Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 09 - Aula 3
Probabilidade e área de superfícies

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Probabilidade

- No cálculo I, consideramos a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X.
- Isso significa que $f(x) \geq 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Probabilidade

- No cálculo I, consideramos a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X.
- Isso significa que $f(x) \geq 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- A probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Probabilidade

- Consideremos agora um par de variáveis X e Y.
- A função densidade conjunta de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja:

$$P((X, Y \ \in D)) = \iint_D f(x, y)dA$$

Probabilidade

- Consideremos agora um par de variáveis X e Y.
- A função densidade conjunta de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja:

$$P((X, Y \ \in D)) = \iint_D f(x, y)dA$$

- Se a região for um retângulo, probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dx\,dy$$

Probabilidade

- Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad\qquad \iint_D f(x,y)\,dA = 1$$

Probabilidade

- Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad\qquad \iint_D f(x,y)\,dA = 1$$

- A integral dupla sobre R^2 é uma integral imprópria, definida como o limite da integral dupla sobre a região e podemos escrever:

$$\iint_{R^2} f(x,y)\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Probabilidade

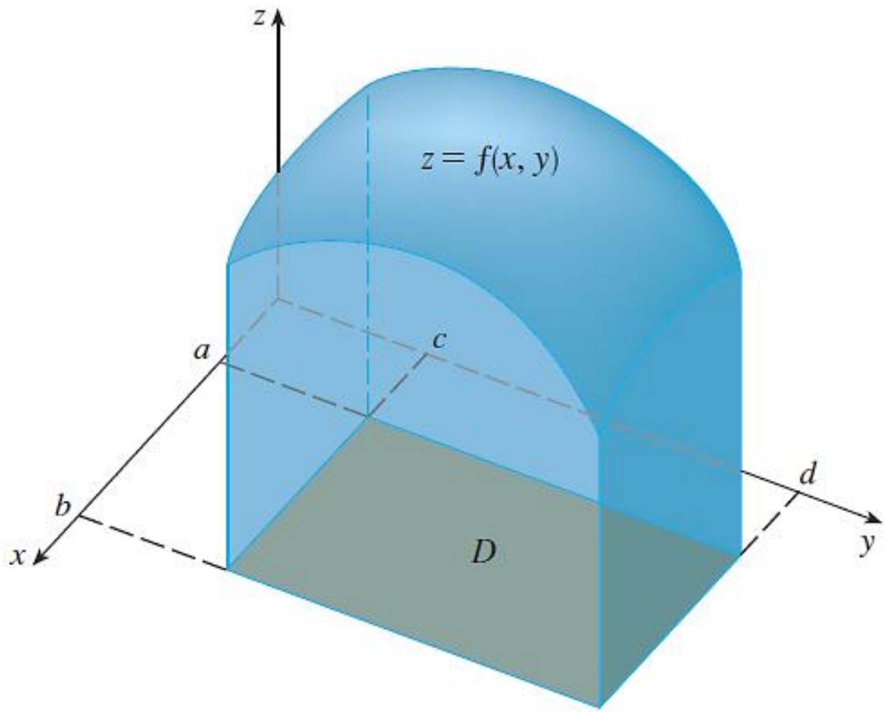


FIGURA 7 A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade.

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Probabilidade

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Solução:

Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1.

Probabilidade

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Solução:

Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1.

Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx$$

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Solução:

Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1.

Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= C \int_0^{10} \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx$$

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Solução:

Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1.

Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x + 2y)\,dy\,dx$$

$$= C\int_0^{10}\left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx = C\int_0^{10}(10x + 100)\,dx = 1\,500C$$

Exemplo 1

Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

Solução:

Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1.

Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= C \int_0^{10} \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx = C \int_0^{10} (10x + 100)\, dx = 1\,500C$$

Portanto, $C = \frac{1}{1\,500}$.

