Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 10 - Aula 1
Integrais Triplas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Integrais triplas

- O caso mais simples da integral tripla ocorre quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

- A caixa B é subdividida em lmn subcaixas.

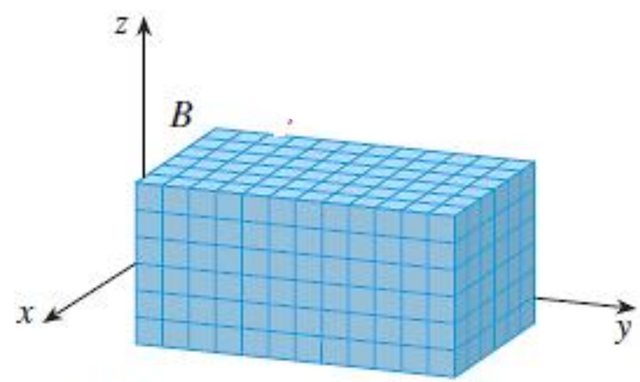


FIGURA 1

Integrais triplas

- O caso mais simples da integral tripla ocorre quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

- A caixa B é subdividida em lmn subcaixas.
- Cada subcaixa tem volume: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

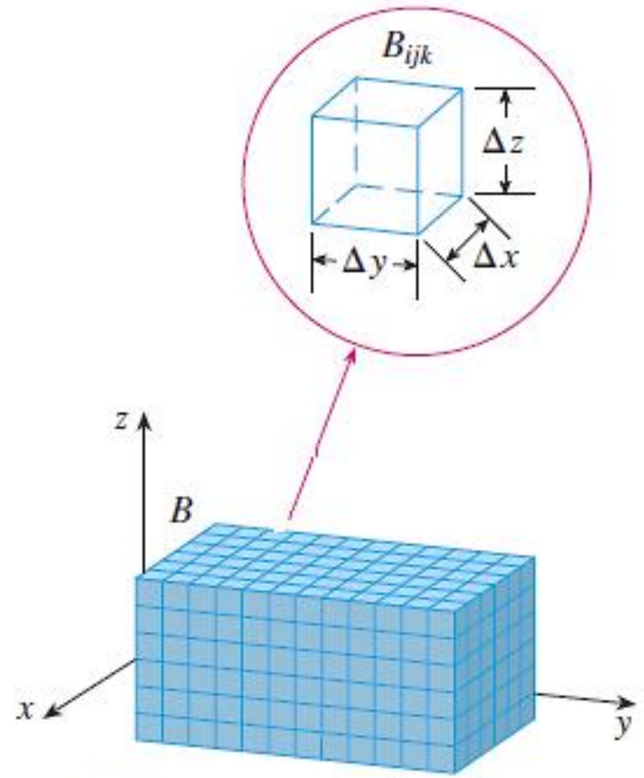


FIGURA 1

Integrais triplas

- O caso mais simples da integral tripla ocorre quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

- A caixa B é subdividida em lmn subcaixas.
- Cada subcaixa tem volume: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.
- A soma tripla de Riemann é:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*})\, \Delta V$$

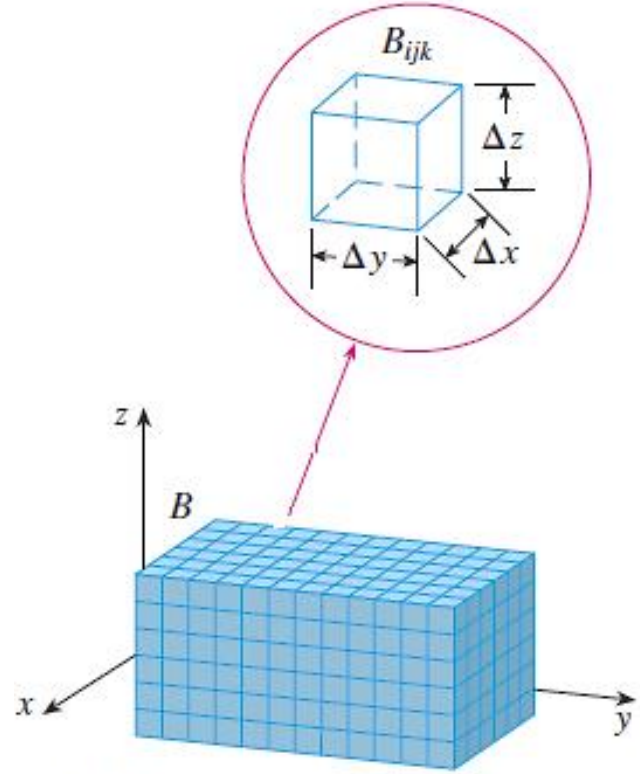


FIGURA 1

Definição de integrais triplas

A **integral tripla** de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,\, m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

se esse limite existir, a integral tripla sempre existe se f for contínua.

Definição de integrais triplas

A **integral tripla** de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,\, m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

se esse limite existir, a integral tripla sempre existe se f for contínua.

Teorema de Fubini para as integrais triplas

Se f é contínua em uma caixa retangular

$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Integrais triplas

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

Integrais triplas

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

Solução:

$$\iiint\limits_B xyz^2\,dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz$$

Integrais triplas

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

Solução:

$$\iiint_B xyz^2\,dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz$$

Integrais triplas

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

Solução:

$$\iiint_B xyz^2\,dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy\,dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

Integrais triplas

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

Solução:

$$\iiint\limits_B xyz^2\,dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy\,dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\,dz = \frac{z^3}{4}\Bigg]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Integrais triplas em regiões sólidas **Tipo 1**

