Cálculo I

Licenciatura

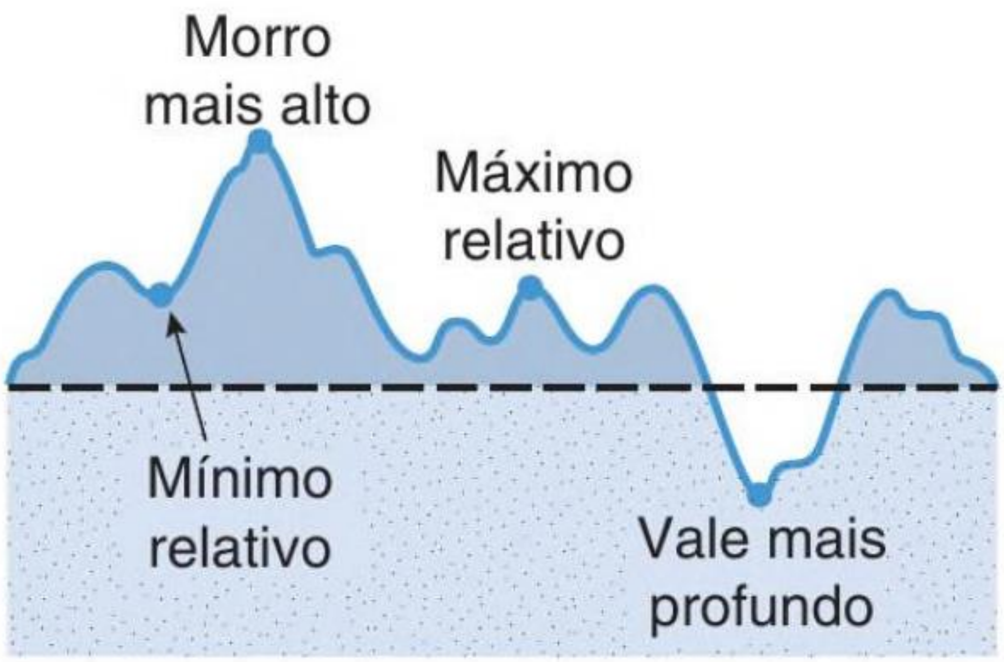
Semana 10 - Aula 1
Máximos e mínimos de uma função

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

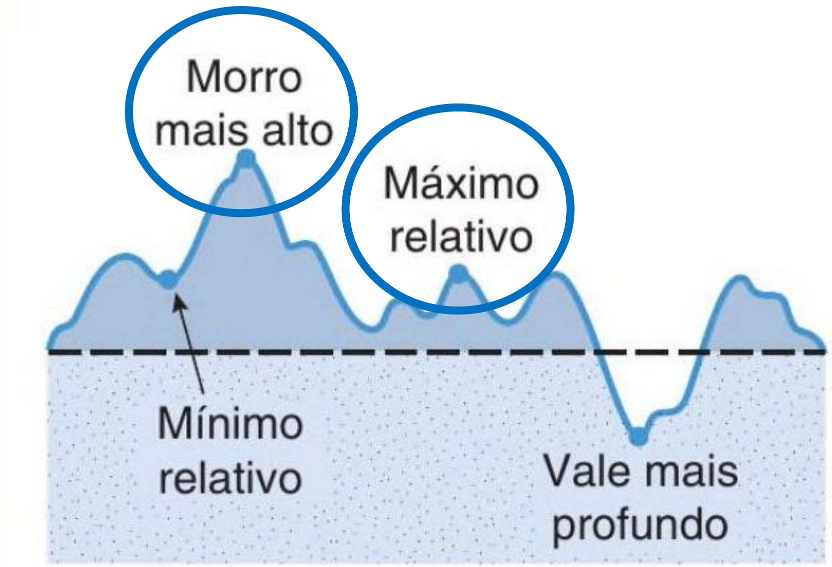
5.2 – Máximos e mínimos relativos

- ✓ Imaginemos o gráfico de uma função como um cordilheira de montanhas;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

