Cálculo I

Licenciatura

Semana 10 - Aula 2
Teste da derivada segunda

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Teste da derivada segunda (f'')

- ✓ O teste da derivada segunda é mais simples para se determinar os pontos críticos de uma função f;

- ✓ Porém, ele não é útil quando a derivada segunda f'' no ponto crítico é nula.

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA **(*Teste da Derivada Segunda*)** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(a) *Se* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$, *então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(b) *Se* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) < 0$, *então f tem um máximo relativo em x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA **(*Teste da Derivada Segunda*)** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(*a*) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(*b*) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(*c*) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo em x_0 ou nenhum dos dois.*

4.4 Teste da derivada segunda (f'')

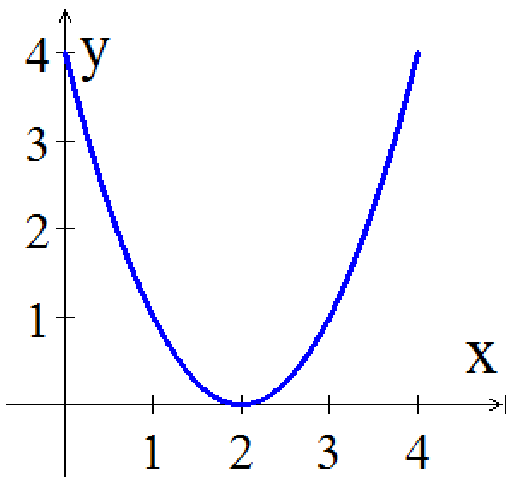
O sinal da **derivada segunda no ponto crítico** $\boldsymbol{x_0 \in (a, b)}$ **pode definir se o ponto é de máximo ou de mínimo.** Se $f'(x_0) = 0$ e:

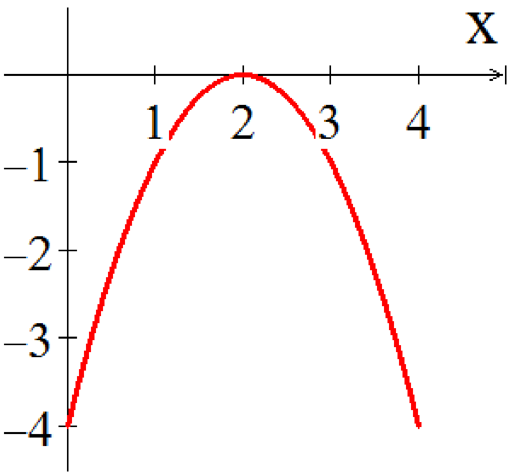
$f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_0}$ é ponto de Máximo;

$f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_0}$ é ponto de mínimo;

$f''(x_0) = 0$ nada se conclui sobre o ponto.

Exemplos gráficos





$$\boldsymbol{y = (x - 2)^2}$$

$$\boldsymbol{y = -(x - 2)^2}$$

$$\boldsymbol{y'' = 2 > 0}$$

$$\boldsymbol{y'' = -2 < 0}$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

Pontos críticos

$$x = -1, x = 0$$
$$x = 1$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Pontos críticos

$$x = -1, x = 0$$
$$x = 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$f'(-1) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 0$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Pontos críticos

$$x = -1, x = 0$$
$$x = 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$f'(-1) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Pontos críticos

$$x = -1, x = 0$$
$$x = 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$$f'(-1) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

$$f''(-1) = -30 \qquad f''(0) = 0 \qquad f''(1) = +30$$

Exemplo 1 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Pontos críticos

$$x = -1, x = 0$$
$$x = 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

$f'(-1) = 0$ $\quad$ $f'(0) = 0$ $\quad$ $f'(1) = 0$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

$f''(-1) = -30$ $\quad$ $f''(0) = 0$ $\quad$ $f''(1) = +30$

f tem ***máx.*** *relativo* $\quad$ *Inconclusivo* $\quad$ *f tem* ***mín.*** *relativo*

