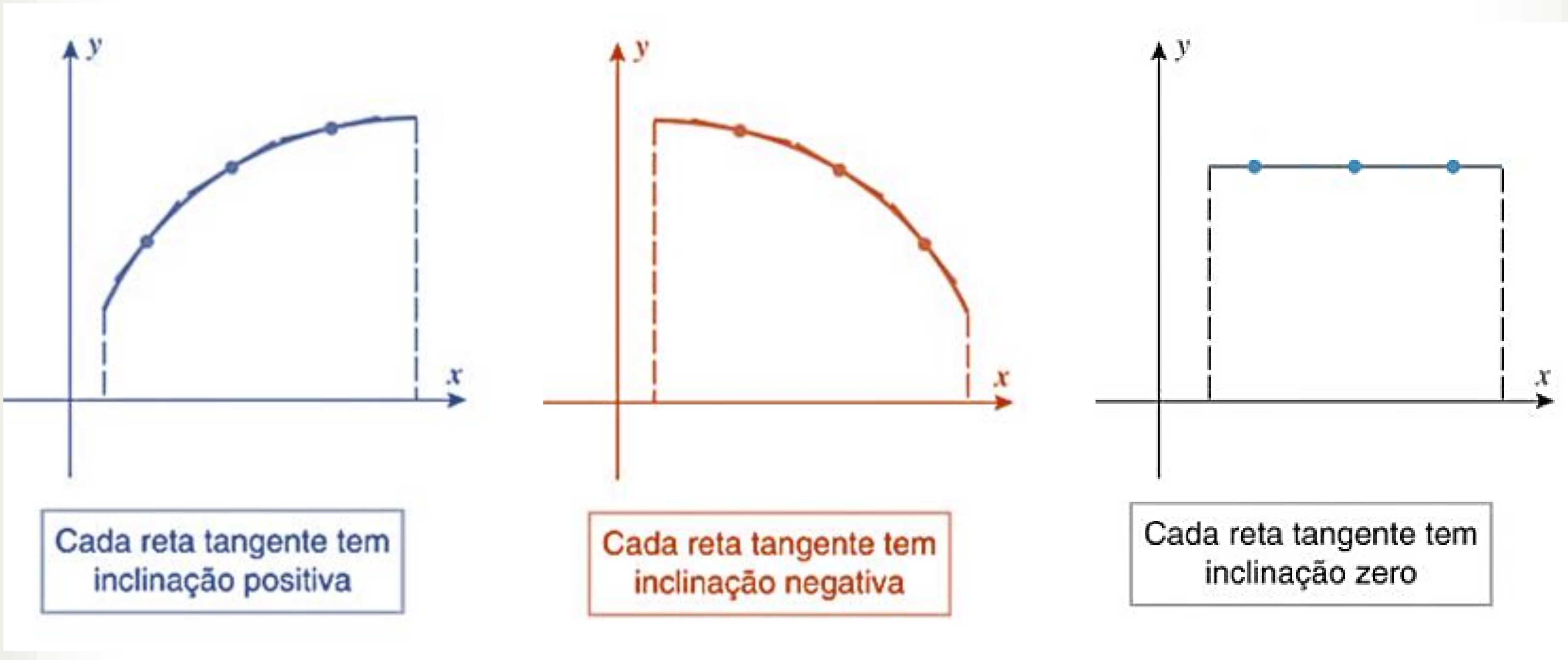


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A – Funções crescentes e decrescentes

- ✓ As figuras anteriores sugerem que:
  - ➢ Uma função f seja crescente nos intervalos em que as retas tangentes são positivas;
  - ➢ Ou que f seja decrescente nos intervalos em que as retas tangentes são negativas;
  - ➢ E ainda constante se a tangente for nula.

A – Funções crescentes e decrescentes



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema 5.1.2 (8ª *ed. Anton*)

4.1.2 TEOREMA *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).*

(a) *Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.*

Teorema 5.1.2 (8ª *ed. Anton*)

4.1.2 TEOREMA *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).*

(a) *Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.*

Teorema 5.1.2 (*8ª ed. Anton*)

4.1.2 TEOREMA *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).*

(a) *Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.*

(c) *Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$.*

Crescimento e decrescimento

- Análise pela derivada

Seja uma função ***f*** contínua no intervalo $[a, b]$ e que possui derivadas no intervalo (a, b).