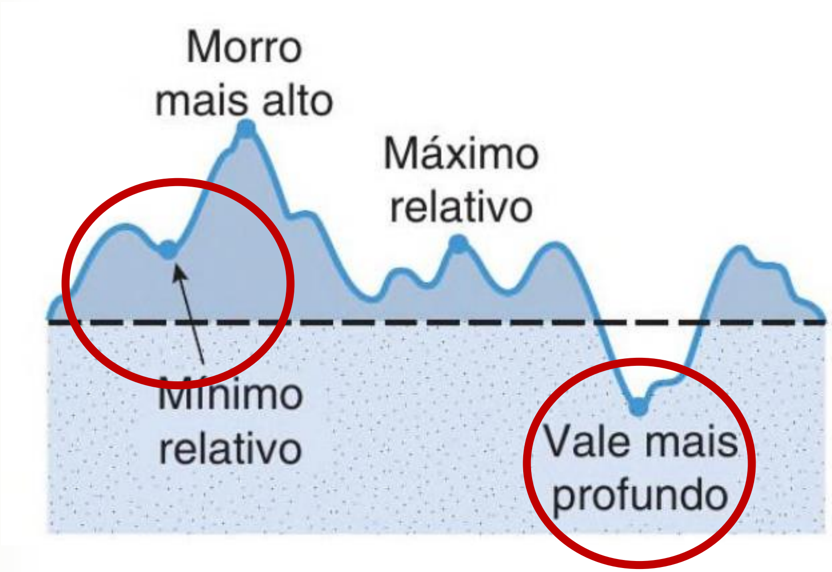
5.2 – Máximos e mínimos relativos



- ✓ Morros são chamados de máximos;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

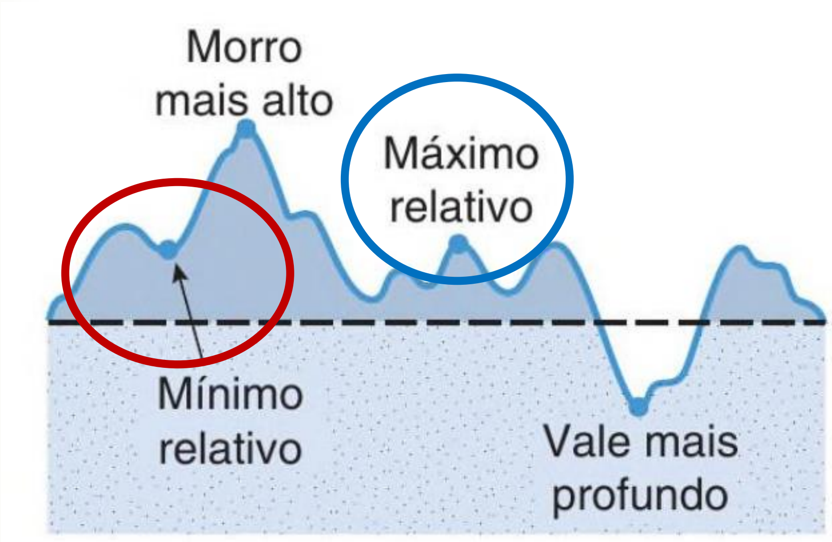
5.2 – Máximos e mínimos relativos



- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5.2 – Máximos e mínimos relativos



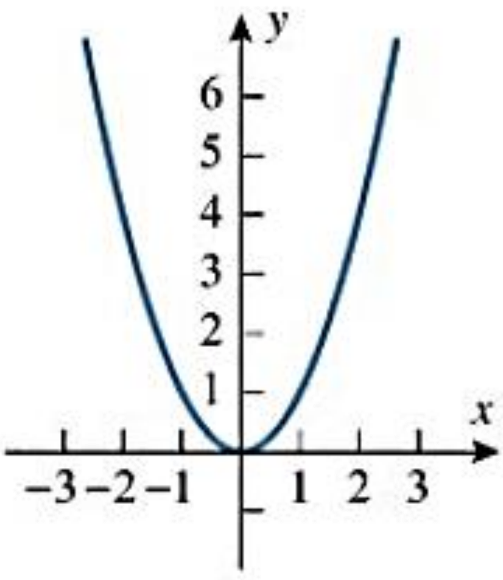
- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;
- ✓ Ambos, máximos e mínimos, são relativos quando analisados em uma vizinhança.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5.2 – Máximos e mínimos relativos

4.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f tem um ***máximo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ em cada x no intervalo. Analogamente, diz-se que f tem um ***mínimo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ em cada x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0, diz-se que f tem um ***extremo relativo*** em x_0.

