Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 10 - Aula 2
Integrais Triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Coordenadas cilíndricas

- No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z).

Coordenadas cilíndricas

- No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z).
- Onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy.
- E z é a distância orientada do plano xy a P.

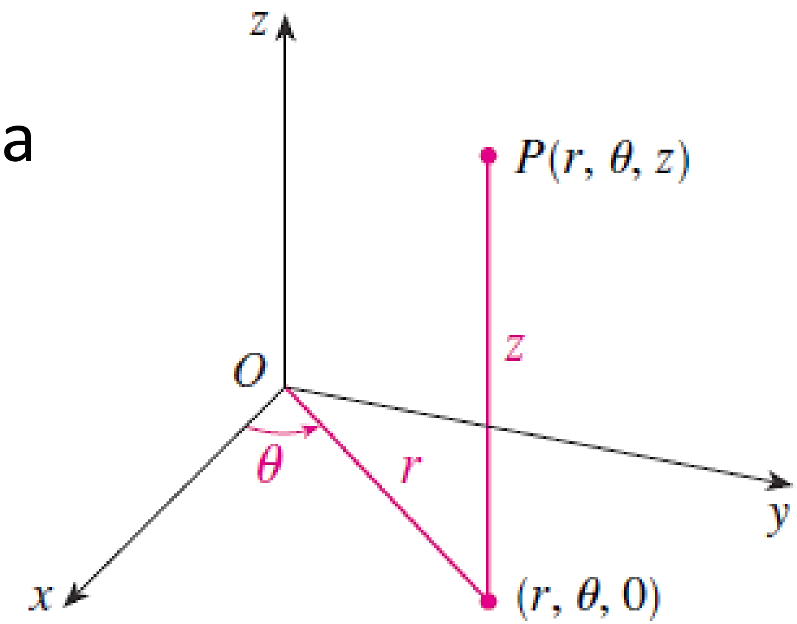


FIGURA 2 As coordenadas cilíndricas de um ponto P

Coordenadas cilíndricas

- No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z).
- Onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy.
- E z é a distância orientada do plano xy a P.

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$z = z$$

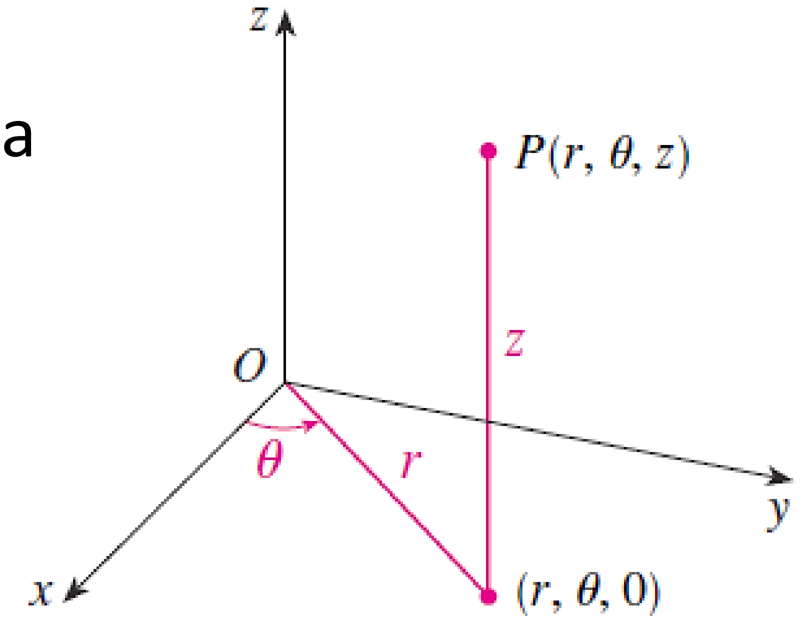


FIGURA 2 As coordenadas cilíndricas de um ponto P

Coordenadas cilíndricas

- Conversão de coordenadas retangulares para cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad z = z$

Coordenadas cilíndricas

- Conversão de coordenadas retangulares para cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad z = z$

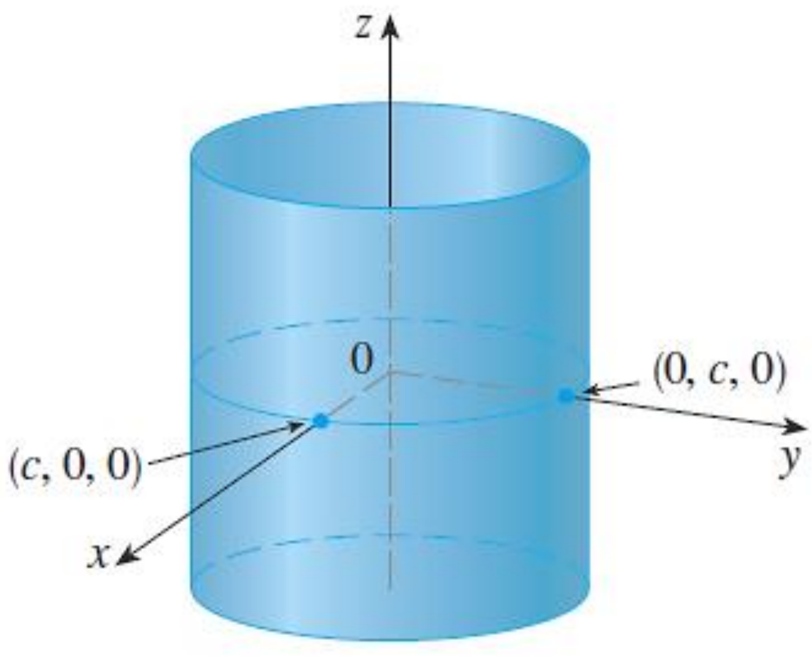


FIGURA 4 $r = c$, um cilindro

- Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo.
- O eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria.

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Solução:

(a) O ponto está marcado na Figura 3.