Crescimento e decrescimento

- Análise pela derivada

Seja uma função f contínua no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e que possui derivadas no intervalo (a, b).

- Se $f' > 0 \quad \forall \ x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \ crescente$

Crescimento e decrescimento

- Análise pela derivada

Seja uma função f contínua no intervalo $[a, b]$ e que possui derivadas no intervalo (a, b).

- Se $f' > 0 \quad \forall \; x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \; crescente$
- Se $f' < 0 \quad \forall \; x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \; decrescente$

Exemplo 1 $f(x) = x^2 - 2x$

Determinar os intervalos onde a função f cresce ou decresce.

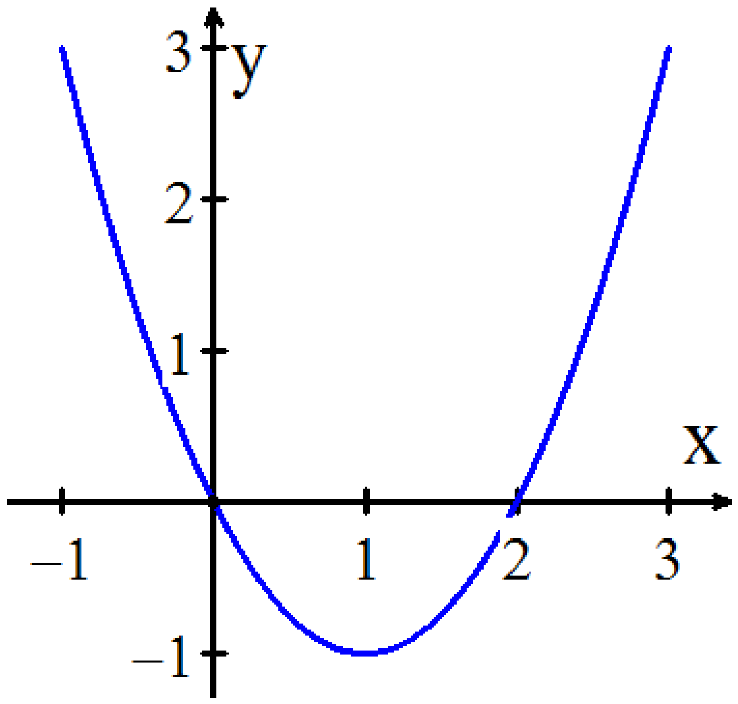
Exemplo 1 $f(x) = x^2 - 2x$

Determinar os intervalos onde a função f cresce ou decresce.

x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

Exemplo 1 $f(x) = x^2 - 2x$

Determinar os intervalos onde a função f cresce ou decresce.