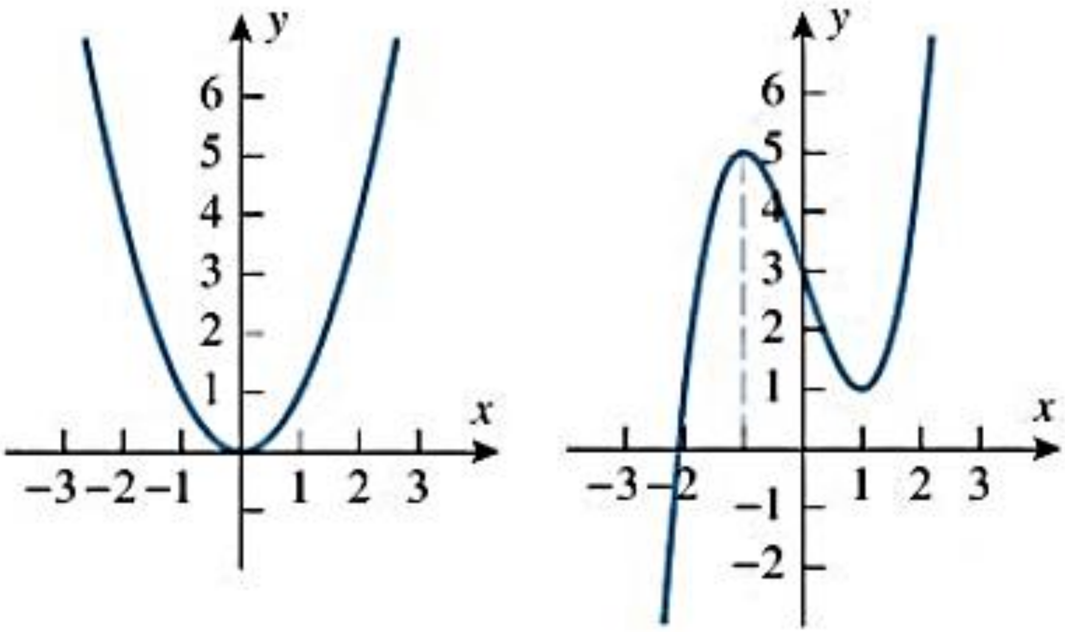
Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções



$$\boxed{y = x^2}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

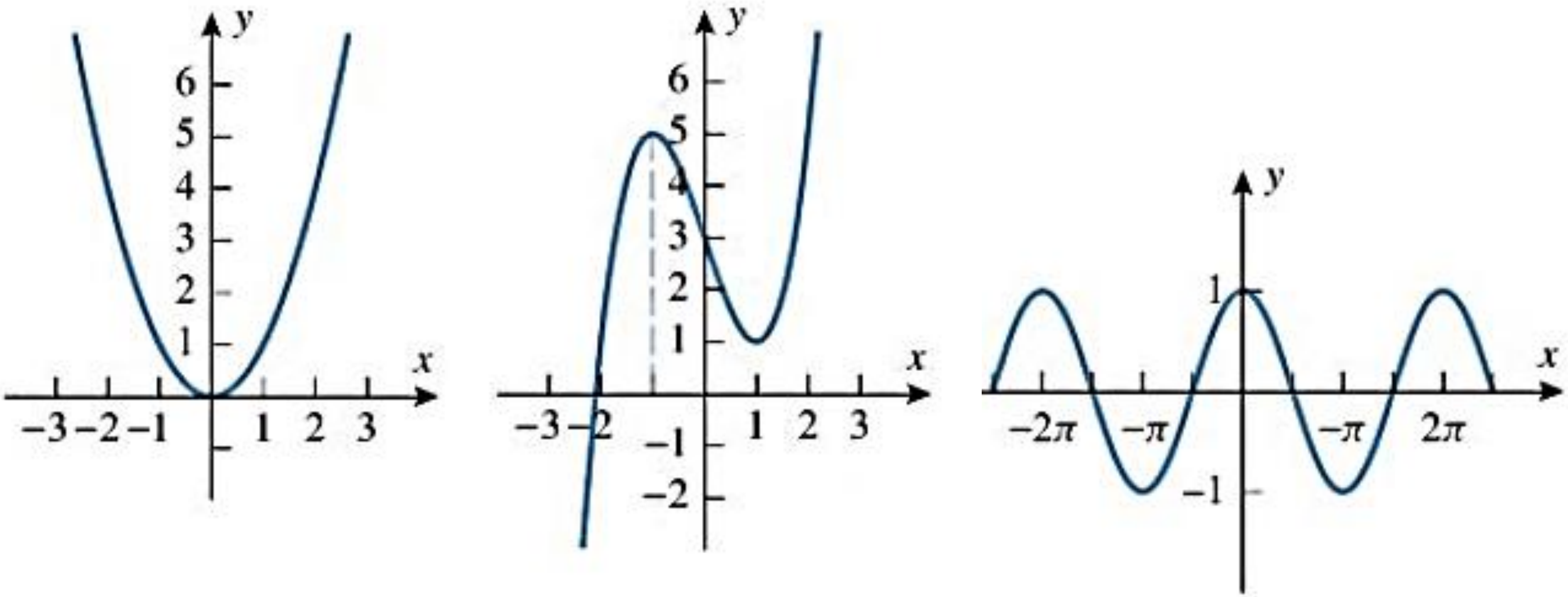
Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções



$y = x^2$ $\qquad$ $y = x^3 - 3x + 3$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções

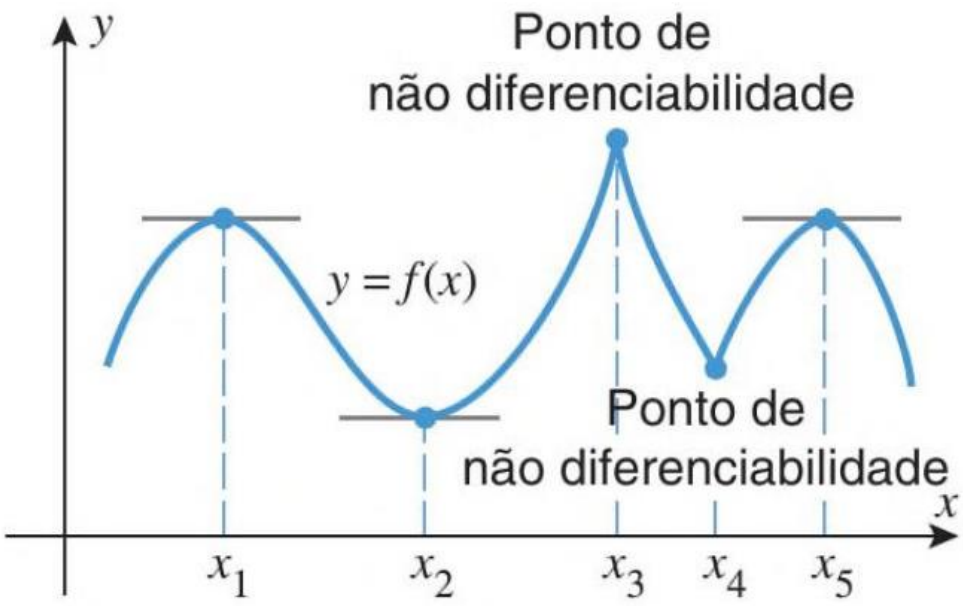


Nas três funções, ocorrem extremos relativos no pontos em que a reta tangente é horizontal.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

- ✓ Um extremo relativo pode ocorrer também em um ponto em que a função não é diferenciável.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

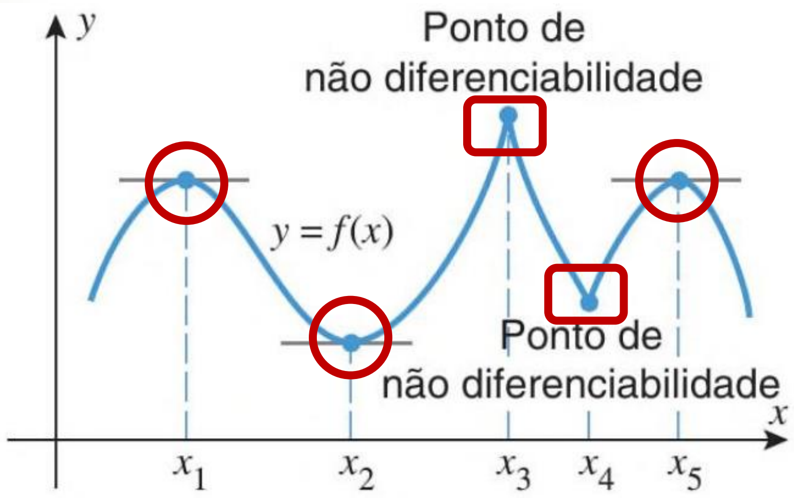


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

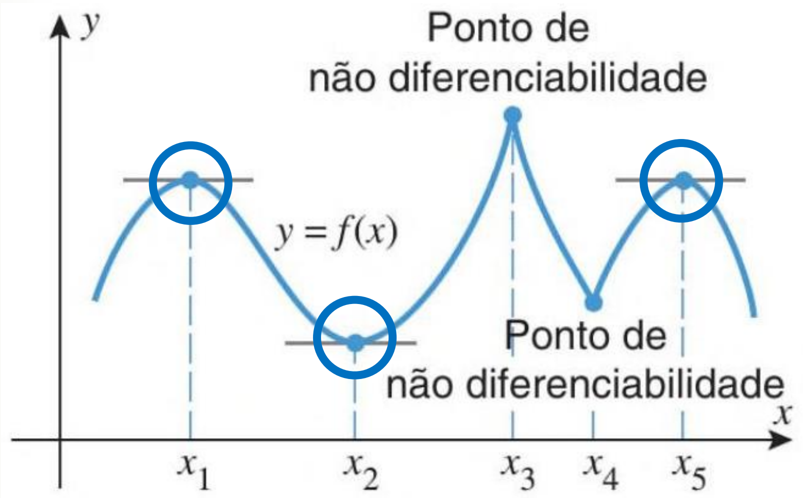


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;
- ✓ **Ponto estacionário**: f tem reta tangente horizontal.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