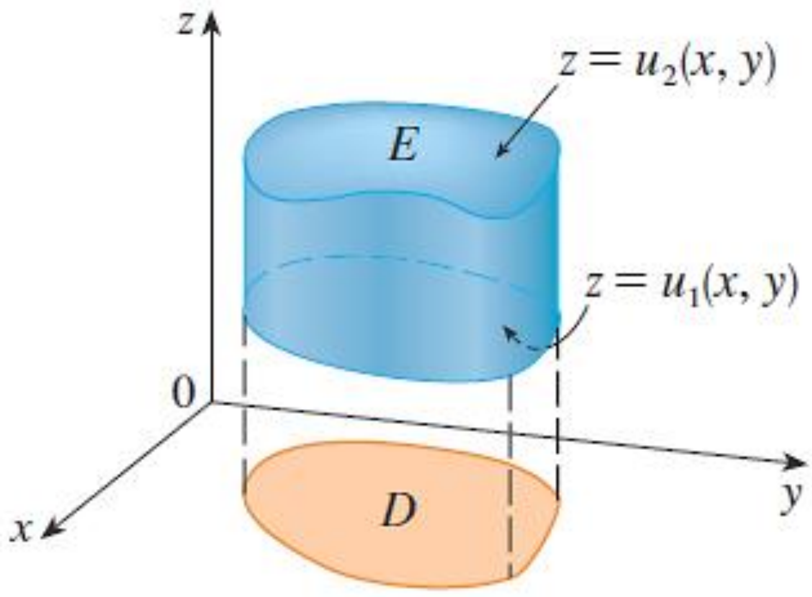


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

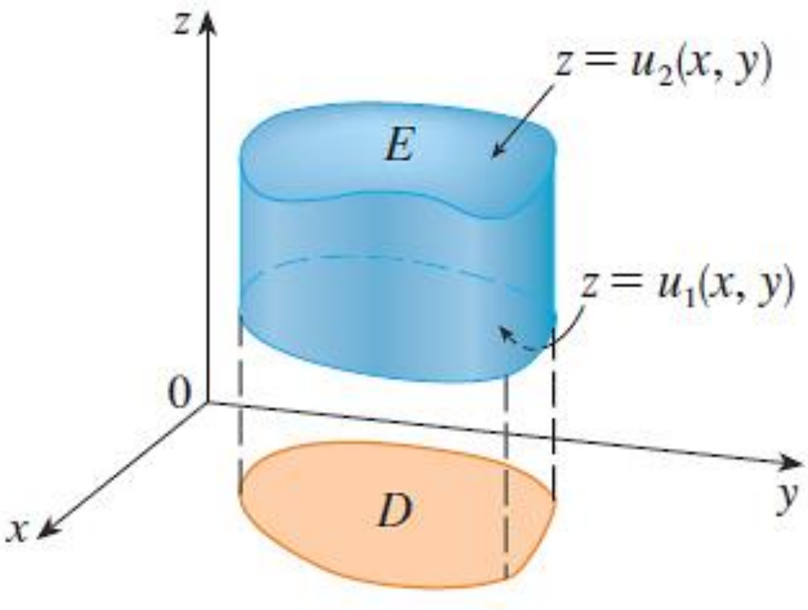


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y.
- D é a projeção de E sobre o plano $\boldsymbol{xy}$ (Figura 2).
- Os limites superior e inferior são funções.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

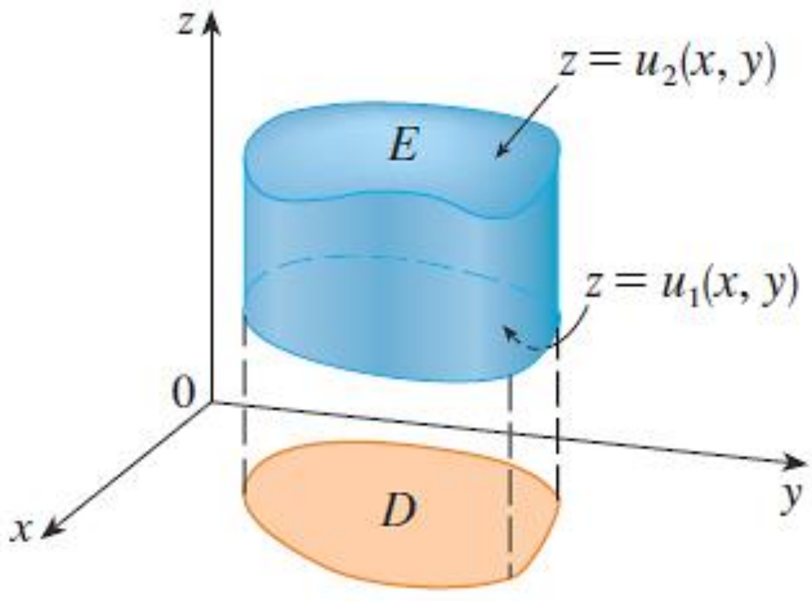


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

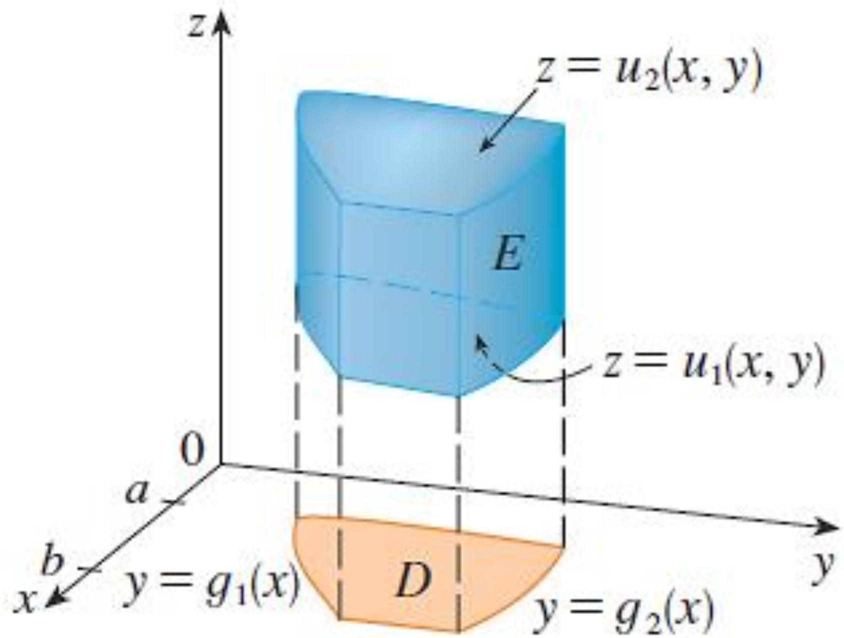
- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y.
- D é a projeção de E sobre o plano $\boldsymbol{xy}$ (Figura 2).
- Os limites superior e inferior são funções.

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

Caso particular I.