Das Equações

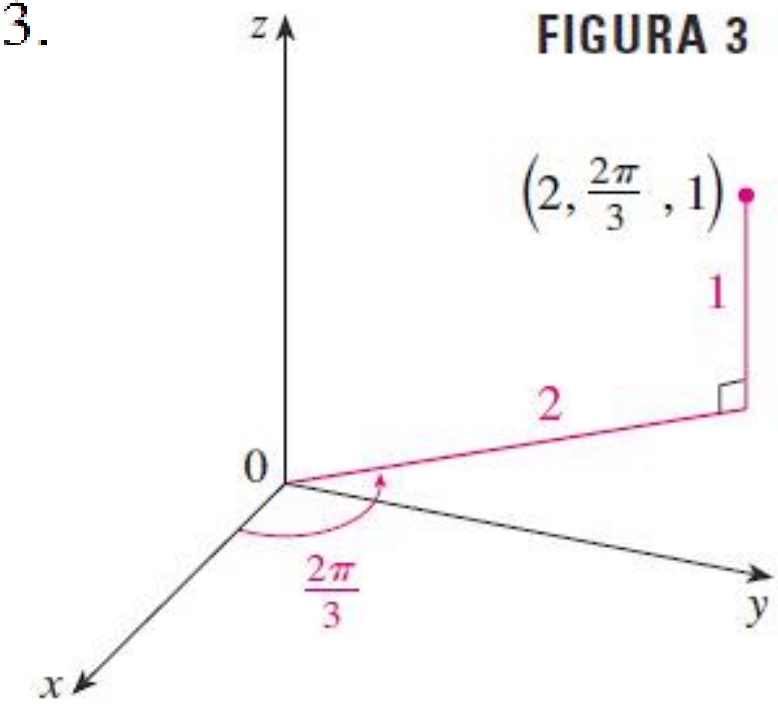


FIGURA 3

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

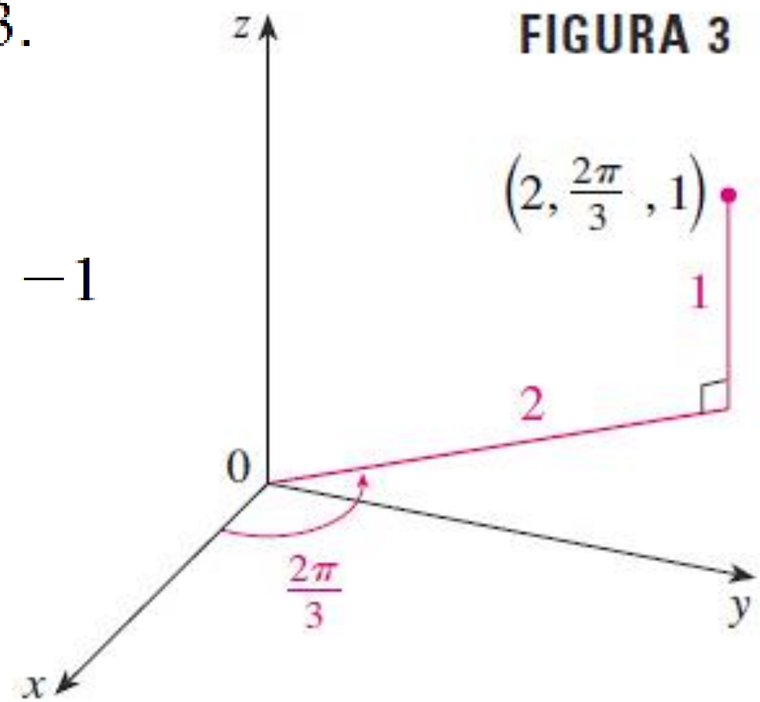
(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Solução:

(a) O ponto está marcado na Figura 3.
Das Equações

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

FIGURA 3



Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Solução:

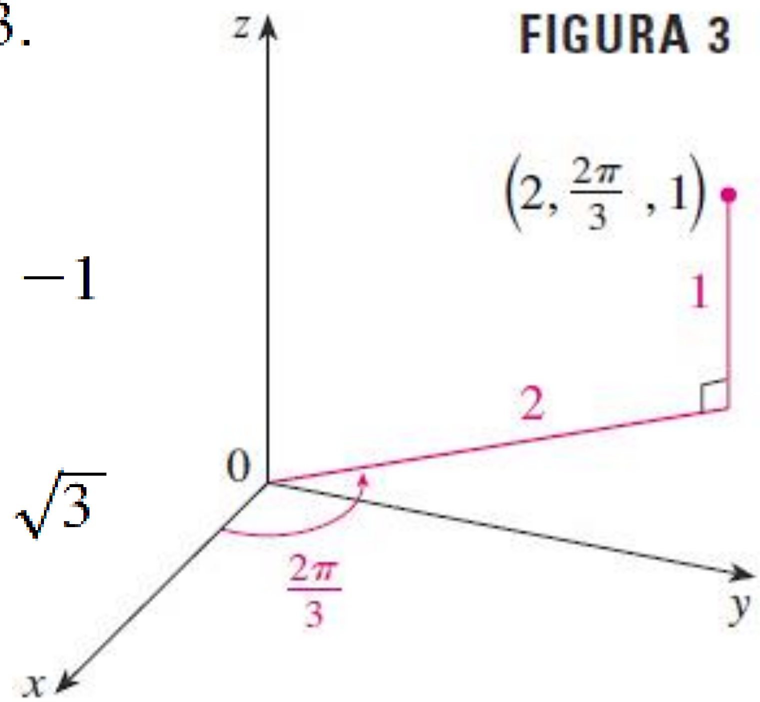
(a) O ponto está marcado na Figura 3.

Das Equações

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

FIGURA 3



Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Solução:

(a) O ponto está marcado na Figura 3.

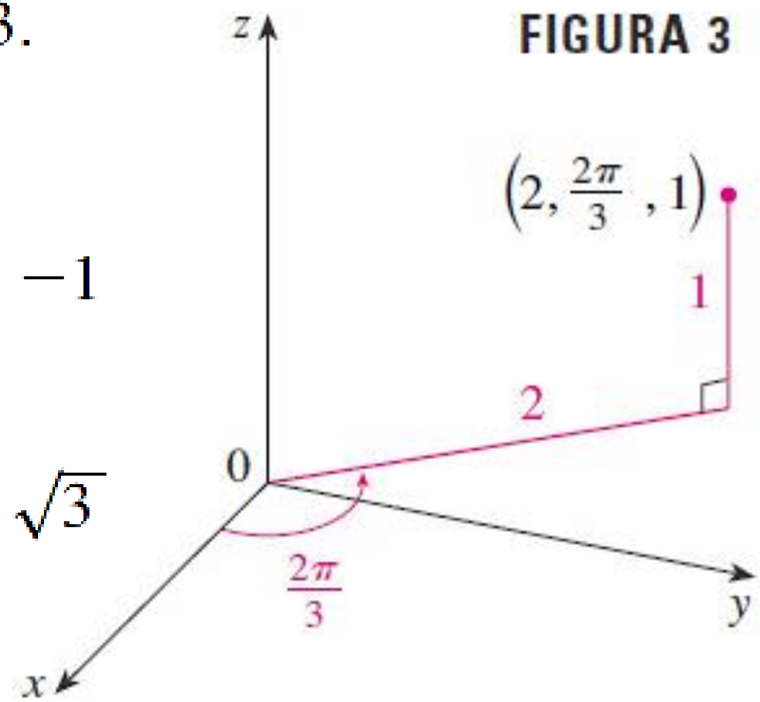
Das Equações

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

FIGURA 3



Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

Solução:

(a) O ponto está marcado na Figura 3.

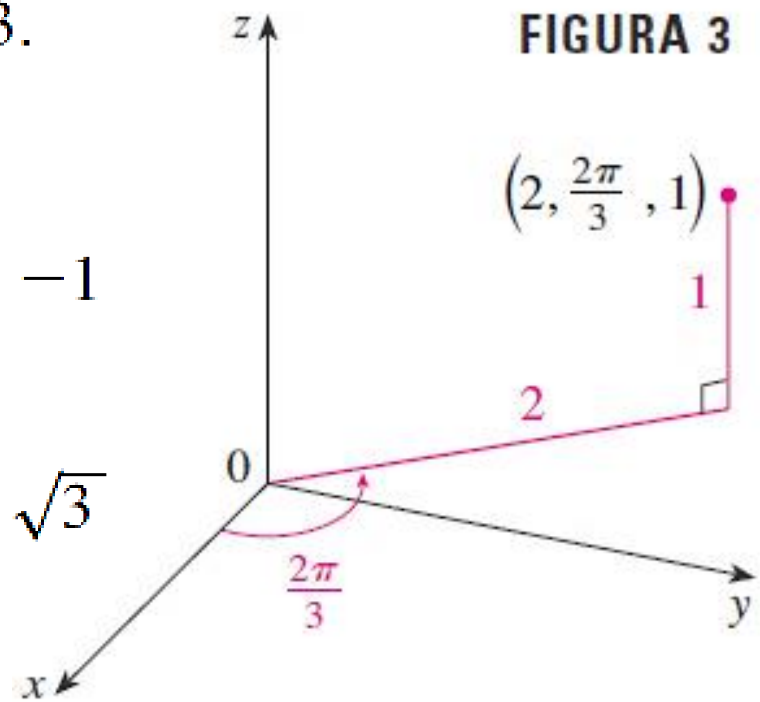
Das Equações

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

FIGURA 3



Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

Solução:

(b) Das Equações temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Exemplo 1

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

Solução:

(b) Das Equações temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

Solução:

(b) Das Equações temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Coordenadas cilíndricas

Exemplo 1

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

Solução:

(b) Das Equações temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$, existem infinitas escolhas.