x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

x	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

x	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

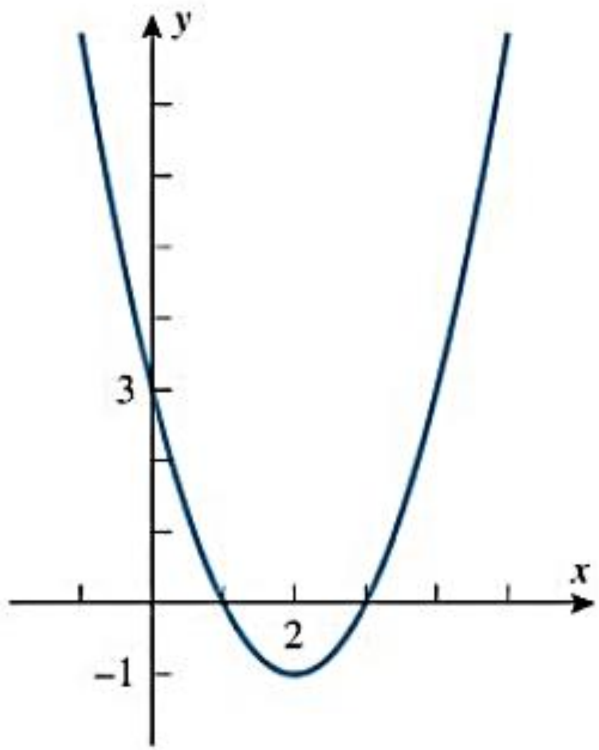
$f(x)$ é **decrescente** $(-\infty, 1)$

$f(x)$ é **crescente** $(1, \infty)$

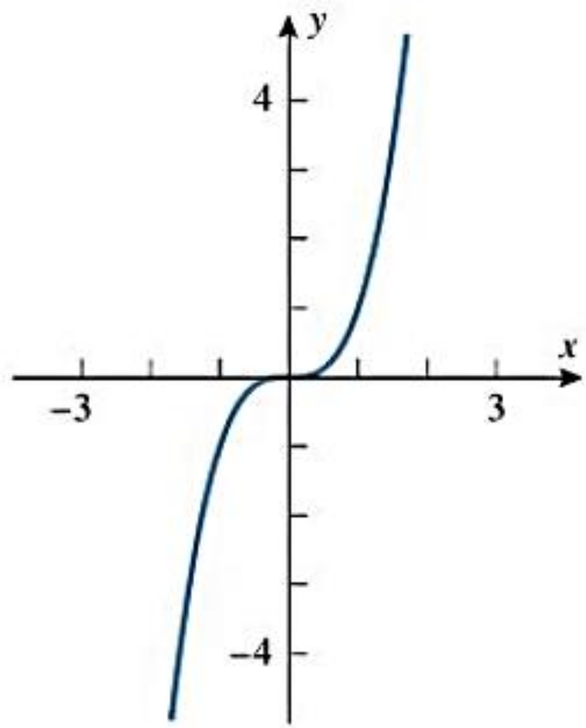
Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (b) $f(x) = x^3$

Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:



$f(x) = x^2 - 4x + 3$



$f(x) = x^3$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

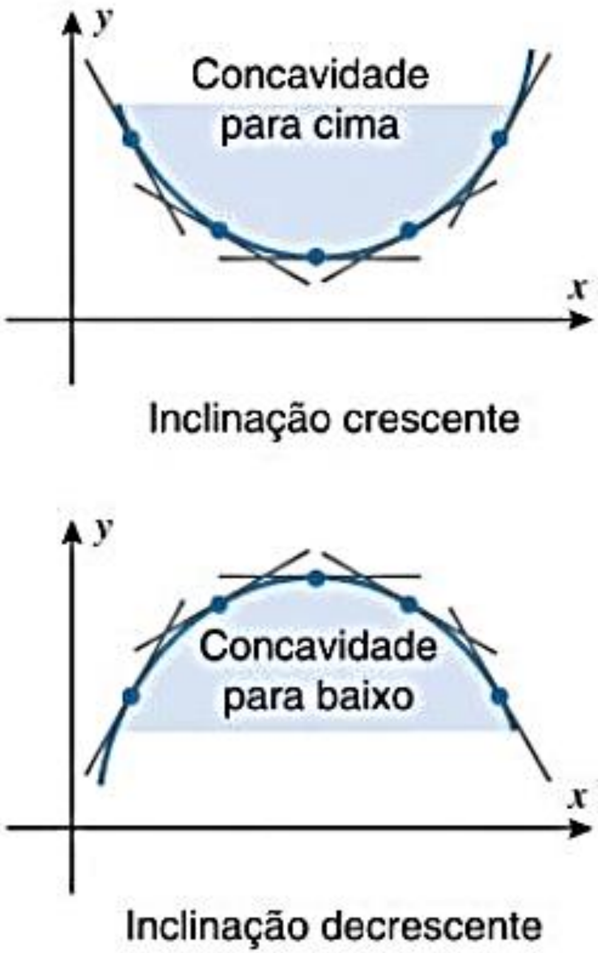
B – Concavidade

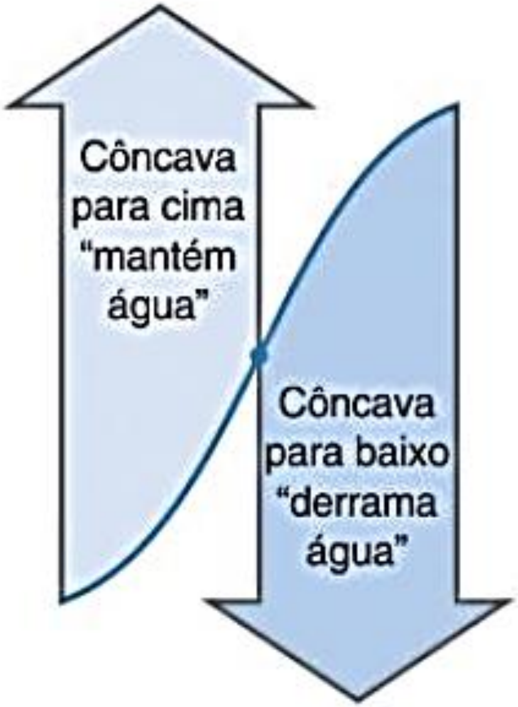
- ✓ O sinal da derivada, embora, revele o crescimento ou decrescimento não revela a direção da curvatura do gráfico;
- ✓ Uma curva pode ser côncava para cima (segura água) ou côncava para baixo (derrama água);
- ✓ Como podemos ver nas figuras.