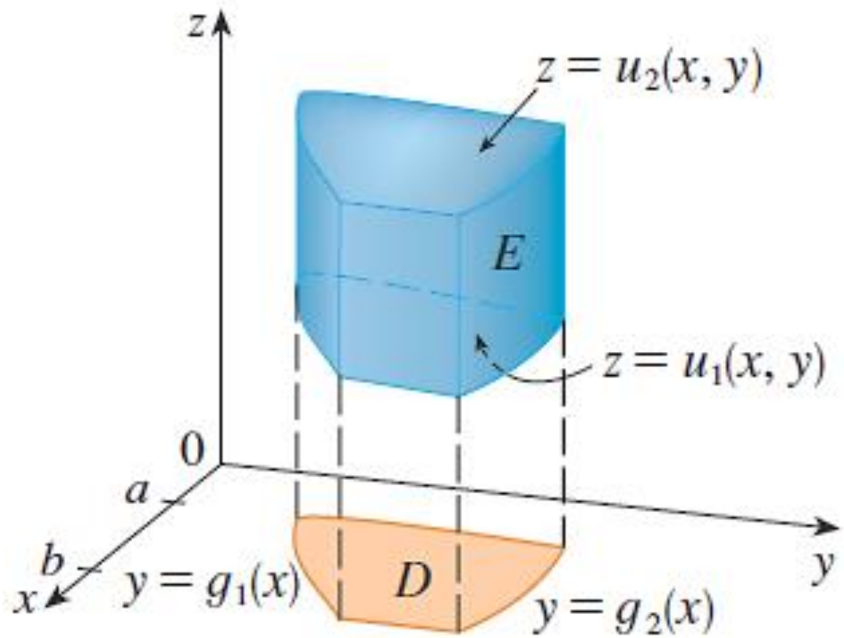


$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

FIGURA 3
Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

Caso particular I.



$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

FIGURA 3

Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

Caso particular II.

$$E = \left\{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\right\}$$

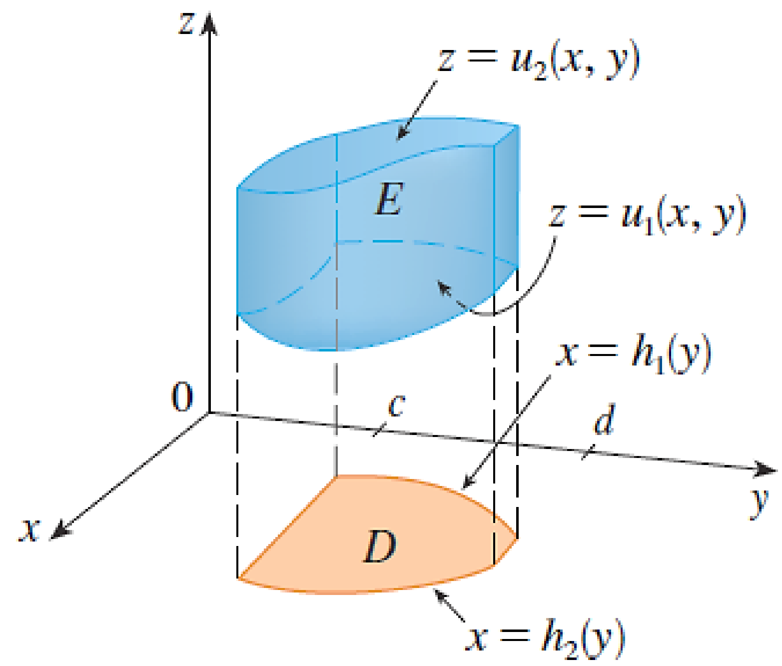


FIGURA 4
Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 1

Caso particular II.

$$E = \left\{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\; h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\; u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\right\}$$

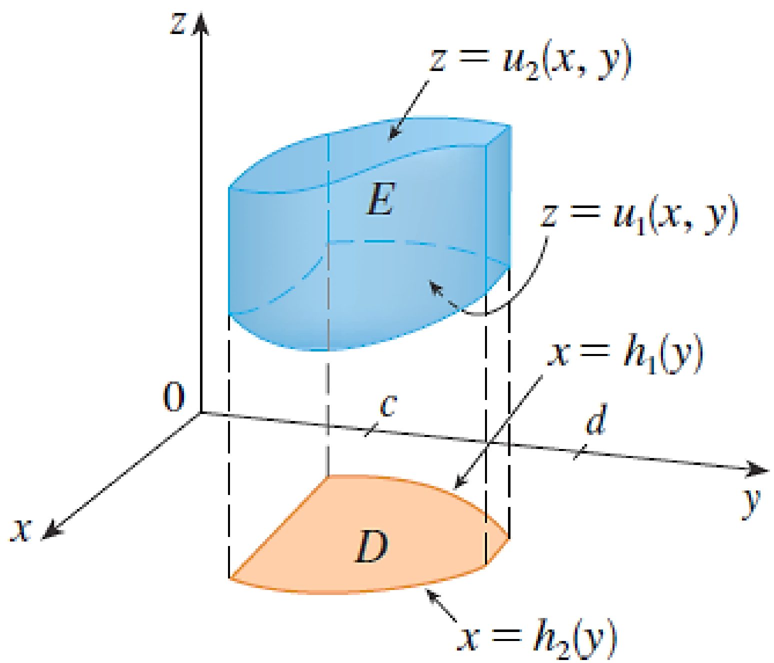


FIGURA 4
Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 2

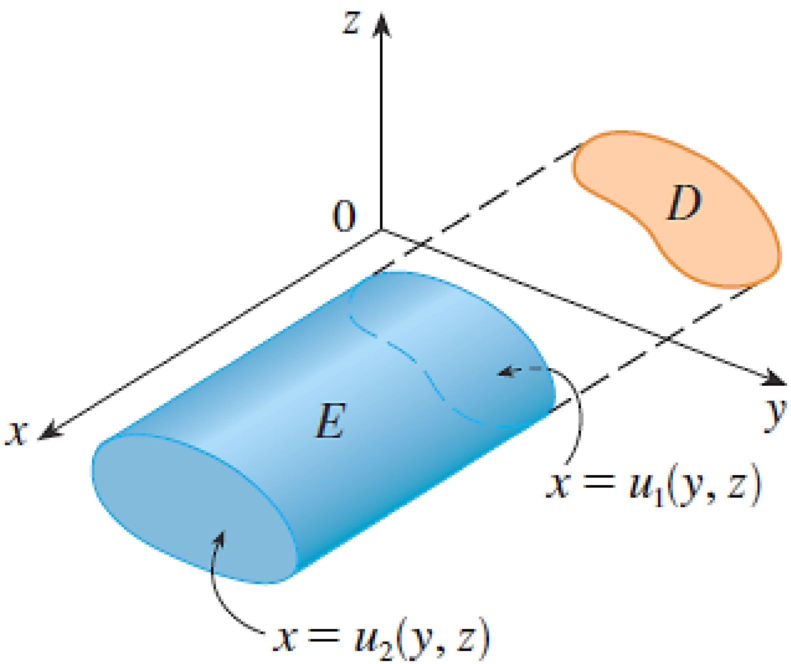


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de y e z.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 2