Exemplo 1

Solução:

A probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

Solução:

A probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

Exemplo 1

Solução:

A probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_{0}^{7} \left[xy + y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx$$

Solução:

A probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_{0}^{7} \left[xy + y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_{0}^{7} (8x + 96)\, dx$$

Exemplo 1

Solução:

A probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_{0}^{7} \left[xy + y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500} \int_{0}^{7} (8x + 96)\, dx$$

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \tfrac{868}{1\,500} \approx 0{,}5787$$

Valores esperados

- Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta *f*, definimos a média X e a média Y, também chamadas valores esperados de X e Y, como:

$$\mu_1 = \iint_{R^2} x\, f(x, y) dA \qquad \mu_2 = \iint_{R^2} y\, f(x, y) dA$$

Valores esperados

- Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f, definimos a média X e a média Y, também chamadas valores esperados de X e Y, como:

$$\mu_1 = \iint_{R^2} x\, f(x, y) dA \qquad \mu_2 = \iint_{R^2} y\, f(x, y) dA$$

- As expressões são parecidas com os momentos e de uma lâmina com função densidade ρ.
- De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída.

Área de superfícies

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, supomos que $f(x, y) \geqslant 0$ e o domínio D de f é um retângulo. (veja a Figura 1).

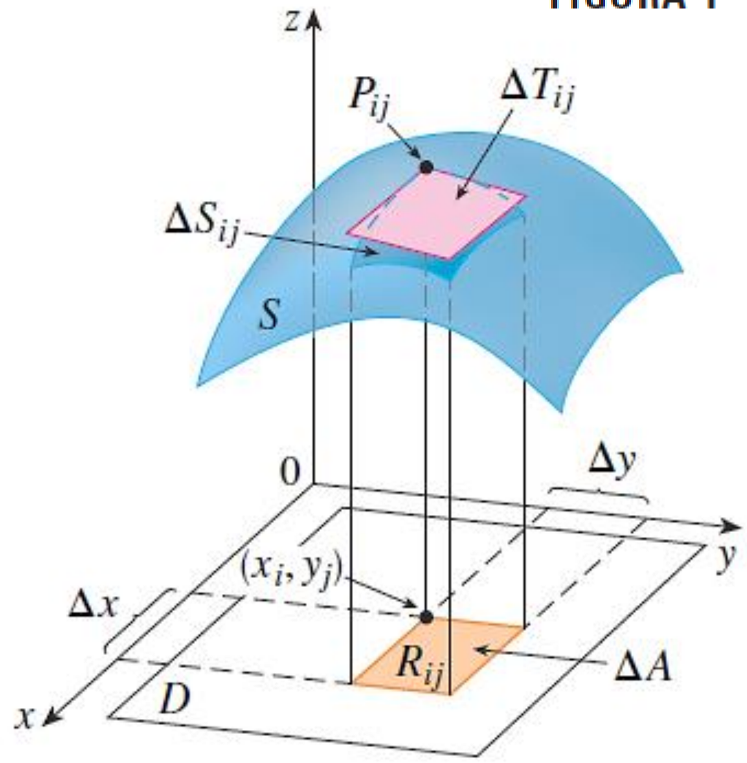


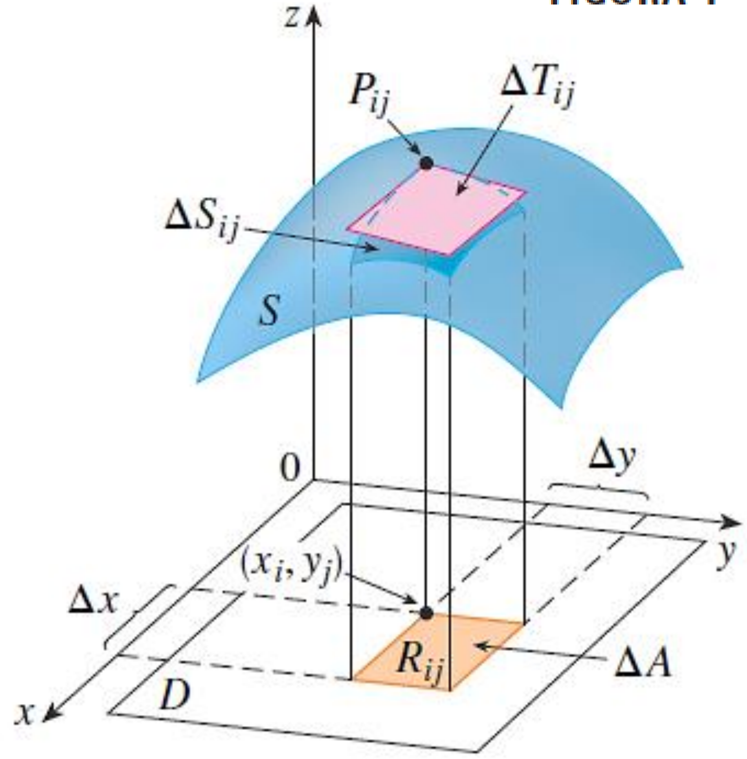
FIGURA 1

Área de superfícies

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, supomos que $f(x, y) \geqslant 0$ e o domínio D de f é um retângulo. (veja a Figura 1).