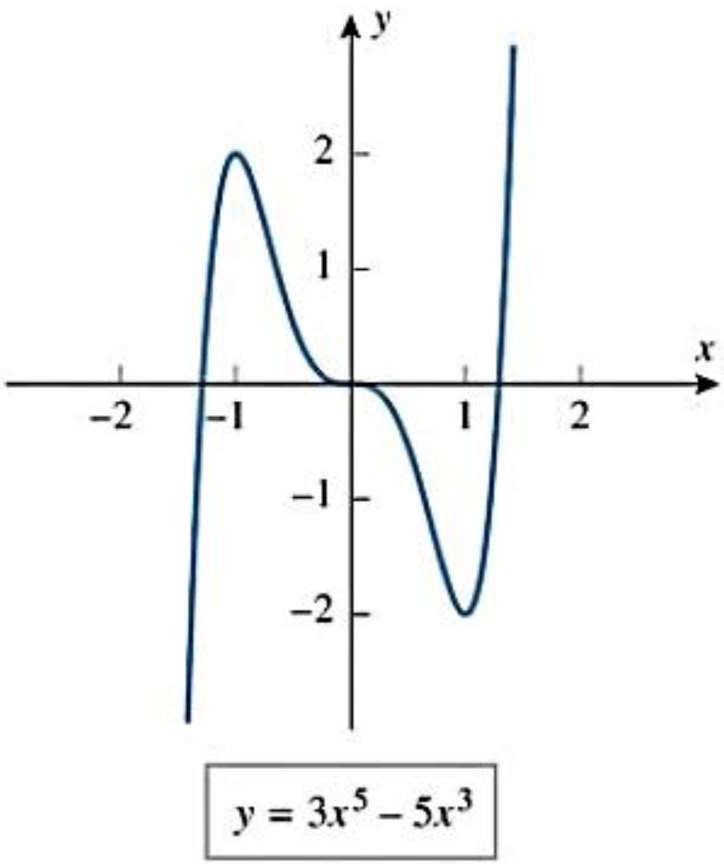
Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

$$f''(-1) = -30$$ f *tem* **máx.** *relativo*

$$f''(0) = 0$$ *Inconclusivo*

$$f''(1) = +30$$ f *tem* **mín.** *relativo*



Máximos e mínimos absolutos

- ✓ Nesta seção consideraremos métodos para encontrar o mais alto dos morros e o mais profundo dos vales de uma curva;

- ✓ Em termos matemáticos, procuraremos o maior e o menor valor de uma função em um determinado intervalo .

Máximos e mínimos absolutos

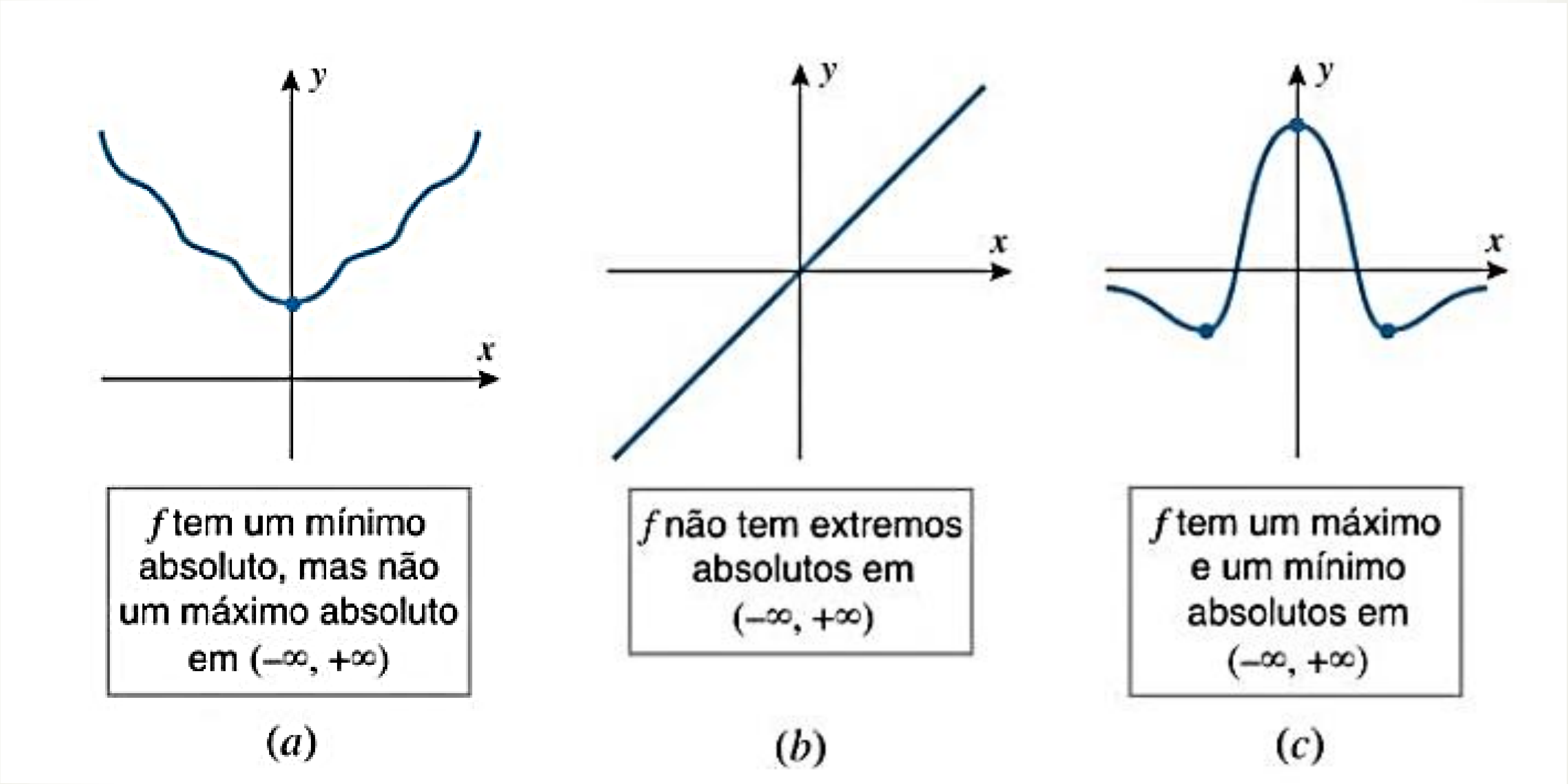
4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um ***máximo absoluto*** em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um ***mínimo absoluto*** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um ***extremo absoluto***.