B – Concavidade

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

B – Concavidade





Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição 5.1.3 (8ª *ed. Anton*)

4.1.3 DEFINIÇÃO Se f for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que f é ***côncava para cima*** no intervalo aberto se f' for crescente nesse intervalo, e dizemos que f é ***côncava para baixo*** no intervalo aberto se f' for decrescente nesse intervalo.

Definição 5.1.3 (8ª ed. Anton)

4.1.3 DEFINIÇÃO Se f for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que f é ***côncava para cima*** no intervalo aberto se f' for crescente nesse intervalo, e dizemos que f é ***côncava para baixo*** no intervalo aberto se f' for decrescente nesse intervalo.

Teorema 5.1.4 (8ª ed. Anton)

4.1.4 TEOREMA Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto.

(a) *Se $f''(x) > 0$ em qualquer x do intervalo aberto, então f é côncava para cima nesse intervalo.*

(b) *Se $f''(x) < 0$ em qualquer x do intervalo aberto, então f é côncava para baixo nesse intervalo.*

Exemplo 4 – Identificar os intervalos de concavidade da função:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

C – Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;

C – Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

C – Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição 5.1.5 (8ª *ed. Anton*)

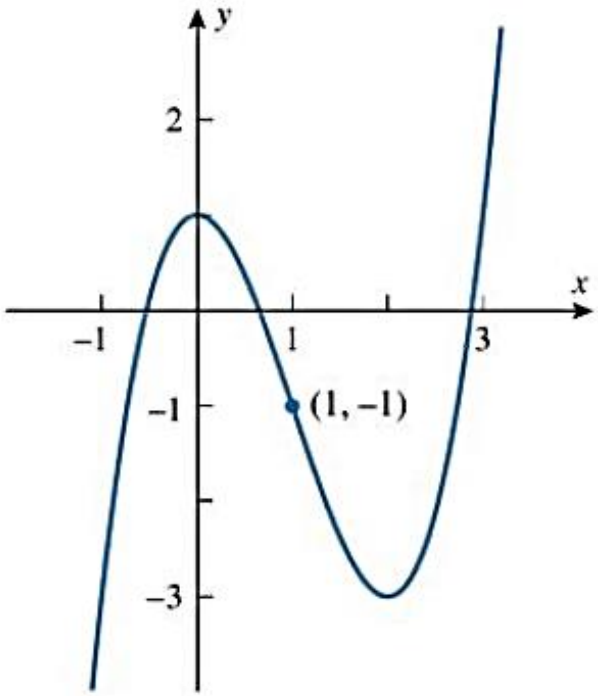
4.1.5 DEFINIÇÃO Se f for contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 e se f mudar de concavidade no ponto $(x_0, f(x_0))$, então diremos que o ponto x_0 do domínio, ou o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico, é um ***ponto de inflexão*** de f (Figura 4.1.9).

Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

D – Ponto de inflexão em aplicações

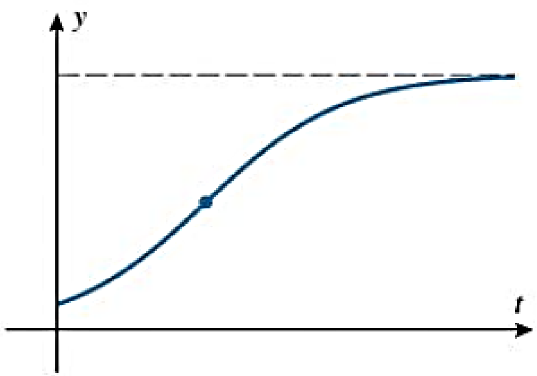
- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;

- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de *S*.

D – Ponto de inflexão em aplicações

- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;

- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de *S*.