4.2.2 TEOREMA *Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0. Se f tiver um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ será um ponto crítico de f; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0.*

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

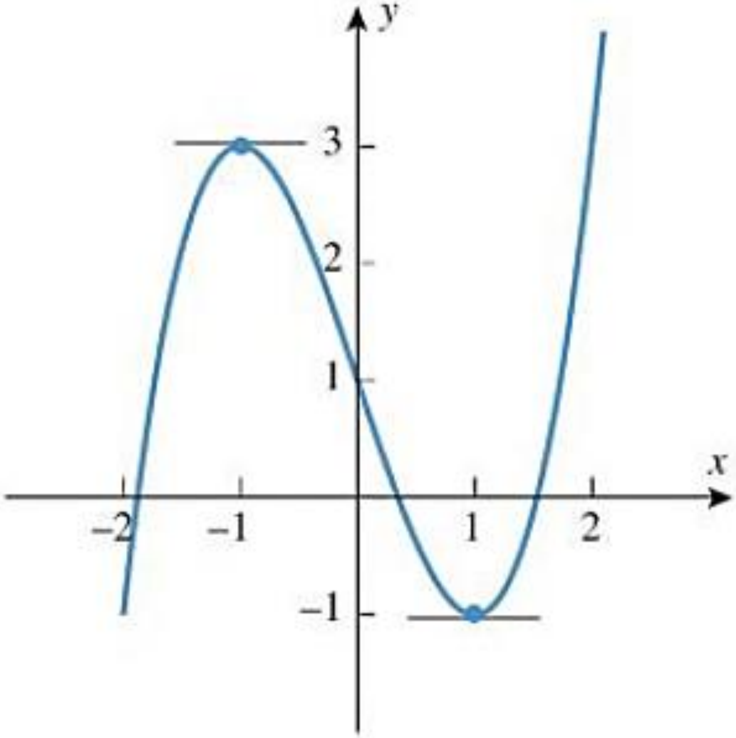
$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

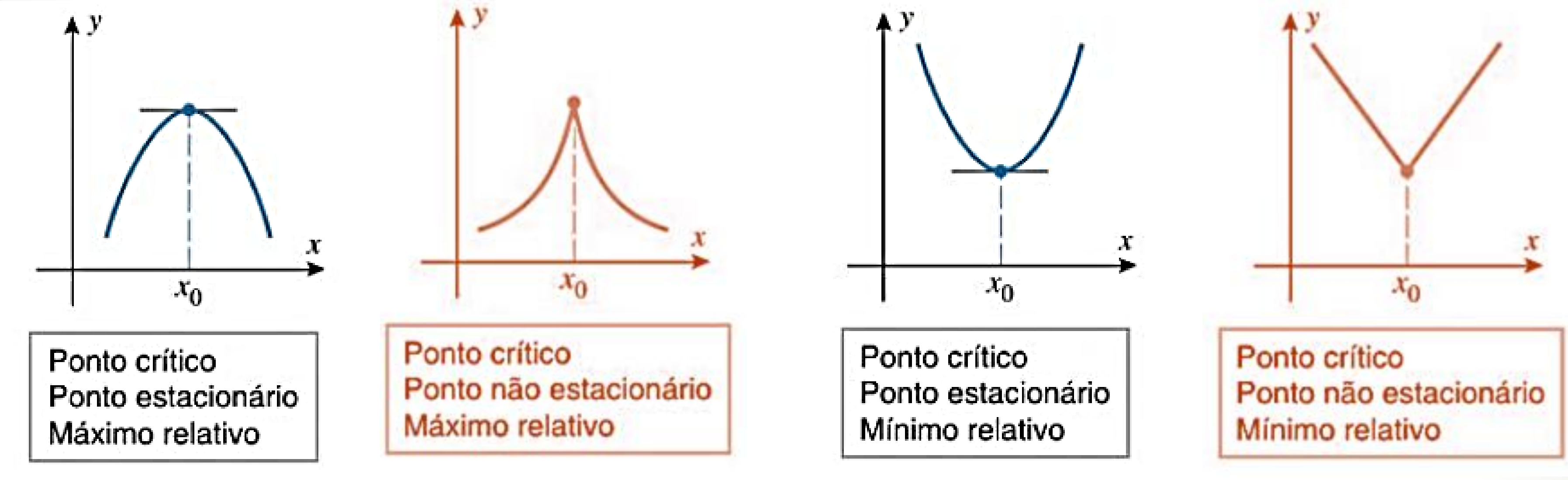
$$x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$$