O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij}.

FIGURA 1



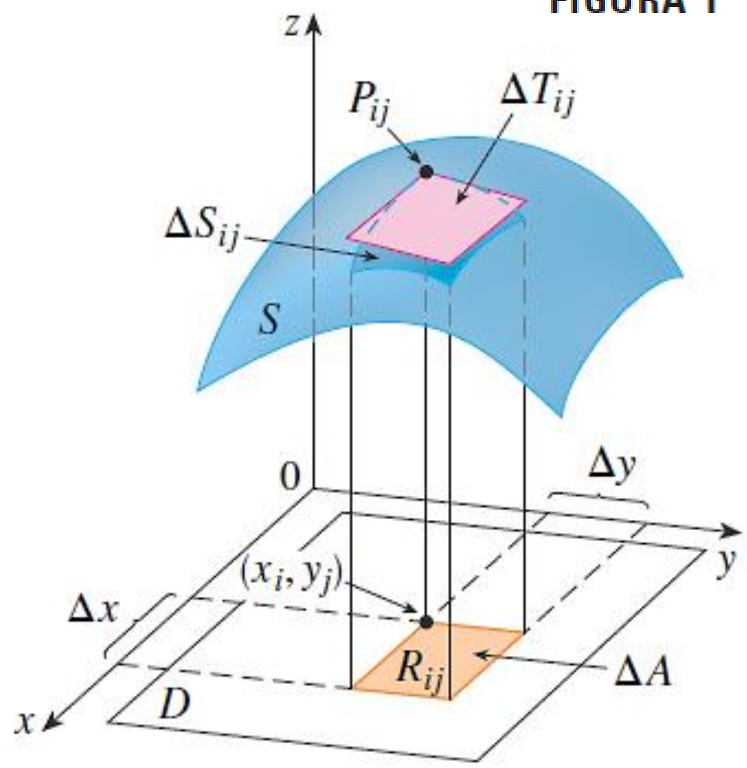
Área de superfícies

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, supomos que $f(x, y) \geqslant 0$ e o domínio D de f é um retângulo. (veja a Figura 1).

O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij}.

Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação à área ΔS_{ij} .

FIGURA 1



Área de superfícies

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, supomos que $f(x, y) \geqslant 0$ e o domínio D de f é um retângulo. (veja a Figura 1).

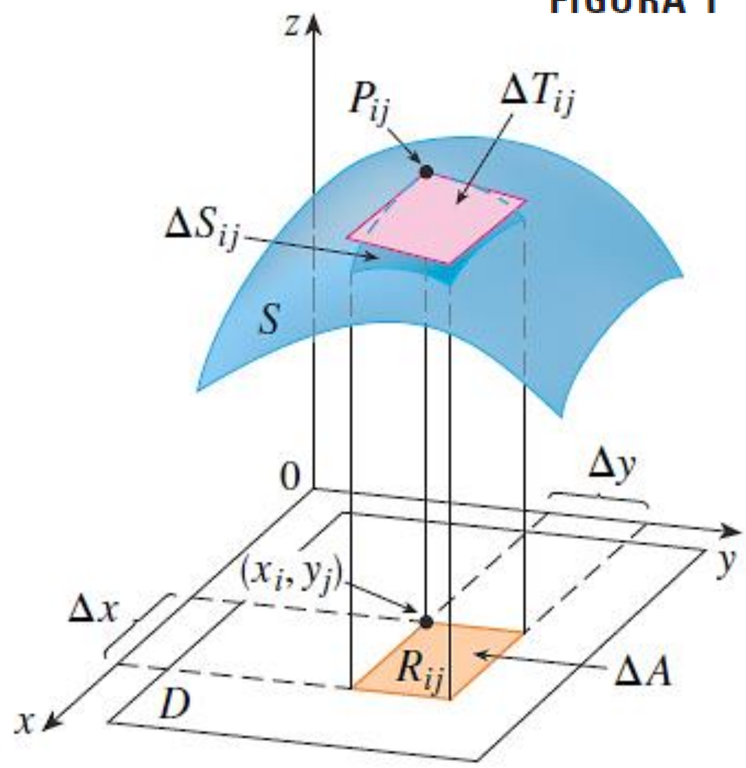
O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij}.

Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação à área ΔS_{ij}.

Portanto, definimos a **área da superfície** de S como

$$A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \qquad 1$$

FIGURA 1



Área de superfícies

Para encontrar uma fórmula mais conveniente para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} (Figura 2.)

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\mathbf{k}$$

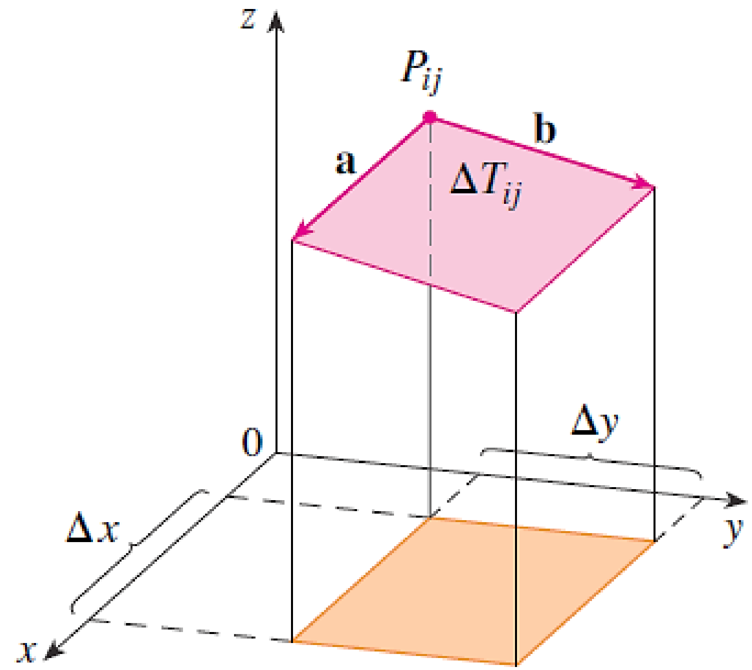


FIGURA 2

Área de superfícies

Para encontrar uma fórmula mais conveniente para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} (Figura 2.)

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\mathbf{k}$$

Então, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

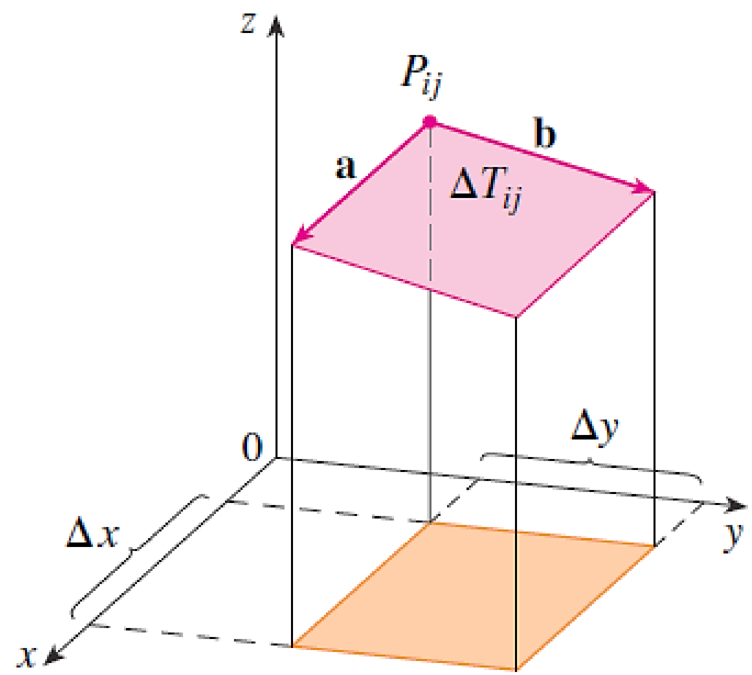


FIGURA 2

Área de superfícies

Para encontrar uma fórmula mais conveniente para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} (Figura 2.)