Curva de crescimento logístico

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

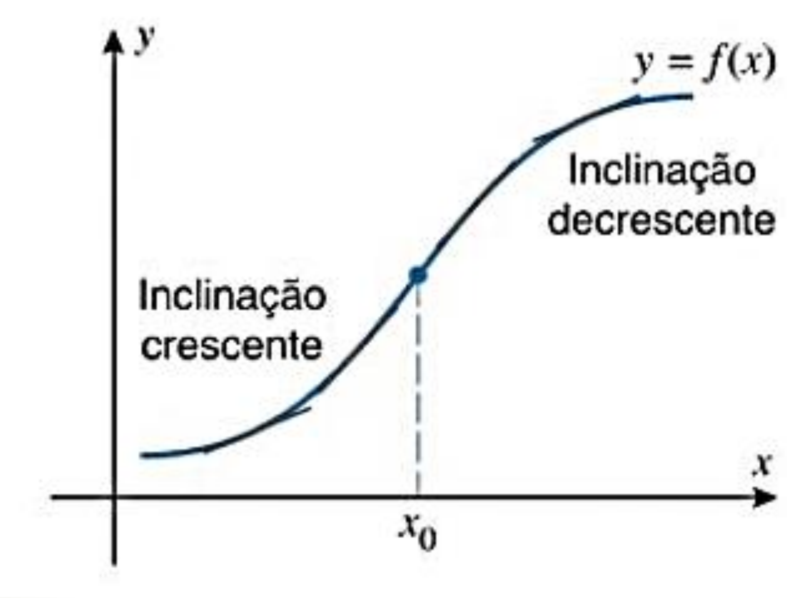
D – Ponto de inflexão em aplicações

Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

D – Ponto de inflexão em aplicações

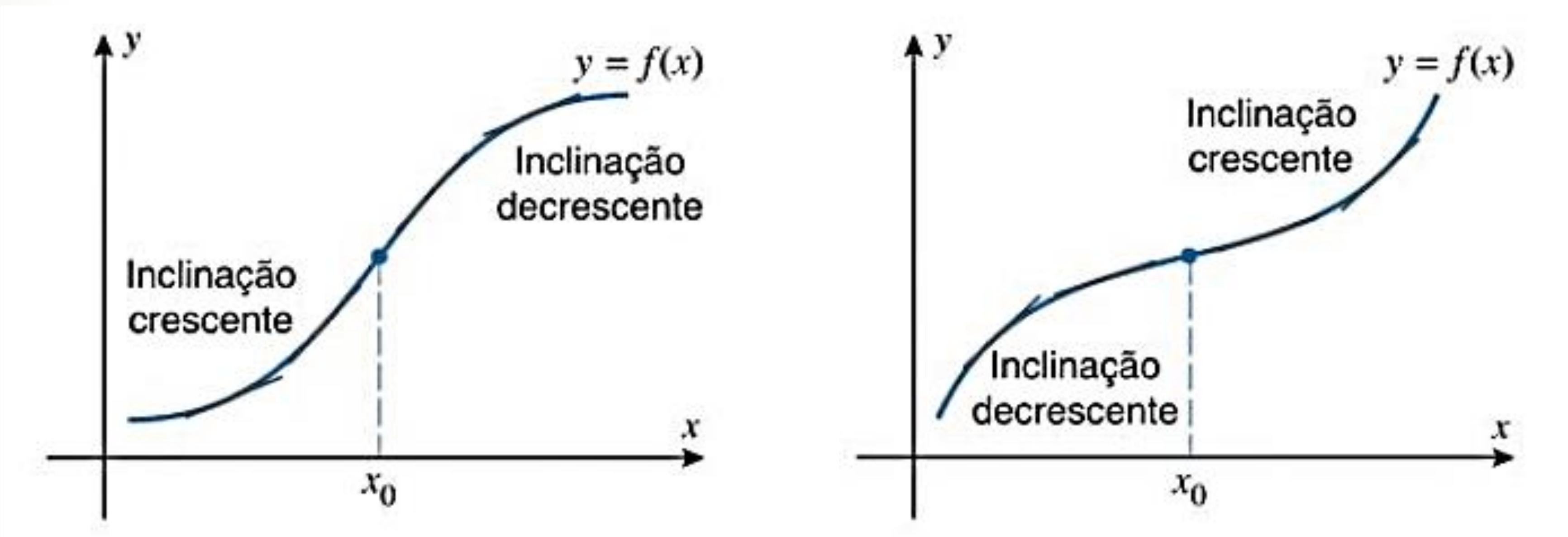
Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente ou vice-versa.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

D – Ponto de inflexão em aplicações

Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente ou vice-versa.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo aplicado

Exemplo – Reação do organismo

A reação do organismo a um medicamento pode ser representada por uma função do tipo:

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

Exemplo - Reação do organismo

A reação do organismo a um medicamento pode ser representada por uma função do tipo:

$$\boldsymbol{R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)}$$

$\boldsymbol{R}$: Reação (temperatura, pressão etc.);

$\boldsymbol{C}$: Quantidade máxima que pode ser administrada;

$\boldsymbol{D}$: Quantidade usada ($\boldsymbol{0 \leq D \leq C}$).