$y = x^3 - 3x + 1$

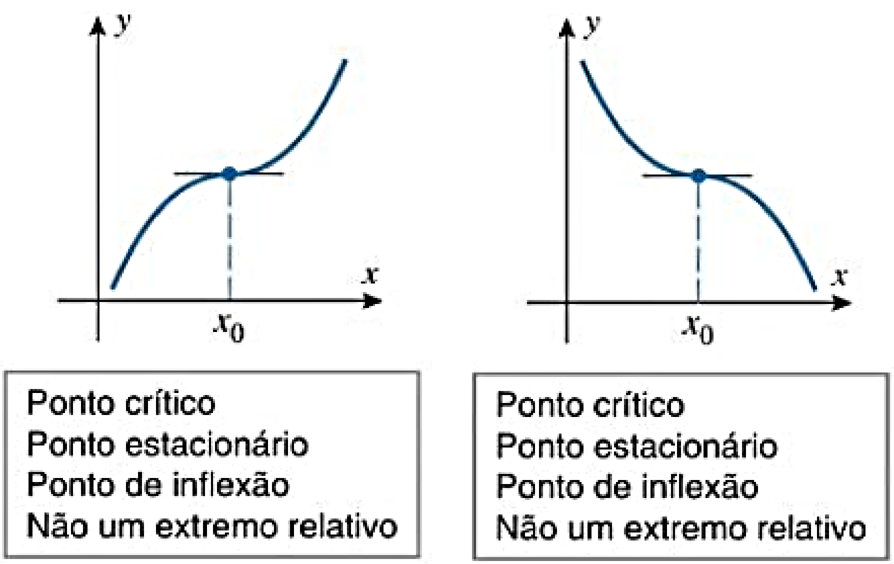
Teste da derivada primeira (f')

- ✓ Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos que f' muda de sinal.



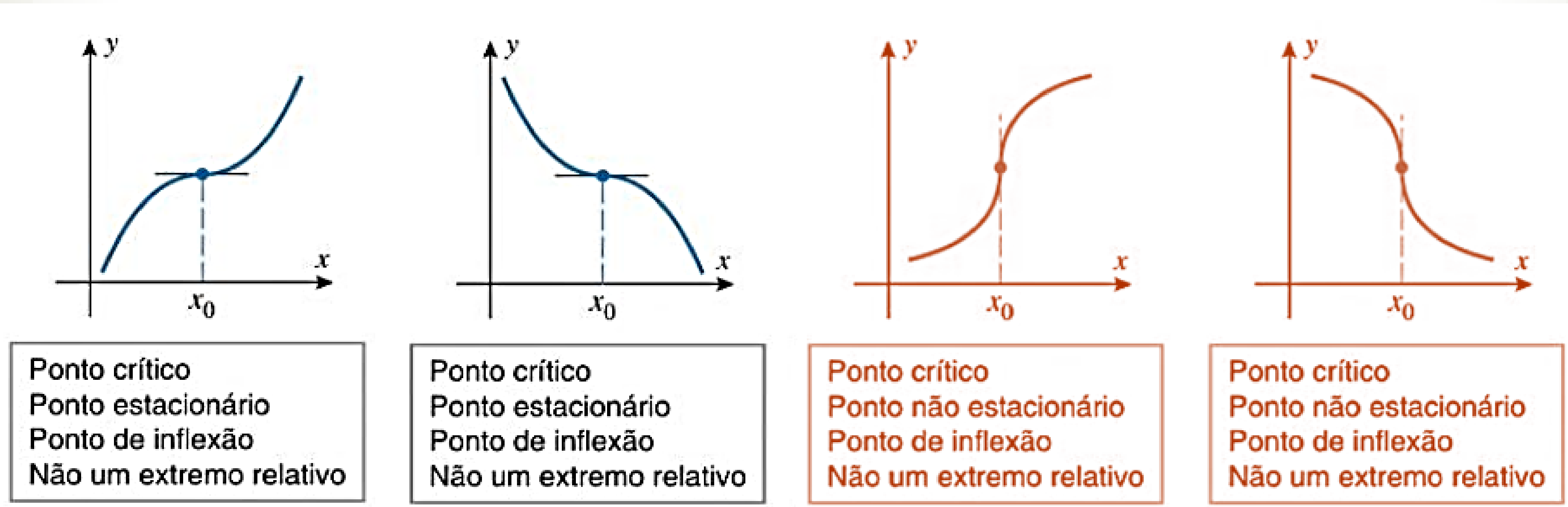
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da derivada primeira (f')



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da derivada primeira (f')



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(*a*) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(a) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(*a*) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(*b*) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(c) *Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f não tem extremo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