Máximos e mínimos absolutos

4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um ***máximo absoluto*** em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um ***mínimo absoluto*** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um ***extremo absoluto***.

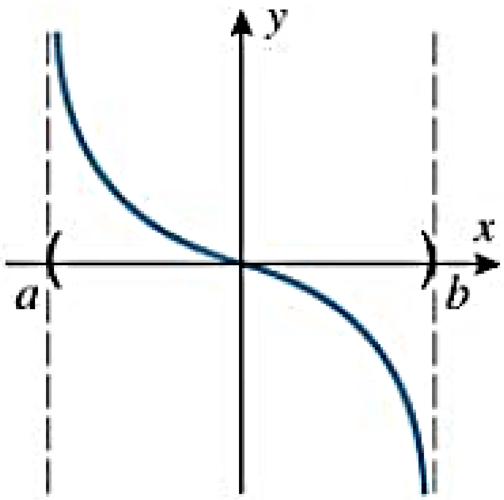
Contudo, não é garantido que uma função tenha extremos absolutos em um intervalo.

Máximos e mínimos absolutos



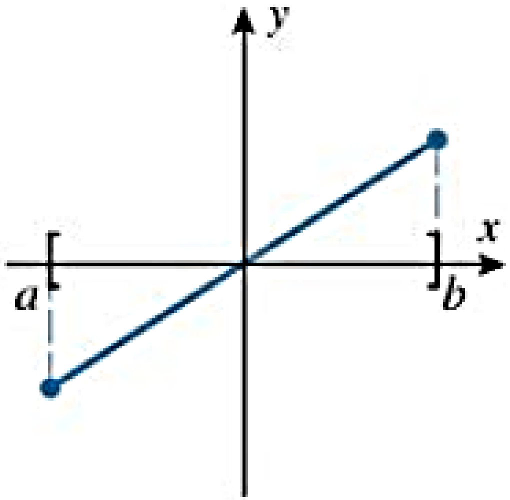
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Máximos e mínimos absolutos



f não tem extremos absolutos em (a,b)

(*d*)



f tem um mínimo e um máximo absolutos em $[a, b]$

(*e*)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema 5.4.2 (8ª *ed. Anton*)

4.4.2 TEOREMA ***(Teorema do Valor Extremo)*** *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito* [*a*, *b*], *então f tem um máximo e um mínimo absolutos em* [*a*, *b*].