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

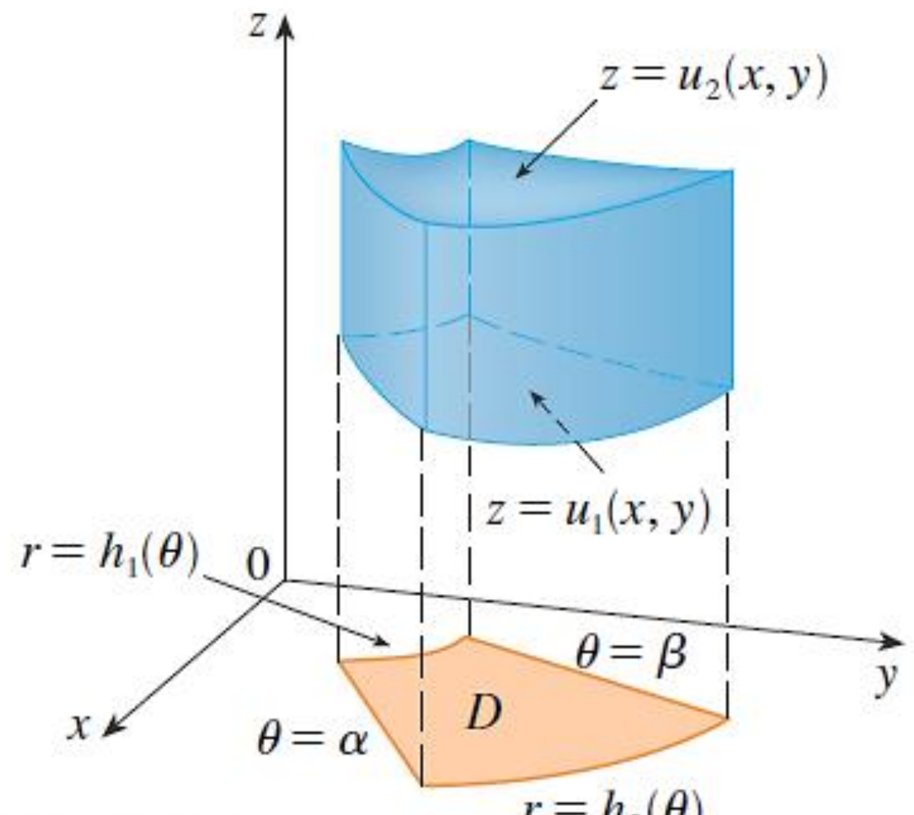


FIGURA 6

- Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação em coordenadas polares.
- Consideremos que f é função contínua.

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

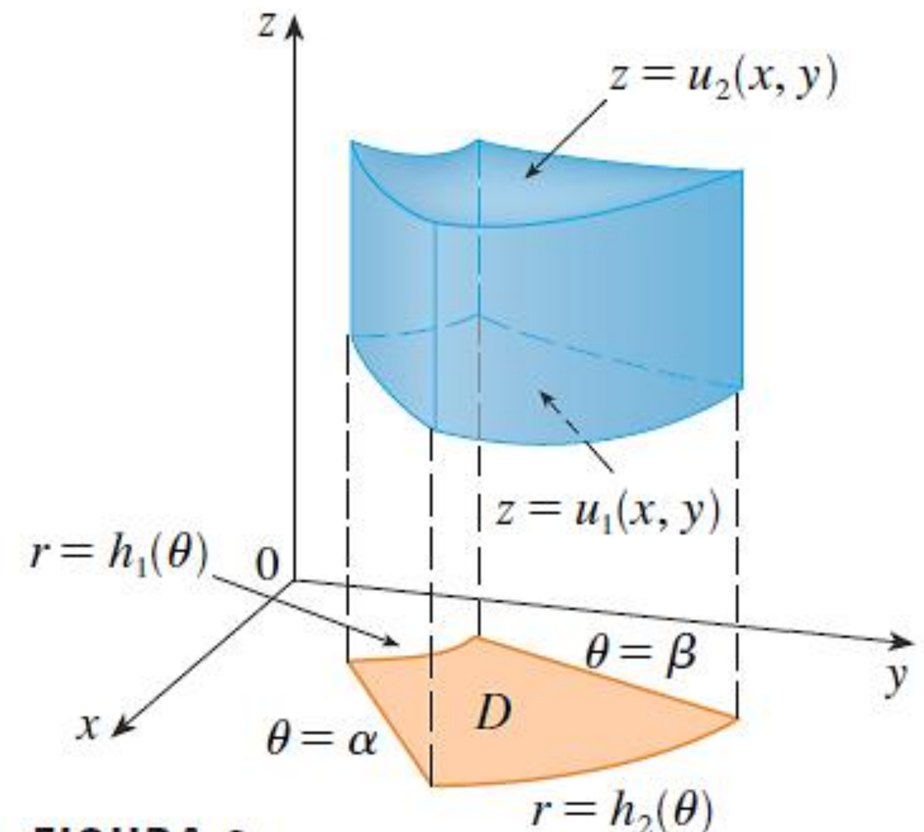


FIGURA 6

- Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação em coordenadas polares.
- Consideremos que f é função contínua.

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

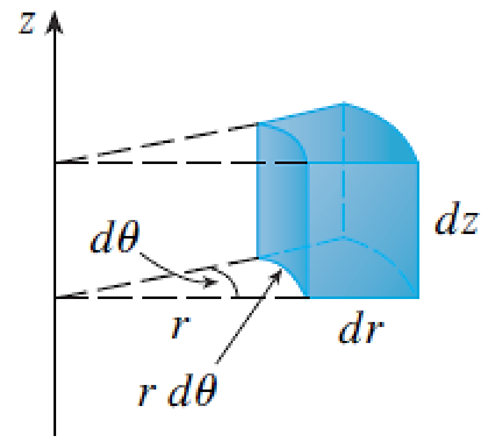


FIGURA 7 Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

Uso de Coord. Cilíndricas

- Simetria com eixo central.
- Quando envolver a expressão $x^2 + y^2$.

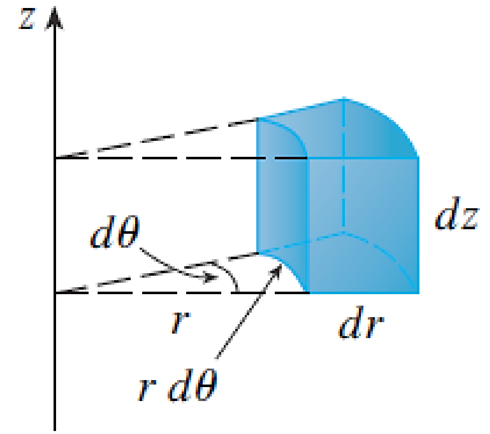


FIGURA 7 Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$

Integrais triplas cilíndricas

Exemplo 2

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

A densidade em qualquer ponto proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro.

Determine a massa de E.

Integrais triplas cilíndricas

Exemplo 2

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

A densidade em qualquer ponto proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro.

Determine a massa de E.