O sinal das derivadas na proximidade de x_0 **definem se é um ponto de mínimo ou de máximo.**

- $\boldsymbol{f}$ tem Máximo relativo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e:

$$f'(x) > 0 \quad \forall\ x\ < \boldsymbol{x_o}$$
$$f'(x) < 0 \quad \forall\ x\ > \boldsymbol{x_o}$$

Teste da derivada primeira (f')

O sinal das derivadas na proximidade de x_0 **definem se é um ponto de mínimo ou de máximo.**

- $\boldsymbol{f}$ tem Máximo relativo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e:

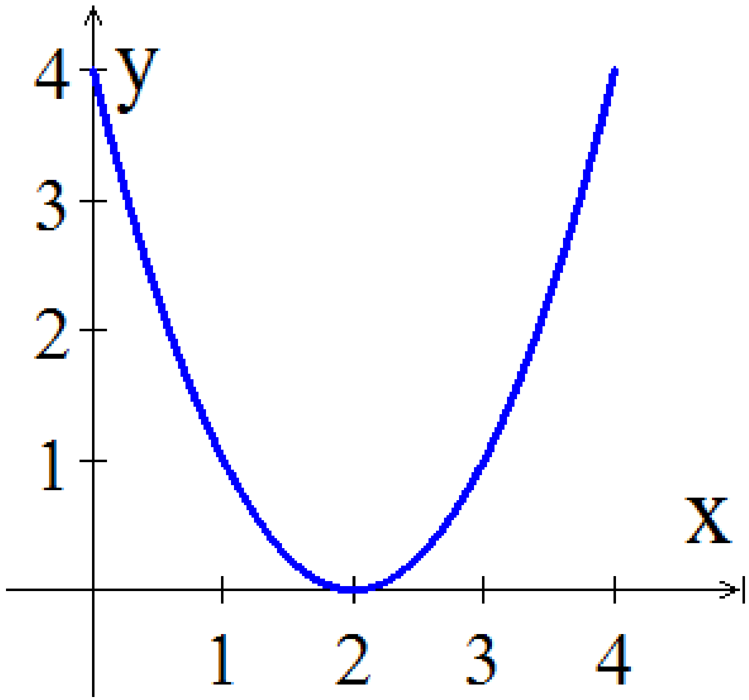
$$f'(x) > 0 \quad \forall\ x\ < \boldsymbol{x_o}$$
$$f'(x) < 0 \quad \forall\ x\ > \boldsymbol{x_o}$$

- $\boldsymbol{f}$ tem mínimo relativo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e :

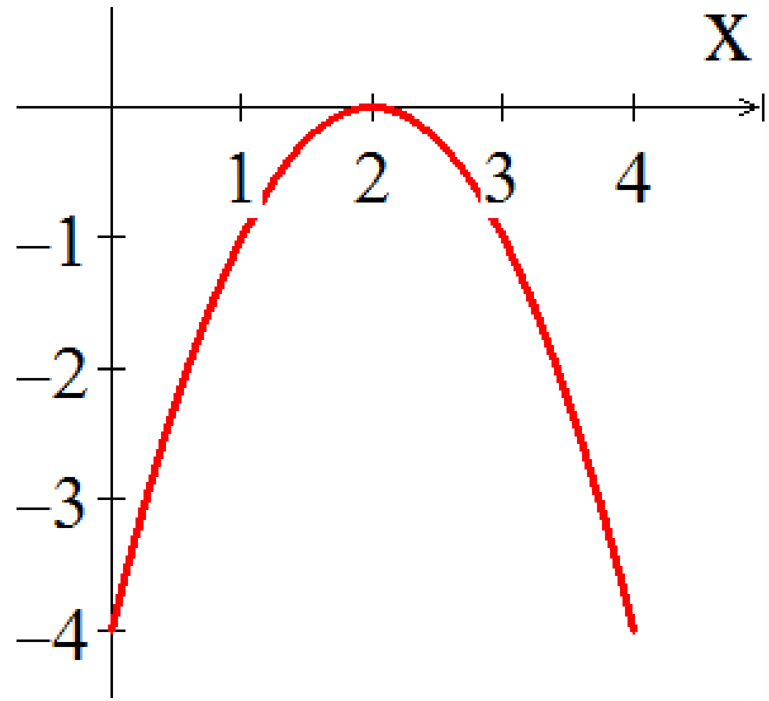
$$f'(x) < 0 \quad \forall\ x\ < \boldsymbol{x_o}$$
$$f'(x) > 0 \quad \forall\ x\ > \boldsymbol{x_o}$$