Domínio biológico: intervalo [0,C]

Exemplo (Gráfico)

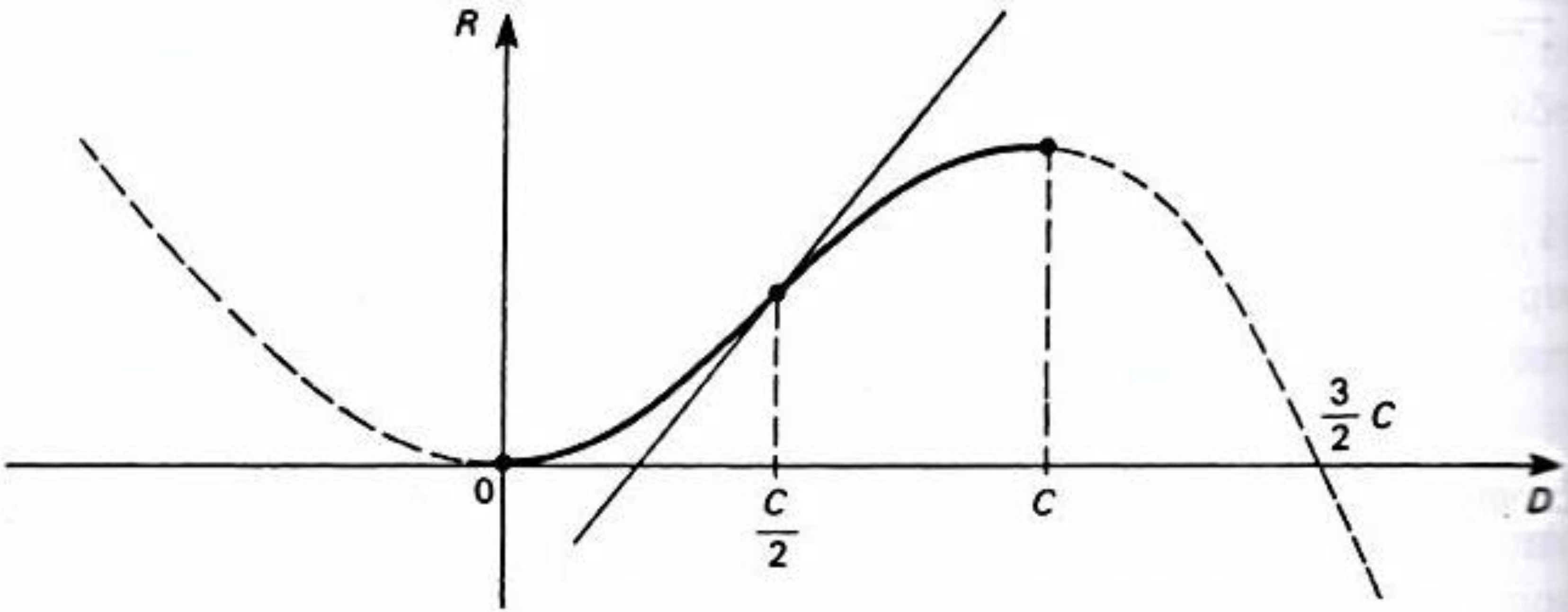


Figura 4.17 Intensidade de reação do organismo a uma droga.

Sensibilidade cresce até $D = C/2$

E decresce até atingir $D = C$

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

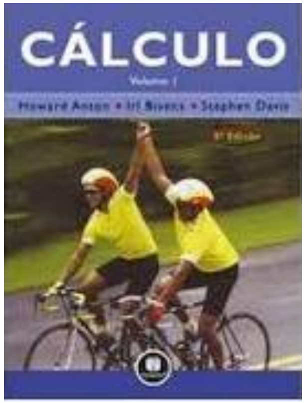
Próxima aula:

- Pontos de máximo e mínimo de funções.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br