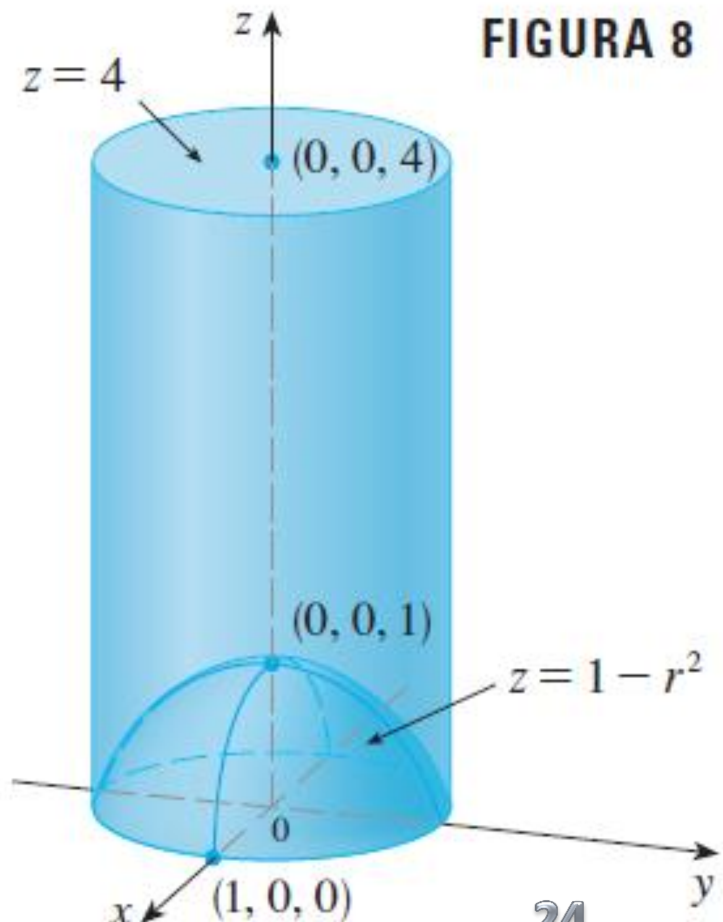


FIGURA 8

Solução:

Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$

Integrais triplas cilíndricas

Exemplo 2

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

A densidade em qualquer ponto proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro.

Determine a massa de E.

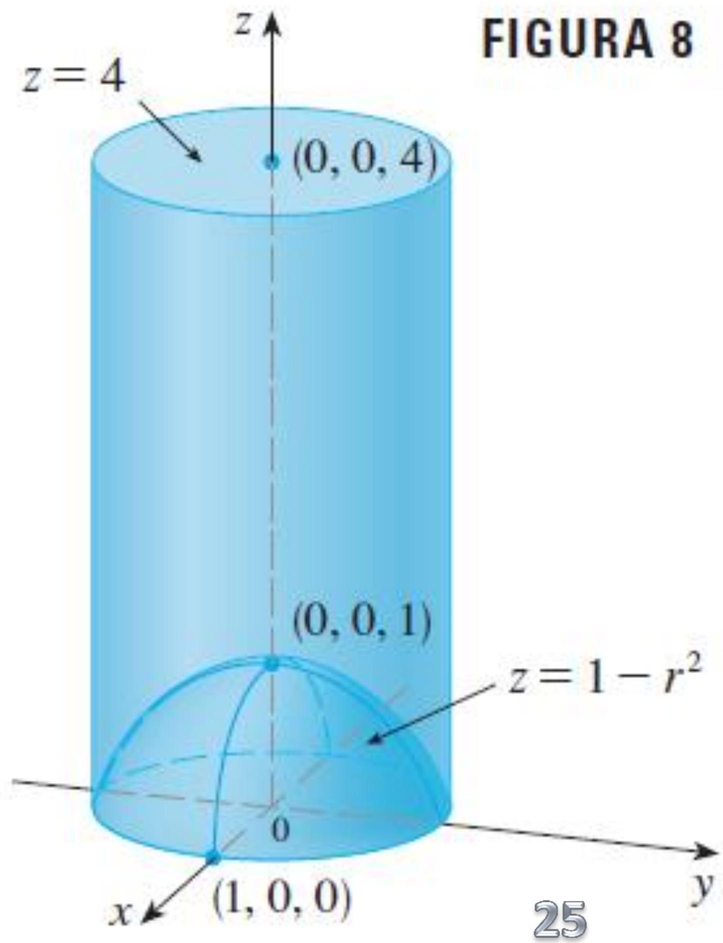


FIGURA 8

Solução:

Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$

$$E = \left\{(r, \theta, z) \,\middle|\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\right\}$$

Integrais triplas cilíndricas **Exemplo 2** **-** solução

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z,

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr \qquad \text{onde } K \text{ é constante}$$

Exemplo 2 - solução

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z,

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr \qquad \text{onde } K \text{ é constante}$$

Portanto, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

Integrais triplas cilíndricas **Exemplo 2** - solução

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z,

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr \qquad \text{onde } K \text{ é constante}$$

Portanto, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

Exemplo 2 - solução

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z,

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr \qquad \text{onde } K \text{ é constante}$$

Portanto, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

Integrais triplas cilíndricas Exemplo 2 - solução

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z,

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr \qquad \text{onde } K \text{ é constante}$$

Portanto, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

Coordenadas esféricas

- As coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no são mostradas na Figura 1.

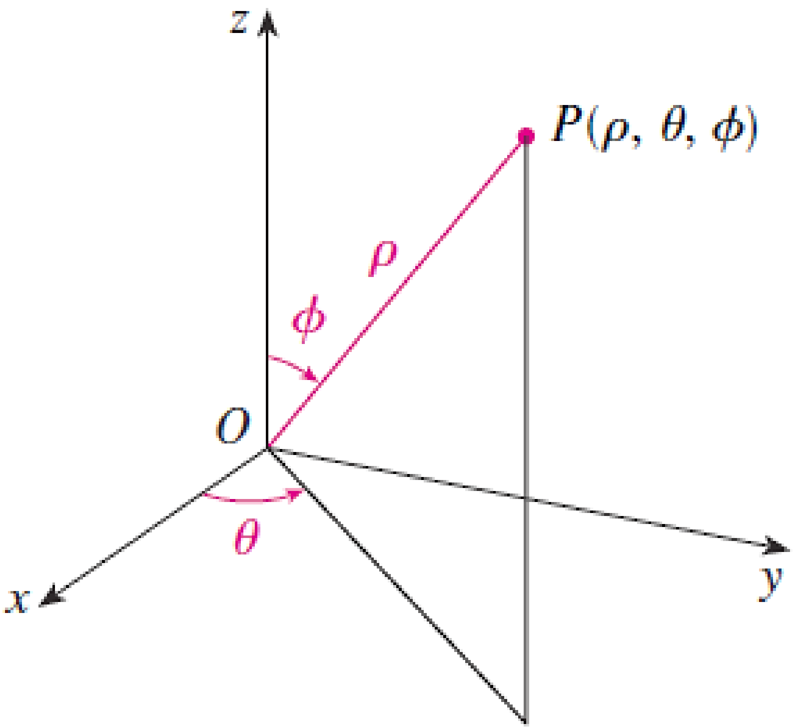
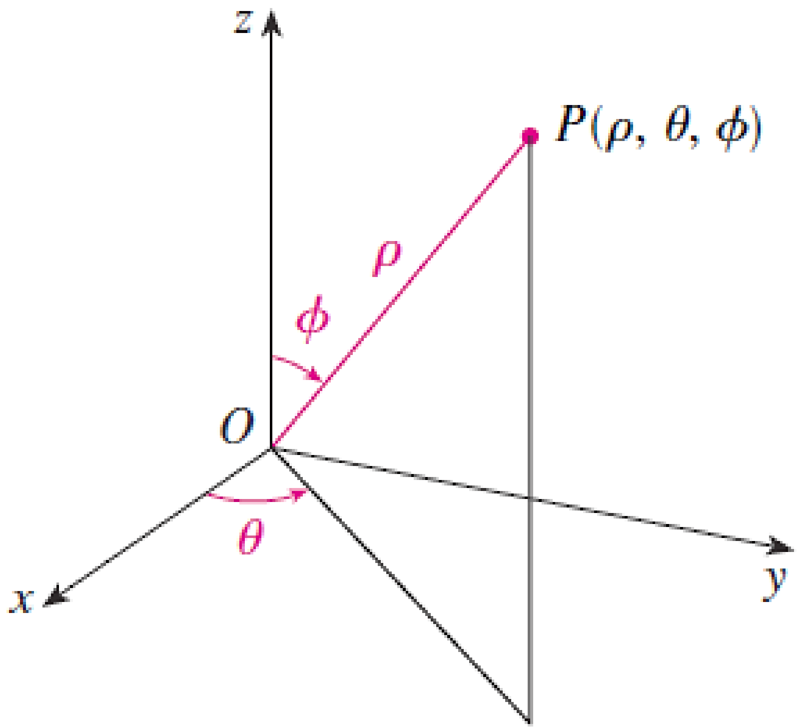


FIGURA 1 As coordenadas esféricas de um ponto

Coordenadas esféricas

- As coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no são mostradas na Figura 1.
- Onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P.