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\mathbf{k}$$

Então, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix}$$

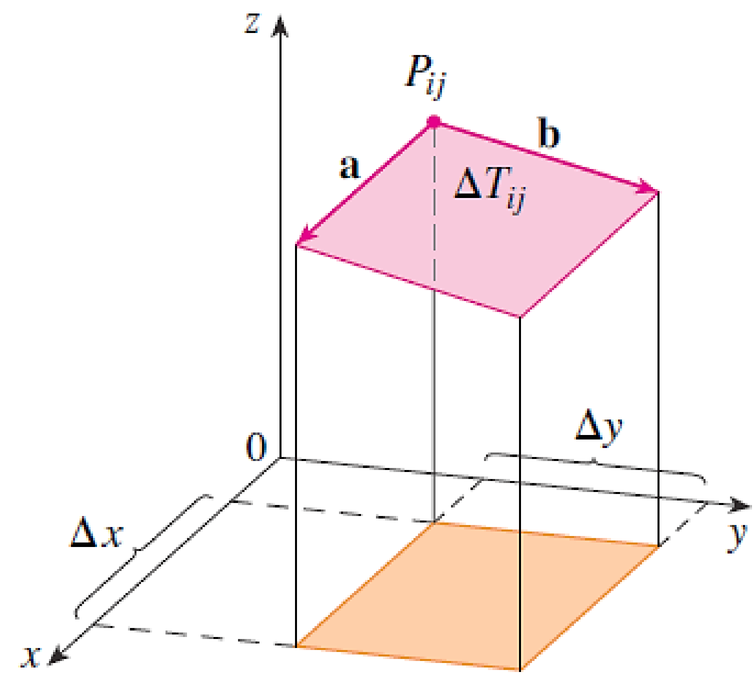


FIGURA 2

Área de superfícies

Para encontrar uma fórmula mais conveniente para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} (Figura 2.)

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\mathbf{k}$$

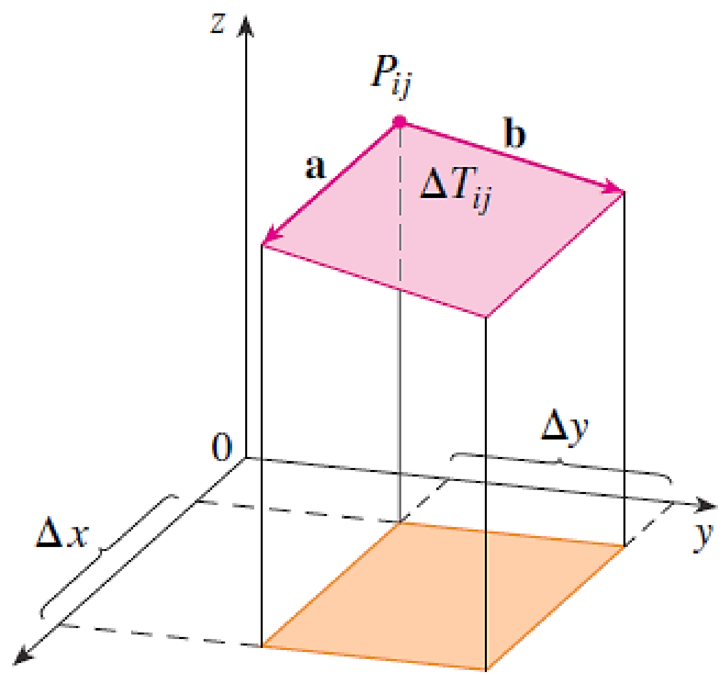


FIGURA 2

Então, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix}$$

$$= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{i}$$

$$- f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\mathbf{k}$$

Área de superfícies

Para encontrar uma fórmula mais conveniente para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} (Figura 2.)