Teorema 5.4.2 (8ª ed. Anton)

4.4.2 TEOREMA ***(Teorema do Valor Extremo)*** *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

Teorema 5.4.3 (8ª ed. Anton)

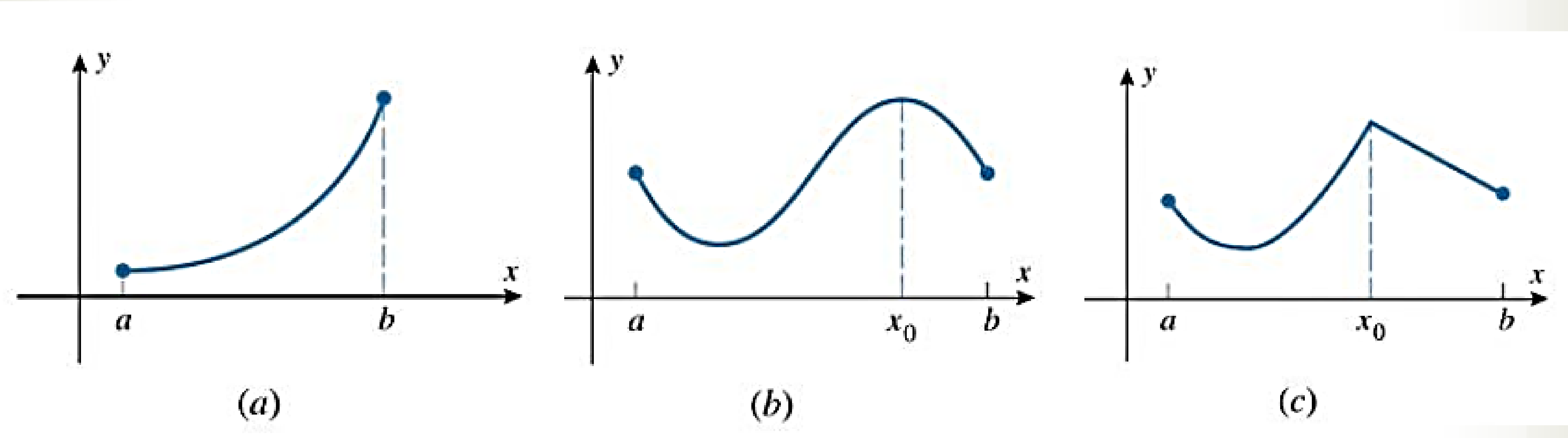
4.4.3 TEOREMA *Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f.*

Teorema do valor extremo

- ✓ Desse teorema segue que, se *f* **for contínua** no intervalo finito fechado **[a, b]**, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.

Teorema do valor extremo

- ✓ Desse teorema segue que, se *f* **for contínua** no intervalo finito fechado **[a, b]**, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Como encontrar extremos absolutos?

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado $[a, b]$

Passo 1 Encontre os pontos críticos de f em (a, b).

Passo 2 Encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades a e b.

Passo 3 O maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto.

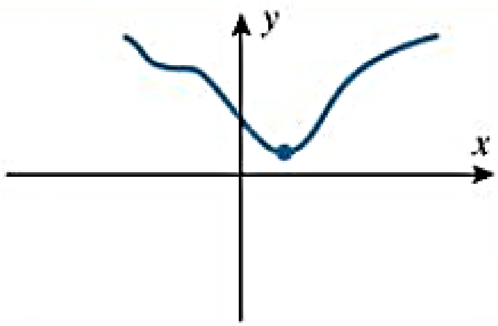
Exemplo 2 – Encontre os extremos absolutos de f no intervalo [1, 5]

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$$

Extremos absolutos em intervalos infinitos

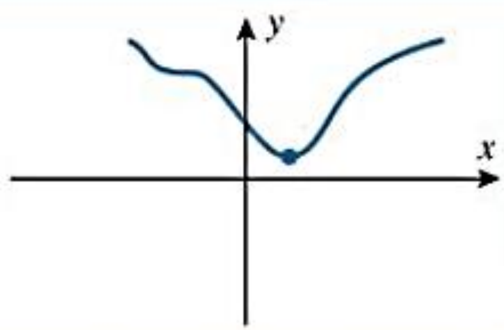
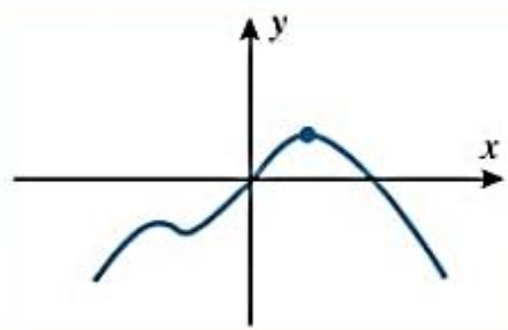
- ✓ Seja uma função *f* contínua em $(-\infty, +\infty)$;
- ✓ Extremos absolutos podem ser deduzidos verificando o comportamento de *f* no infinito.