- θ é o mesmo ângulo das coordenadas cilíndricas.

FIGURA 1 As coordenadas esféricas de um ponto

Coordenadas esféricas

- As coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no são mostradas na Figura 1.
- Onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P.

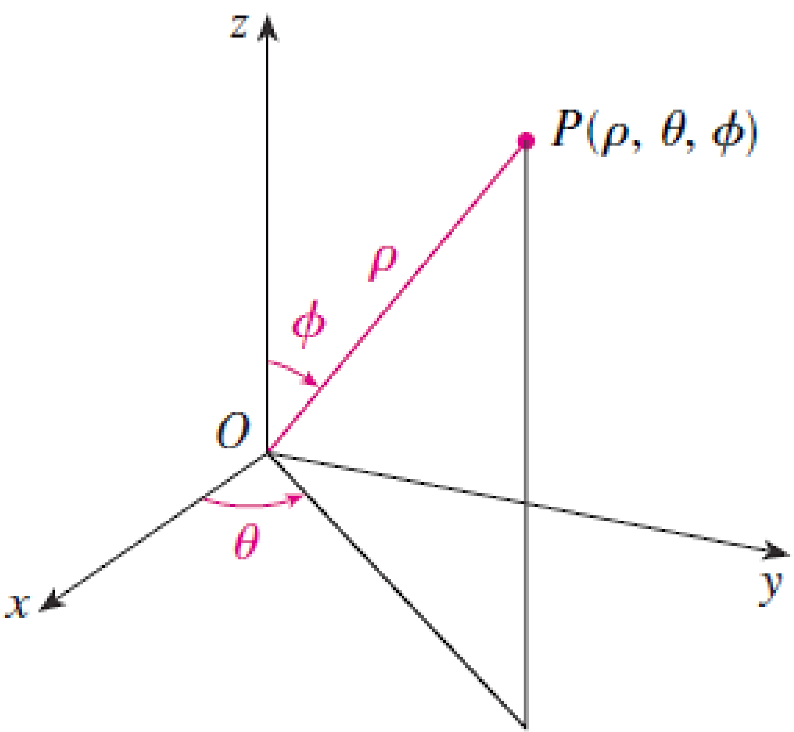


FIGURA 1 As coordenadas esféricas de um ponto

- θ é o mesmo ângulo das coordenadas cilíndricas.
- ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP.

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

Coordenadas esféricas

- A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5.

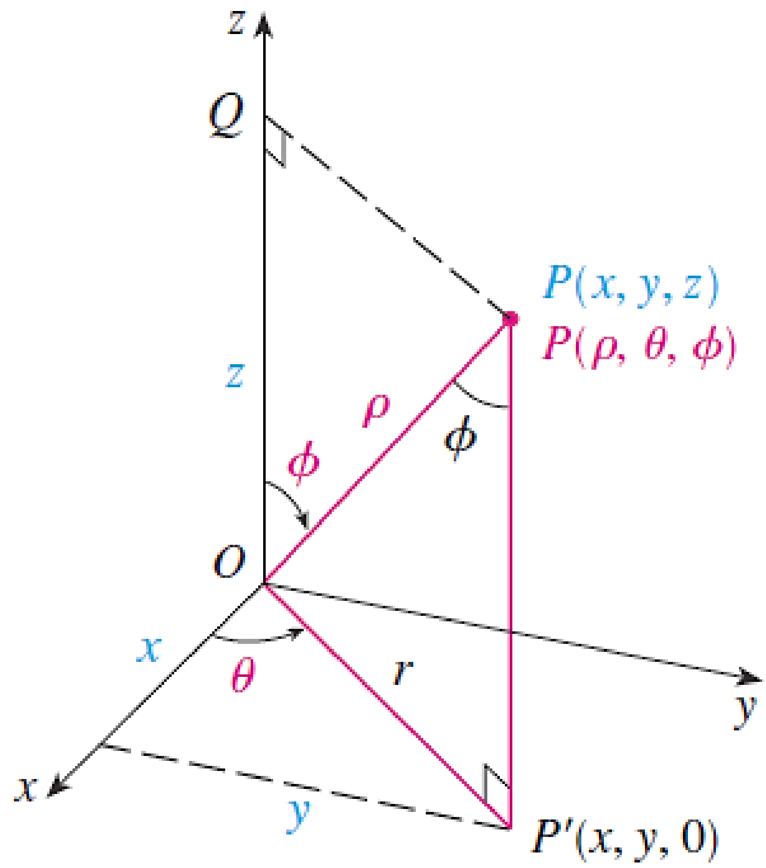


FIGURA 5

Coordenadas esféricas

- A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5.

- Dos triângulos *OPQ e OPP'*:

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

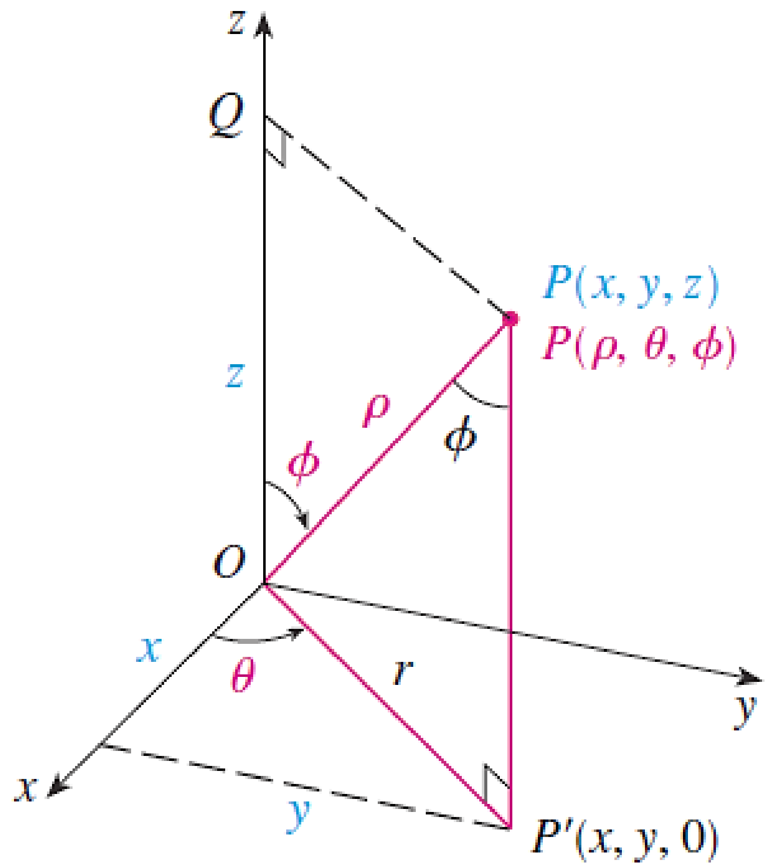


FIGURA 5

Coordenadas esféricas

- A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5.