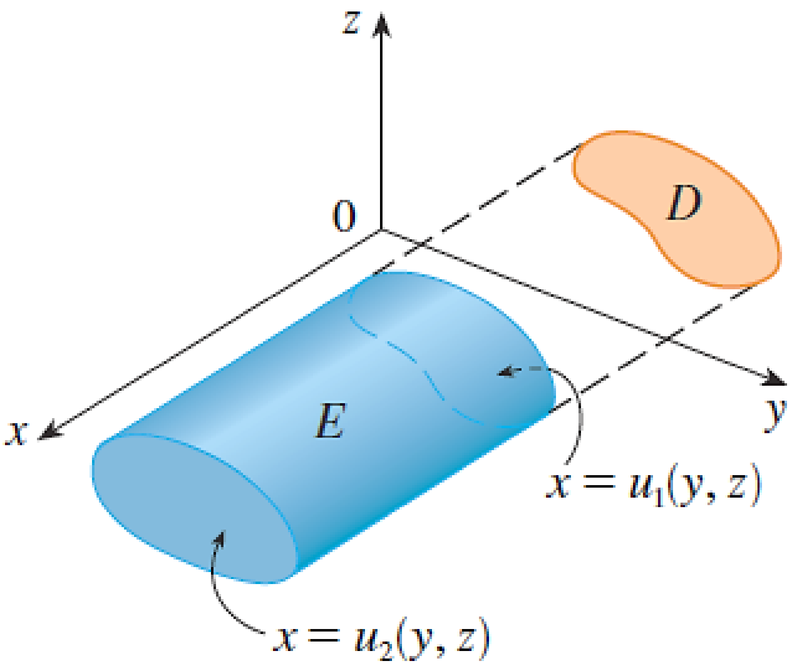


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de y e z.
- D é a projeção de E sobre o plano zy (Figura 7).
- Os limites da frente e de trás são funções.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 2

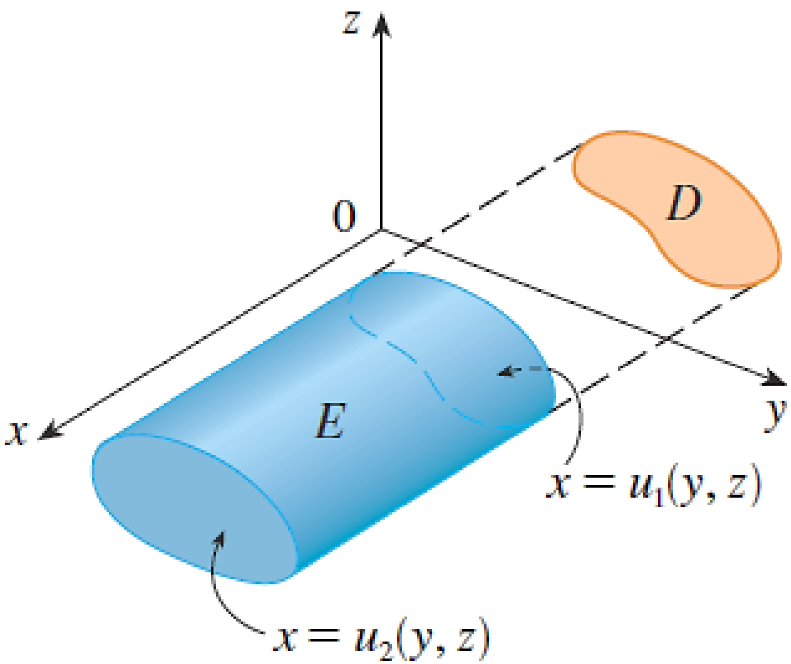


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de y e z.
- D é a projeção de E sobre o plano zy (Figura 7).
- Os limites da frente e de trás são funções.

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 3

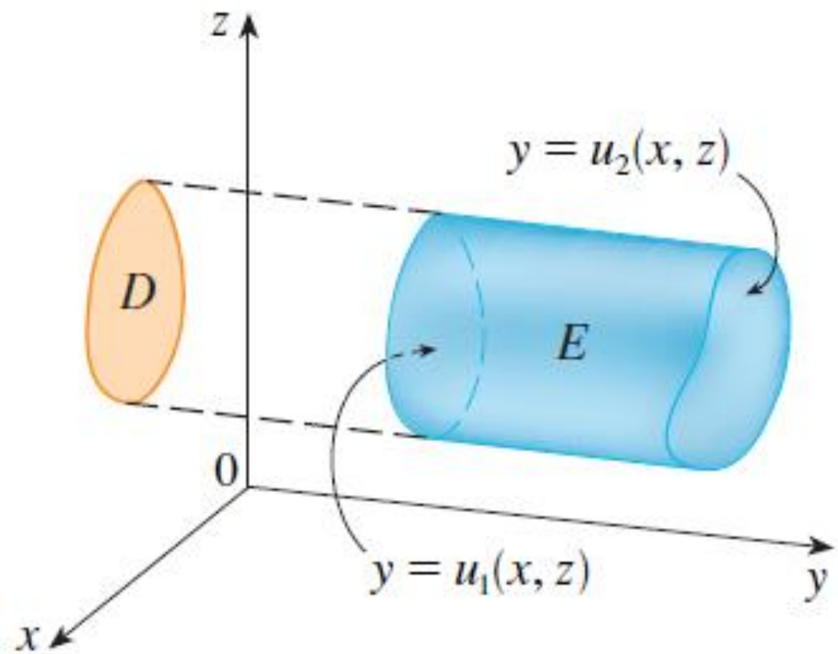


FIGURA 8

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e z.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 3