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

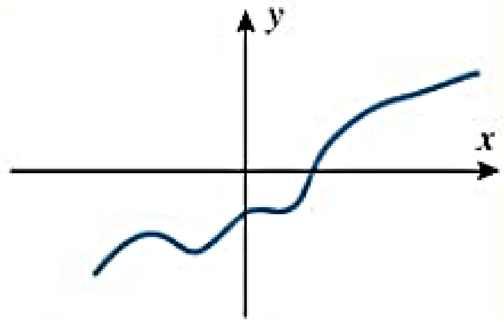
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO		

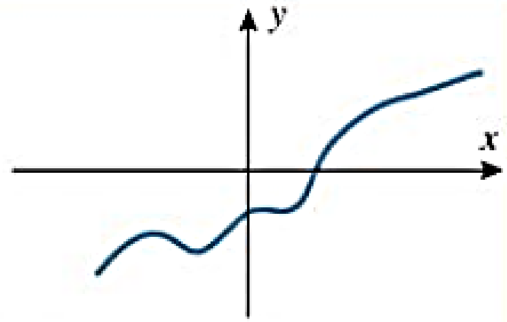
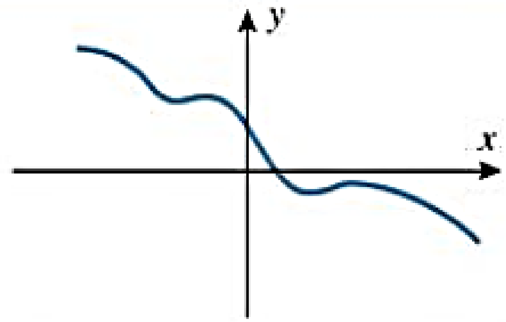
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

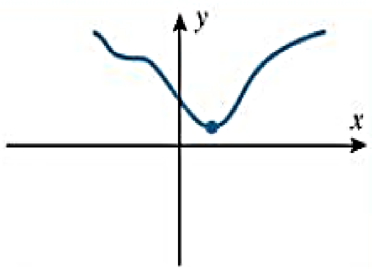
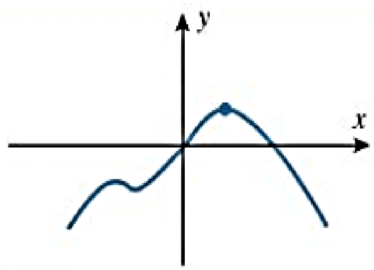
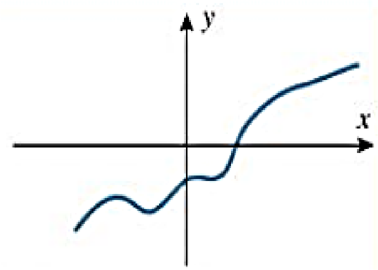
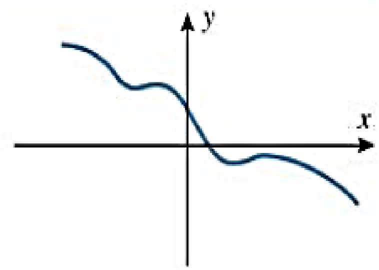
Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	*f* não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	*f* não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO		

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

Tabela 4.4.2
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

LIMITES	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO				

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 3 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (-∞, +∞)

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

Exemplo 3 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (-∞, +∞)

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^4 + 4x^3 = +\infty$$

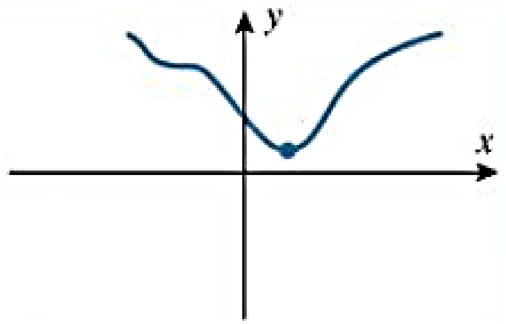
$$\lim_{x \to +\infty} 3x^4 + 4x^3 = +\infty$$