- Dos triângulos *OPQ e OPP'*:

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

- Como $x = r cos\theta$ e $y = r sen\theta$:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \, \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \, \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

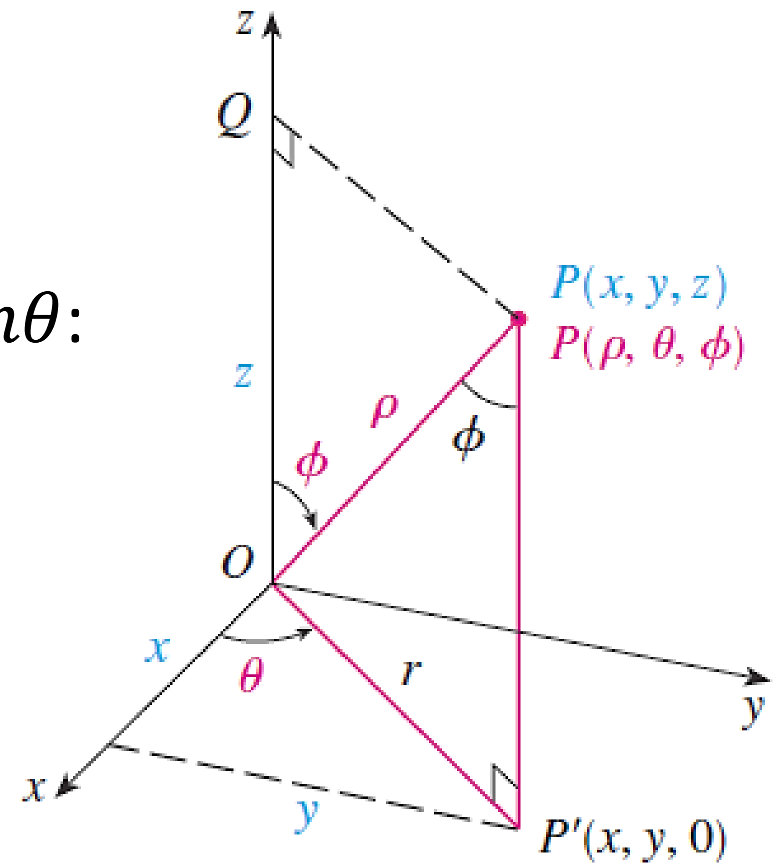


FIGURA 5

Coordenadas esféricas

- A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5.

- Dos triângulos *OPQ e OPP'*:

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

- Como $x = r cos\theta$ e $y = r sen\theta$:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \, \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \, \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

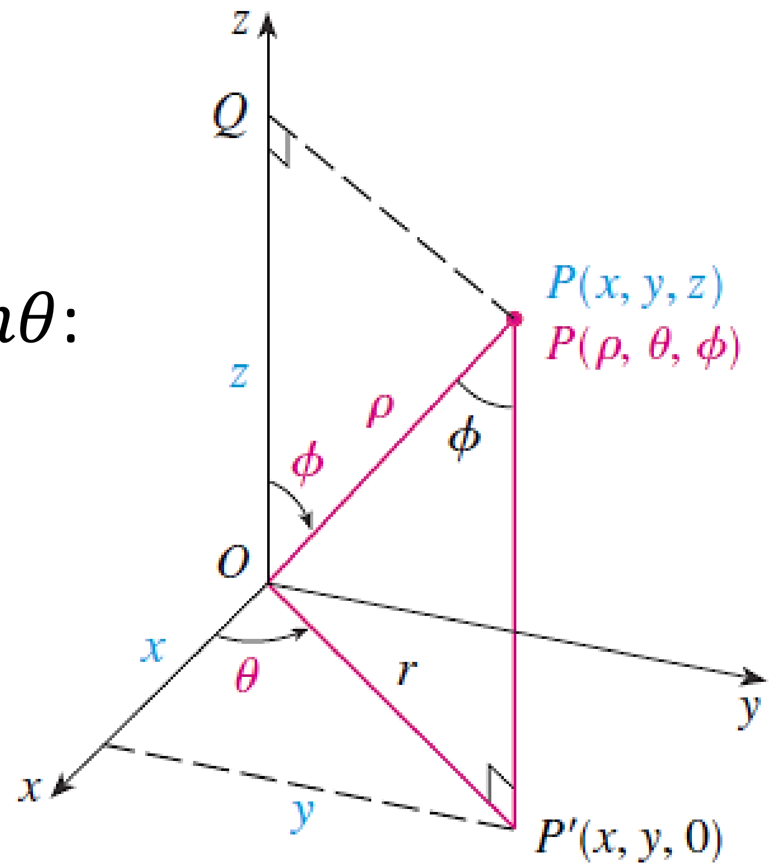


FIGURA 5

Coordenadas esféricas

Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Coordenadas esféricas

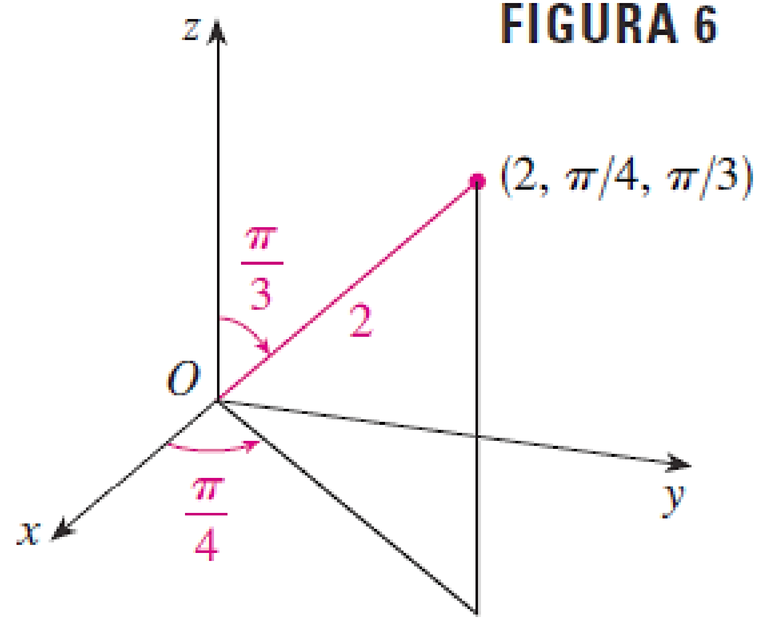
Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Solução:

FIGURA 6



Coordenadas esféricas

Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

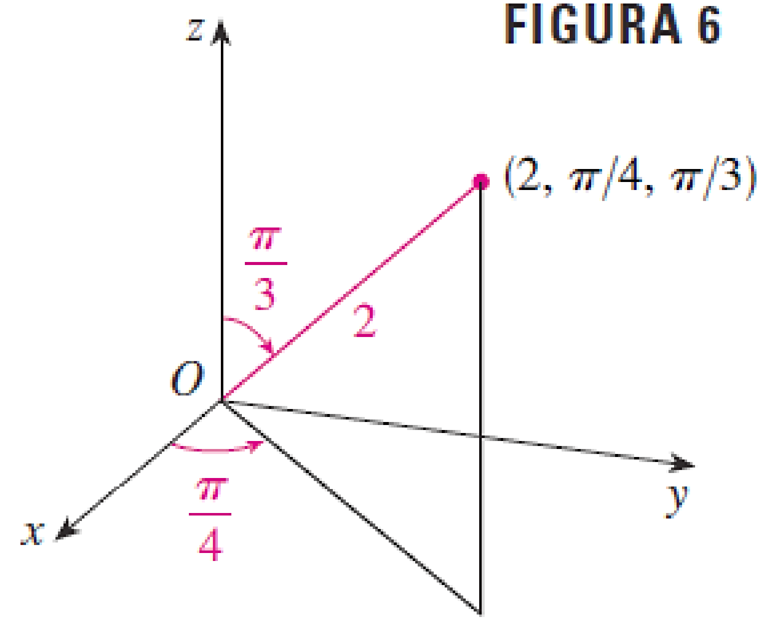
Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Solução:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