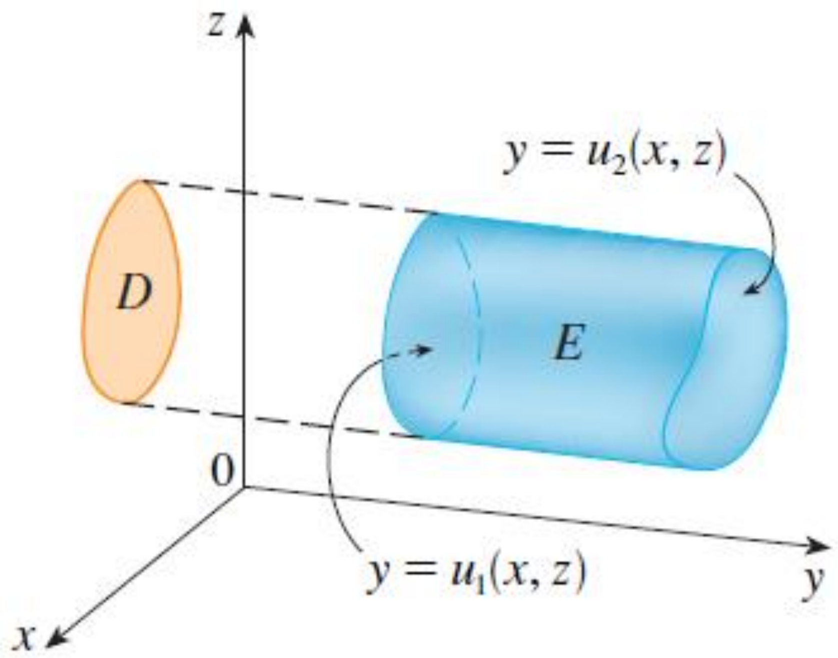


FIGURA 8

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e z.
- D é a projeção de E sobre o plano $\boldsymbol{xz}$ (Figura 8).
- Os limites da esquerda da direita são funções.

Integrais triplas em regiões sólidas Tipo 3

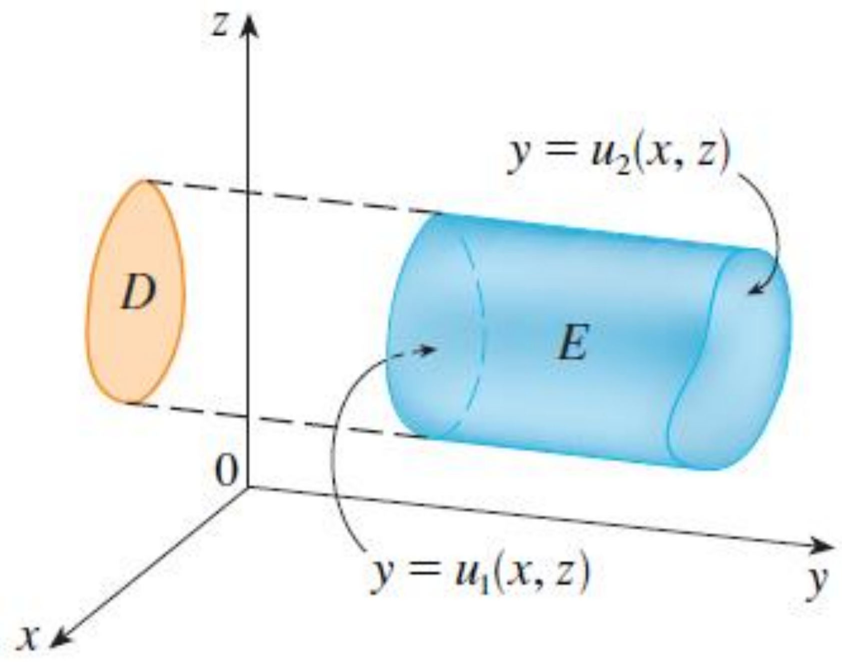


FIGURA 8

- Contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e z.
- D é a projeção de E sobre o plano $\boldsymbol{xz}$ (Figura 8).
- Os limites da esquerda da direita são funções.

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

Exemplo 2

Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

Integrais triplas

Exemplo 2

Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

Solução:

Se olharmos o sólido E na Figura 9 como uma região do tipo 1, sua projeção D_1 sobre o plano xy é a região parabólica

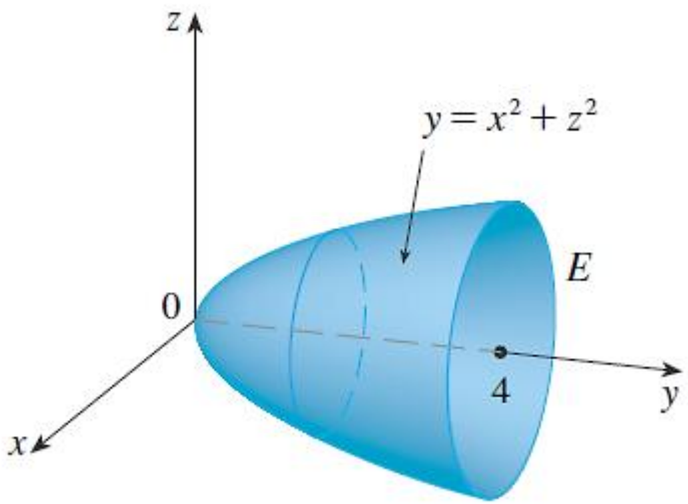


FIGURA 9 Região de integração

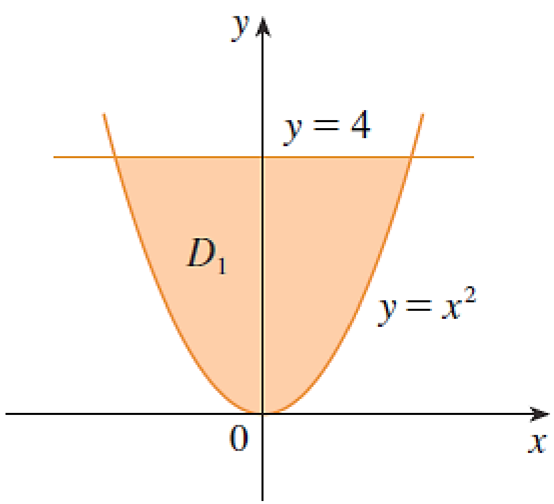


FIGURA 10 Projeção sobre o plano-xy

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, Portanto, E como região do tipo 1 é