Exemplo 3

$$y = (x-2)^2$$



$$y = -(x-2)^2$$



$$x_0 = 2 \;\; \rightarrow f'(2) = 0 \;\; \text{(ponto crítico)}$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Teste da derivada primeira

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Teste da derivada primeira

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Teste da derivada primeira

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Teste da derivada primeira

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Teste da derivada primeira

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, x = 0 \quad e \quad x = 1 \quad \textit{Pontos críticos}$$

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$15x^2(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 0 \quad e \quad x = 1$$ *Pontos críticos*

Ponto	Intervalo	Sinal f'(x)	Extremo

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$15x^2(x-1)(x+1)=0$$

$x=-1, x=0$ e $x=1$ *Pontos críticos*

Ponto	Intervalo	Sinal f'(x)	Extremo
$x=-1$	$x<-1$	+	Pto máximo
	$-1<x<0$	−	

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$15x^2(x-1)(x+1)=0$$

$x=-1, x=0 \quad e \quad x=1$ *Pontos críticos*

Ponto	Intervalo	Sinal f'(x)	Extremo
$x=-1$	$x < -1$	+	Pto máximo
	$-1 < x < 0$	–	
$x=0$	$-1 < x < 0$	–	Não há
	$0 < x < 1$	–	

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$15x^2(x-1)(x+1)=0$$

$$x=-1, x=0 \quad e \quad x=1$$ *Pontos críticos*

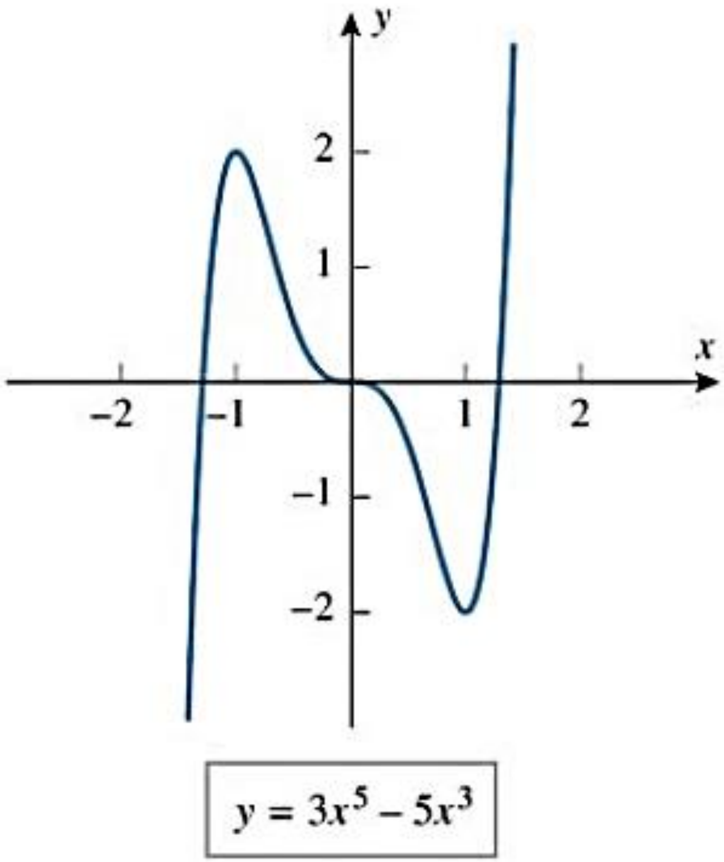
Ponto	Intervalo	Sinal f'(x)	Extremo
$x=-1$	$x < -1$	+	Pto máximo
	$-1 < x < 0$	−	
$x=0$	$-1 < x < 0$	−	Não há
	$0 < x < 1$	−	
$x=1$	$0 < x < 1$	−	Pto mínimo
	$x > 1$	+	

Exemplo 4 – Encontre os extremos relativos

$$15x^2(x-1)(x+1) = 0$$

$x = -1, x = 0$ e $x = 1$ *Pontos críticos*

Ponto	Intervalo	Sinal f'(x)	Extremo
$x = -1$	$x < -1$	+	Pto máximo
	$-1 < x < 0$	−	
$x = 0$	$-1 < x < 0$	−	Não há
	$0 < x < 1$	−	
$x = 1$	$0 < x < 1$	−	Pto mínimo
	$x > 1$	+	



Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

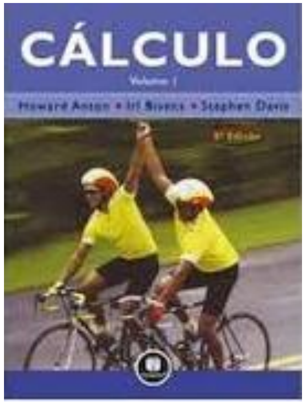
Próxima aula:

- Teste da derivada segunda.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br