FIGURA 6



Coordenadas esféricas

Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Solução:

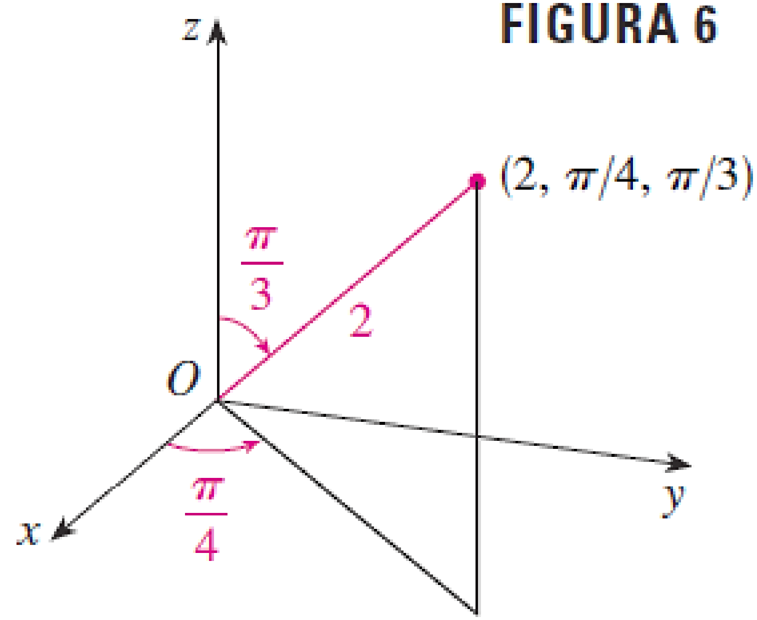
$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

FIGURA 6



Coordenadas esféricas

Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Solução:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}$$

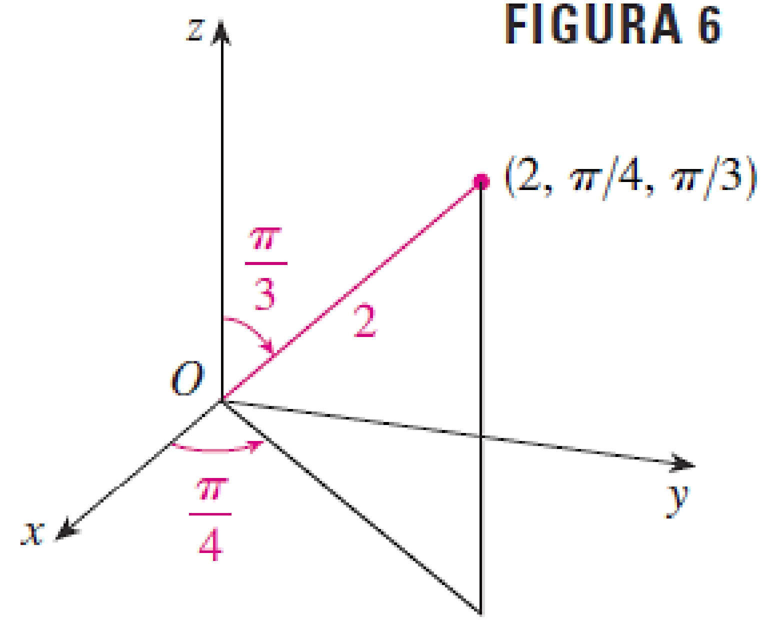
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

FIGURA 6



Coordenadas esféricas

Exemplo 3

O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas.

Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares

Solução:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

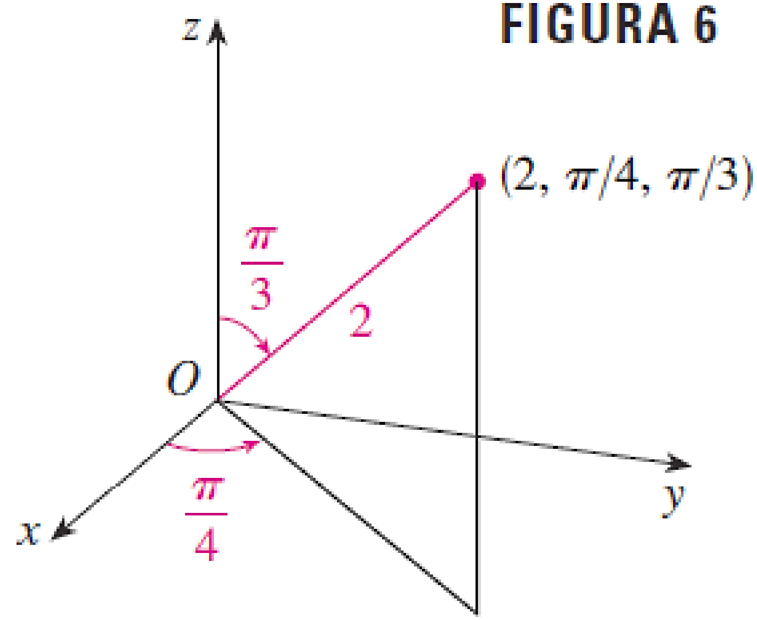


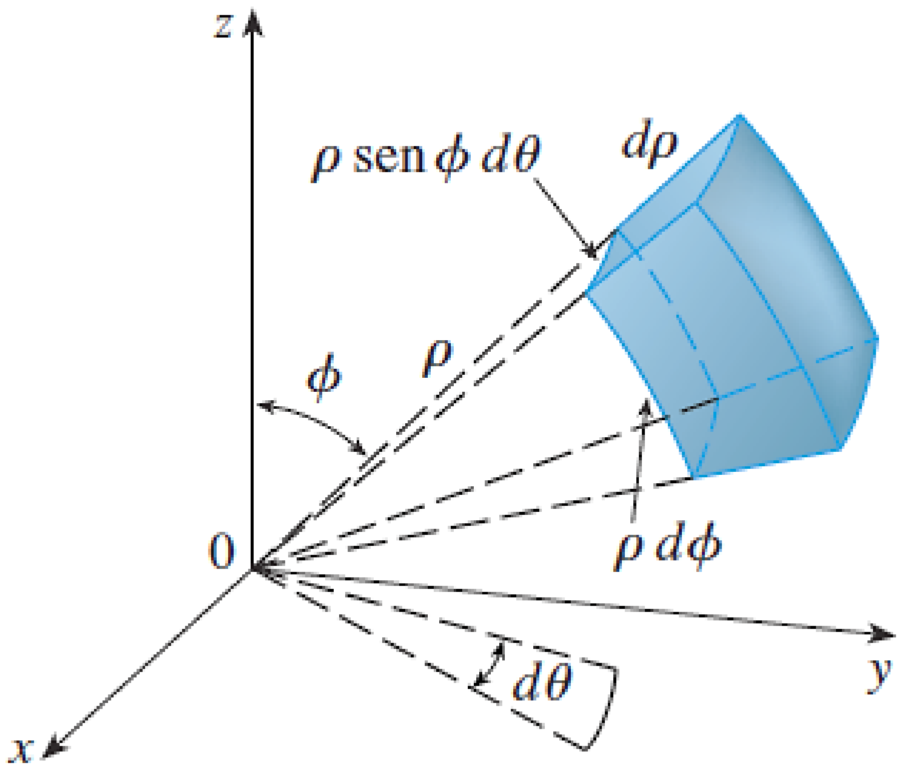
FIGURA 6

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ em coordenadas retangulares.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

- Dividindo-se sólidos em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado nas integrais quando dividimos em cubos.