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\mathbf{k}$$

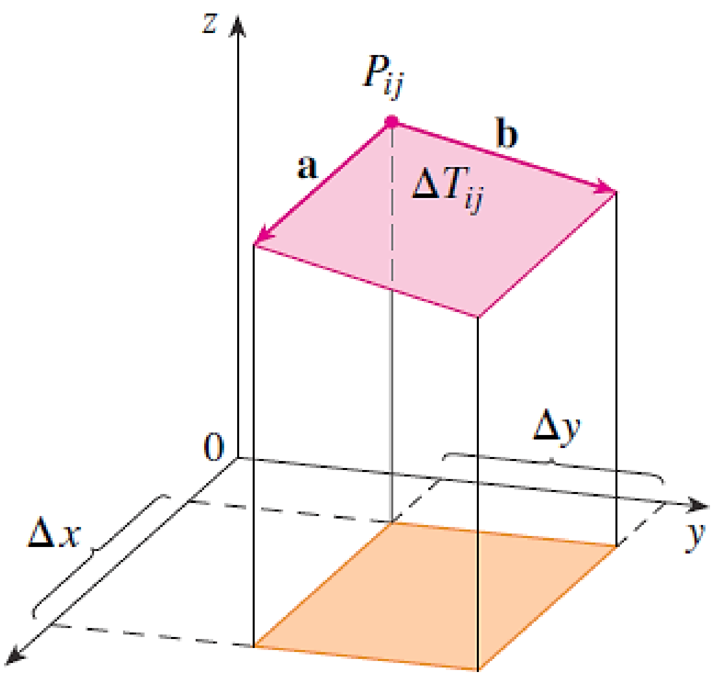


FIGURA 2

Então, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix}$$

$$= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A$$

Área de superfícies

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A$$

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Área de superfícies

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A$$

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\ \Delta A$$

Área de superfícies

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A$$

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\ \Delta A$$

Da Definição 1 temos, então,

$$A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

Área de superfícies

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A$$

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\, \Delta A$$

Da Definição 1 temos, então,

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\, \Delta A \end{aligned}$$

Área de superfícies

A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\, dA$$

Área de superfícies

A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\, dA$$

Se usarmos a notação alternativa para derivadas parciais, podemos reescrever da seguinte maneira:

$$A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 2

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Área de superfícies

Exemplo 2

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

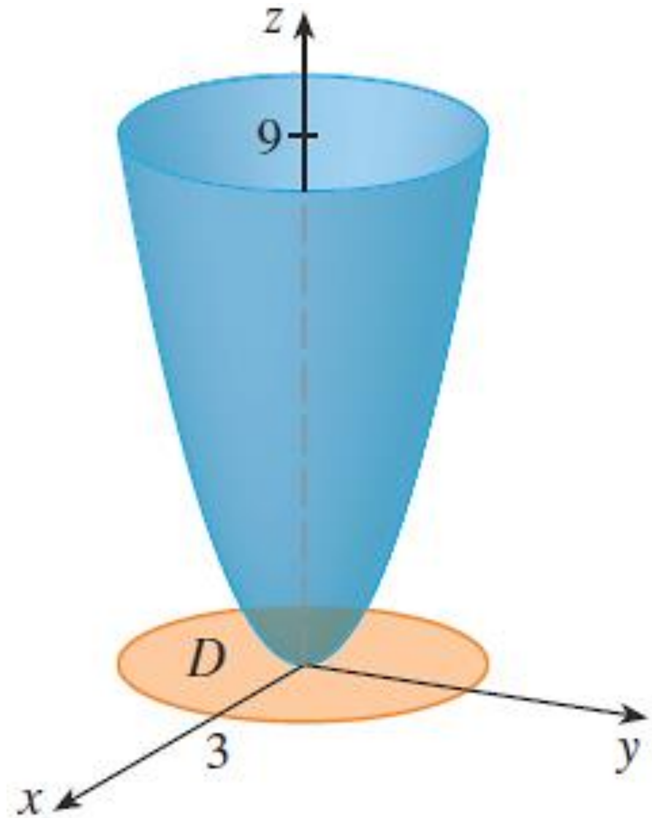


FIGURA 5

Solução:

O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3.

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

Área de superfícies

Exemplo 2

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.5 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

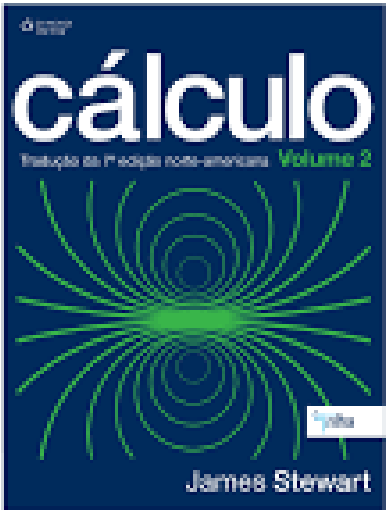
Próxima aula:

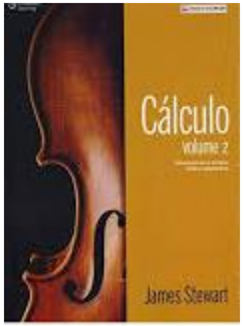
- Integrais triplas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br