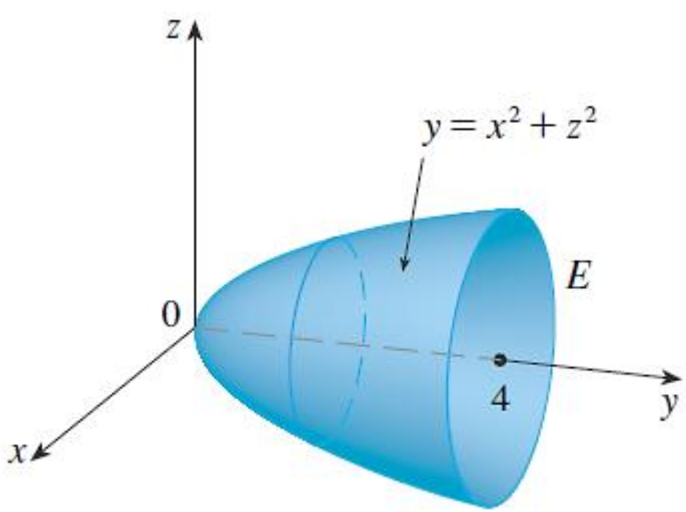


FIGURA 9 Região de integração

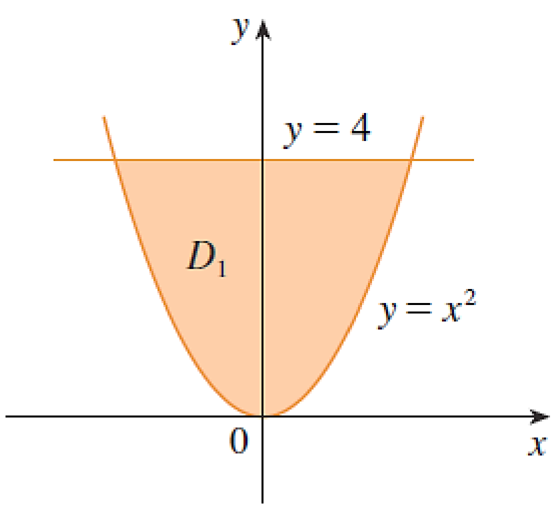


FIGURA 10 Projeção sobre o plano-xy

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, Portanto, E como região do tipo 1 é

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\}$$

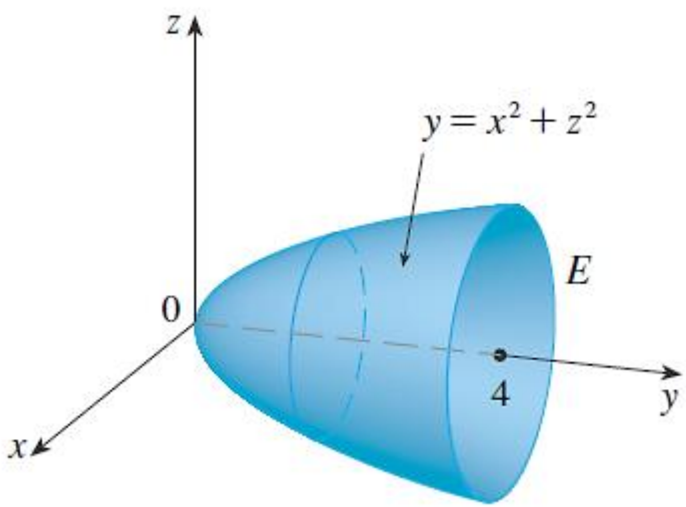


FIGURA 9 Região de integração

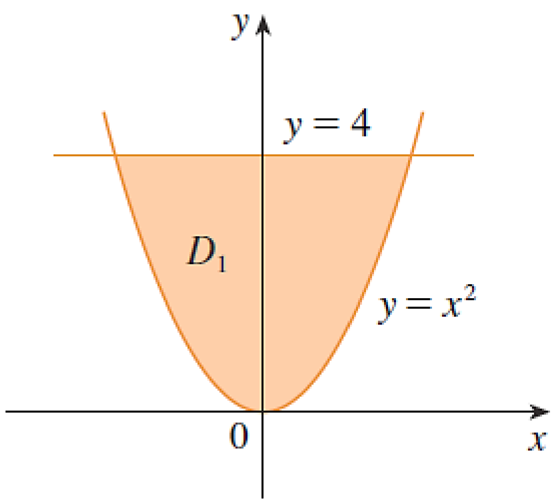


FIGURA 10 Projeção sobre o plano-xy

Exemplo 2 - solução

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, Portanto, E como região do tipo 1 é

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\right\}$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y - x^2}}^{\sqrt{y - x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

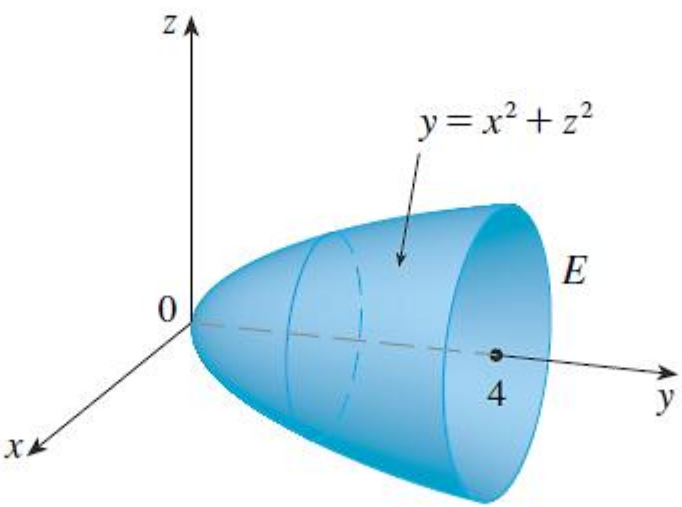


FIGURA 9 Região de integração

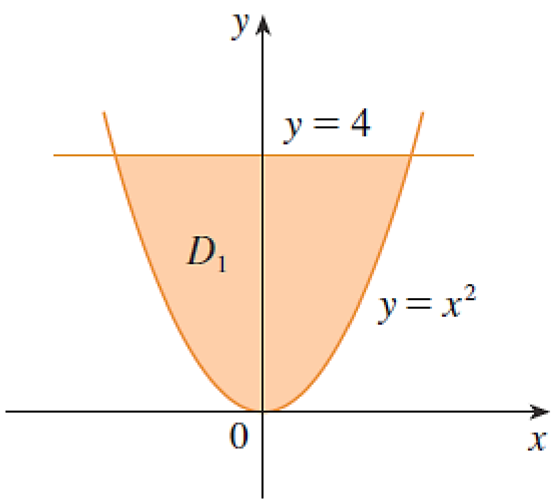


FIGURA 10 Projeção sobre o plano-xy

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Então, em vez disso, vamos considerar E como a região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco

$$x^2 + z^2 \leqslant 4$$

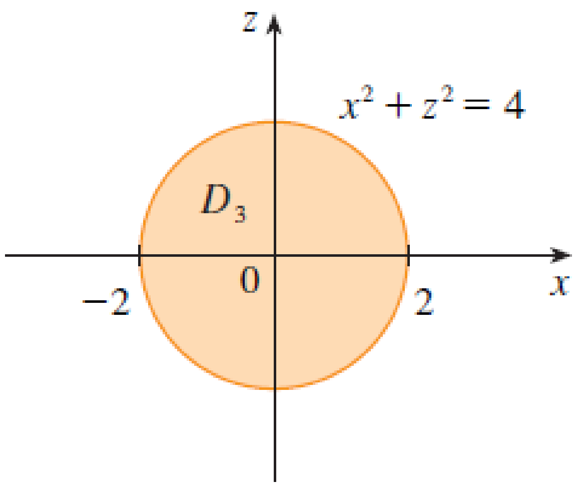


FIGURA 11 Projeção sobre o plano-xz

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Então, em vez disso, vamos considerar E como a região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco

$$x^2 + z^2 \leqslant 4$$

Então, a superfície lateral esquerda de E é o paraboloide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$.

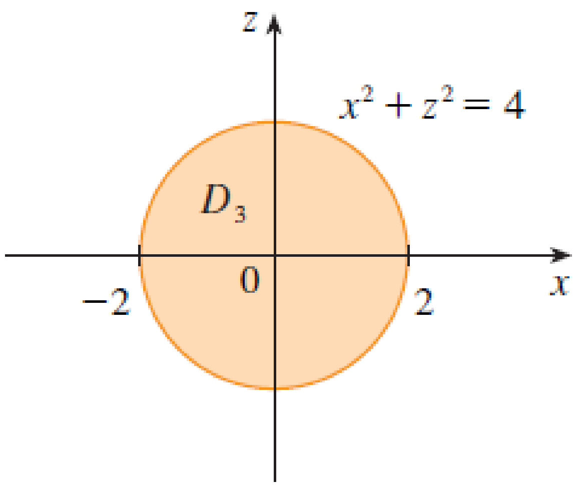


FIGURA 11 Projeção sobre o plano-xz

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Então, em vez disso, vamos considerar E como a região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco

$$x^2 + z^2 \leqslant 4$$

Então, a superfície lateral esquerda de E é o paraboloide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$.

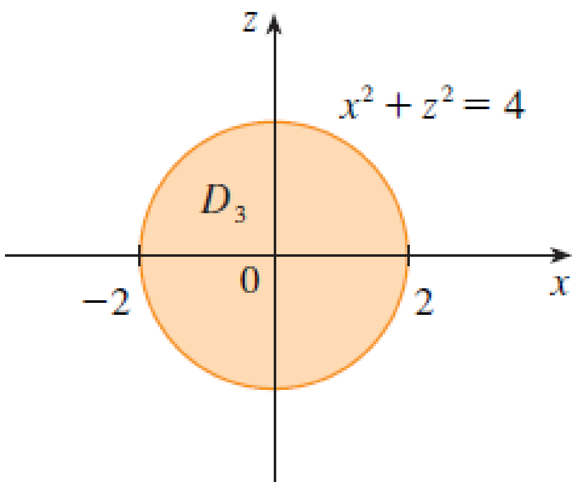


FIGURA 11 Projeção sobre o plano-xz

Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz:

$$x = r\cos\theta, \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Exemplo 2 - solução

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz:

$$x = r\cos\theta, \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$ Isso fornece

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz:

$$x = r\cos\theta, \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \qquad \text{Isso fornece}$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

Integrais triplas

Exemplo 2 - solução

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz:

$$x = r\cos\theta, \qquad z = r\,\text{sen}\,\theta.$$ Isso fornece

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$

Aplicações de integrais triplas

- A integral tripla pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e *f* (x, y, z).

Aplicações de integrais triplas

- A integral tripla pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e *f* (x, y, z).

No caso especial onde *f* (x, y, z) = 1 para todos os pontos de E a integral tripla representa o volume de E.

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Integrais triplas

Exemplo 3

Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Integrais triplas

Exemplo 3

Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Solução:

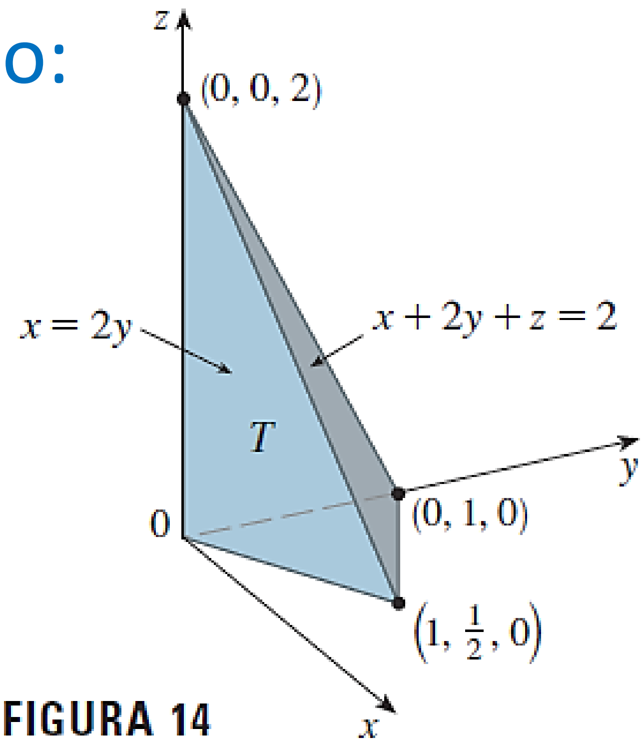


FIGURA 14

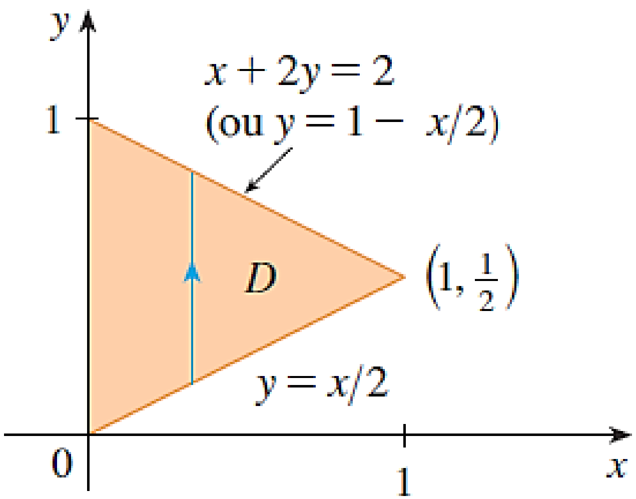


FIGURA 15

Integrais triplas

Exemplo 3

Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Solução:

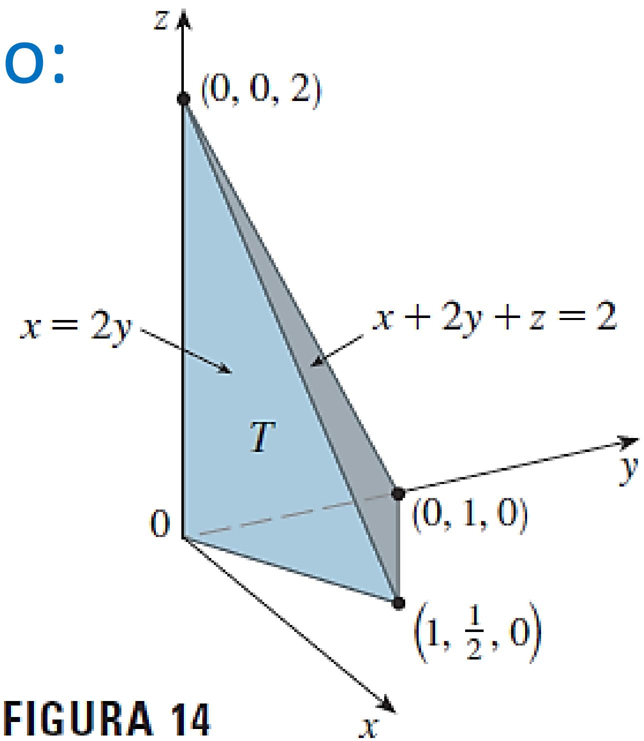


FIGURA 14

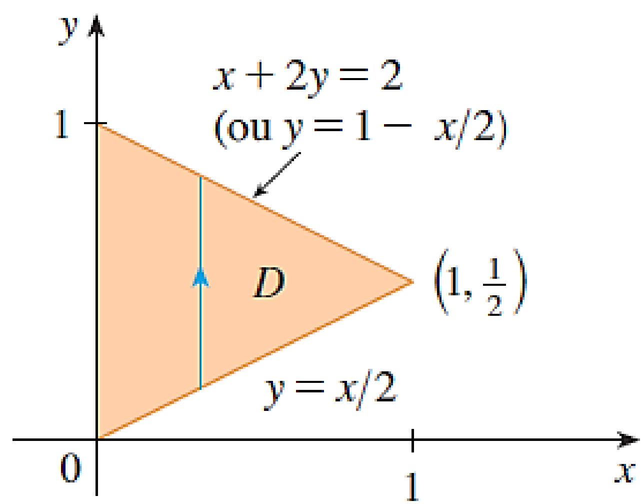


FIGURA 15

O limite inferior de T é o plano $z = 0$ e o limite superior é o plano $x + 2y + z = 2$, isto é, $z = 2 - x - 2y$.

Exemplo 3 - solução

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

Integrais triplas

Exemplo 3 - solução

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

Exemplo 3 - solução

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

Exemplo 3 - solução

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

Integrais triplas

Exemplo 3 - solução

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Aplicações de integrais triplas

- Todas as aplicações de integrais duplas podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas.

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

massa

Aplicações de integrais triplas

- Todas as aplicações de integrais duplas podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas.

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

massa

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

momentos em relação aos três planos coordenados

Aplicações de integrais triplas

- Todas as aplicações de integrais duplas podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas.

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

massa

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

momentos em relação aos três planos coordenados

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

centro de massa

Aplicações de integrais triplas

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados

Aplicações de integrais triplas

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

carga **elétrica total**

Aplicações de integrais triplas

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

momentos de inércia
em relação aos três eixos coordenados

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

carga **elétrica total**

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

função densidade conjunta

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = 1$$

Para depois desta aula:

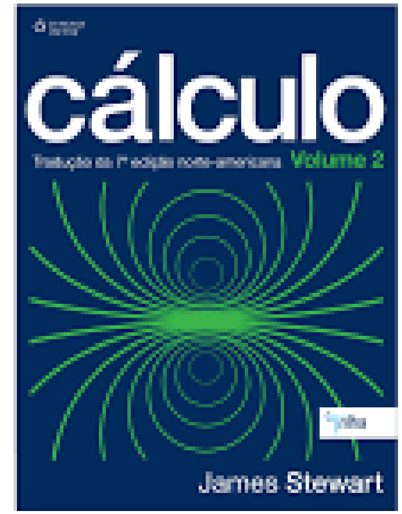
- Estudar seção 15.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

Próxima aula:

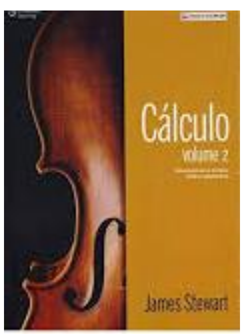
- Integrais Triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.



Numeração dos exercícios
com base na 7ª ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br