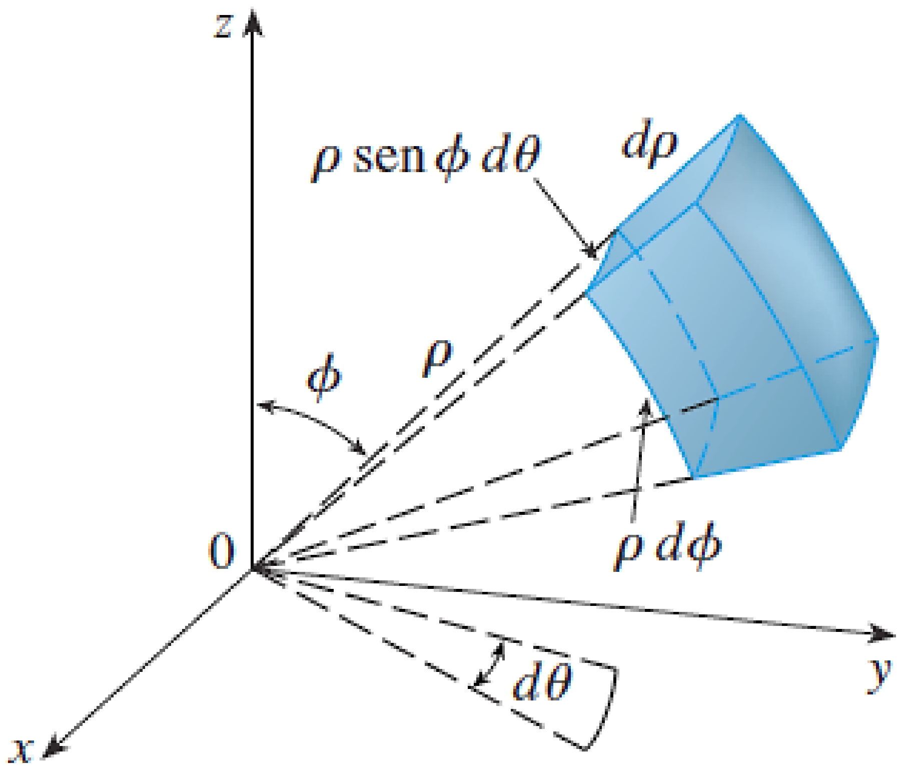
Integrais triplas em coordenadas esféricas



- Dividindo-se sólidos em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado nas integrais quando dividimos em cubos.

FIGURA 8 Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \text{sen}\,\phi\, d\rho d\theta\, d\phi$

Integrais triplas em coordenadas esféricas



- Dividindo-se sólidos em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado nas integrais quando dividimos em cubos.

FIGURA 8 Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ c \leqslant \phi \leqslant d, \ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Uso conveniente das Coordenadas Esféricas

- Simetria em torno de um ponto cuja origem esteja colocada neste ponto.
- O caso mais comum são superfícies esféricas.
- Também são aplicadas em semiplano e semicone.

Coordenadas esféricas

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Coordenadas esféricas

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Solução:

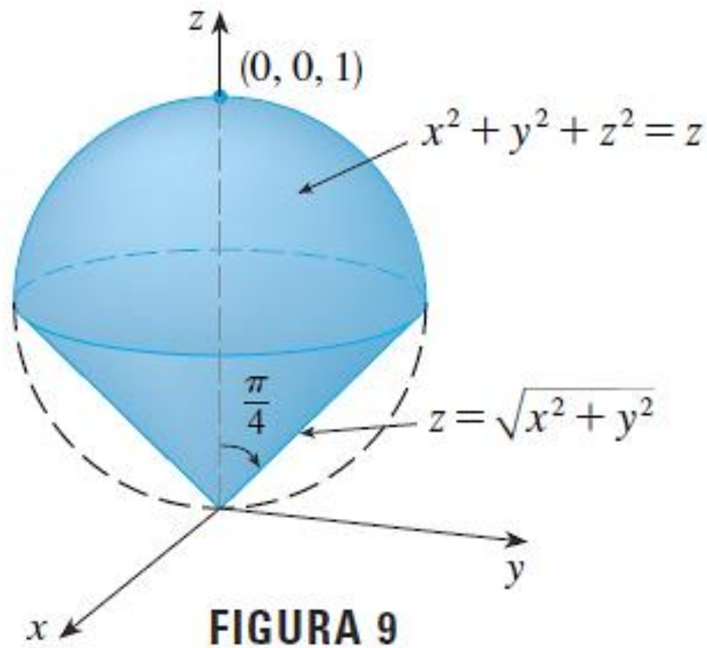


FIGURA 9

Coordenadas esféricas

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Solução:

a esfera passa pela origem e tem centro em $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{ou}$$

$$\rho = \cos \phi$$

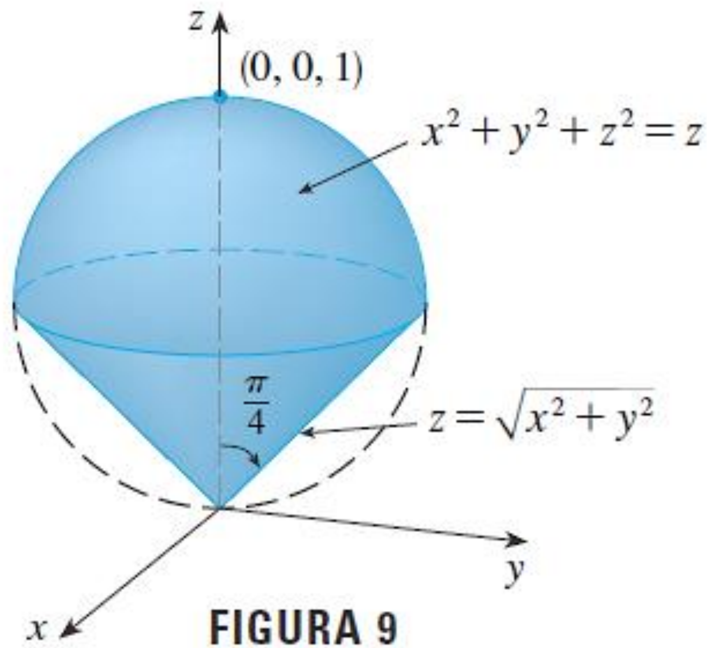


FIGURA 9

Coordenadas esféricas

Exemplo 4 - solução

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \; \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \; \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$.

Coordenadas esféricas

Exemplo 4 - solução

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto,

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, \; 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

Coordenadas esféricas

Exemplo 4 - solução

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto,

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, \; 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Coordenadas esféricas

Exemplo 4 - solução

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto,

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, \ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$

Coordenadas esféricas

Exemplo 4 - solução

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto,

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \, \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.8 e 15.9 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

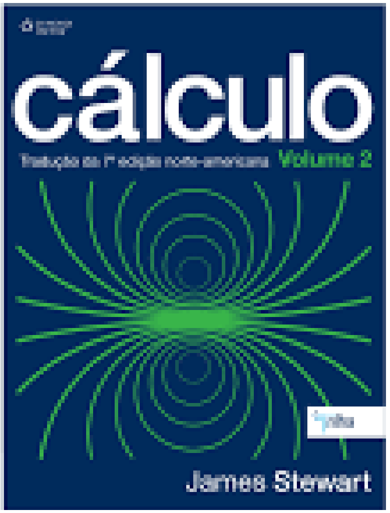
Próxima aula:

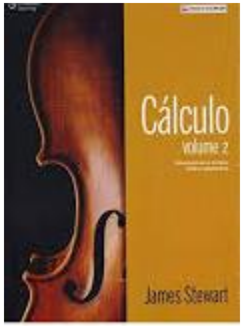
- Mudança de variáveis em integrais múltiplas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br