Exemplo 3 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (-∞, +∞)

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^4 + 4x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x^4 + 4x^3 = +\infty$$



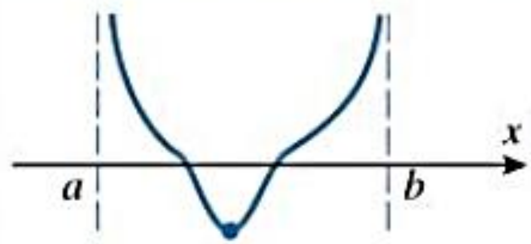
Há um mínimo absoluto no gráfico de f, mas nenhum máximo no intervalo $(-\infty, +\infty)$

Extremos absolutos em intervalos abertos

- ✓ Seja uma função f contínua em (a, b);
- ✓ Extremos absolutos podem ser obtidos verificando-se o comportamento de de f quando $x \to a^{+}$ e $x \to b^{-}$.

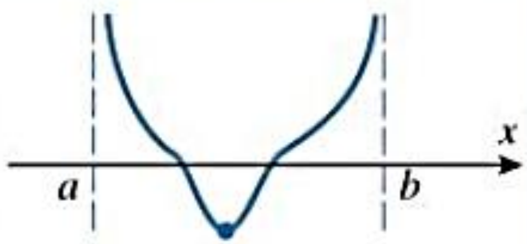
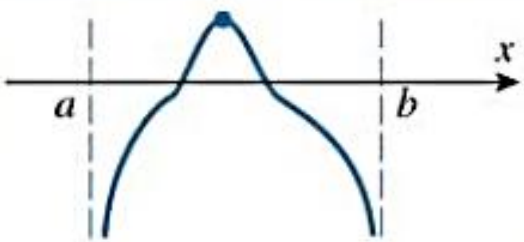
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)
GRÁFICO	

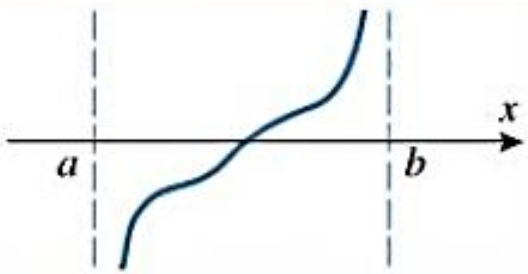
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)
GRÁFICO		

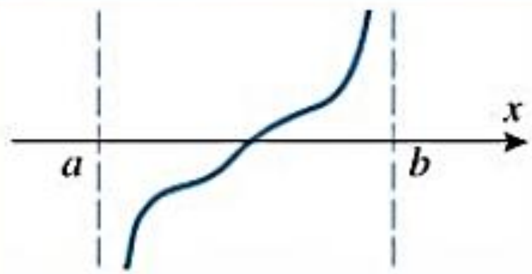
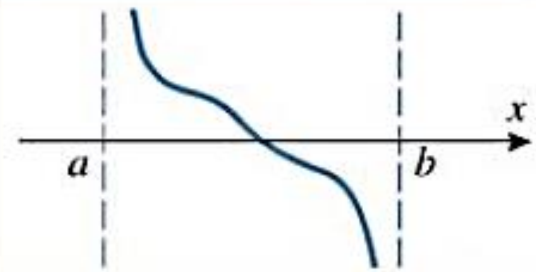
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO	

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

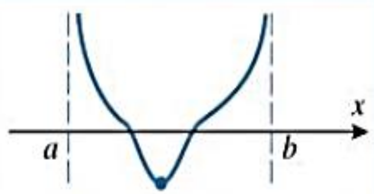
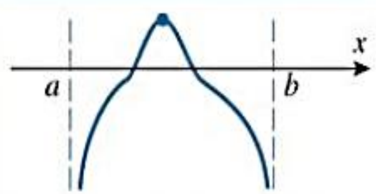
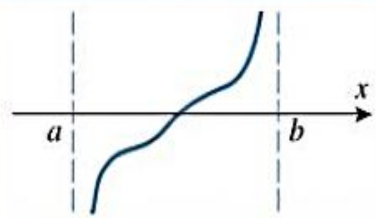
LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO		

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

Tabela 4.4.3

EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

LIMITES	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

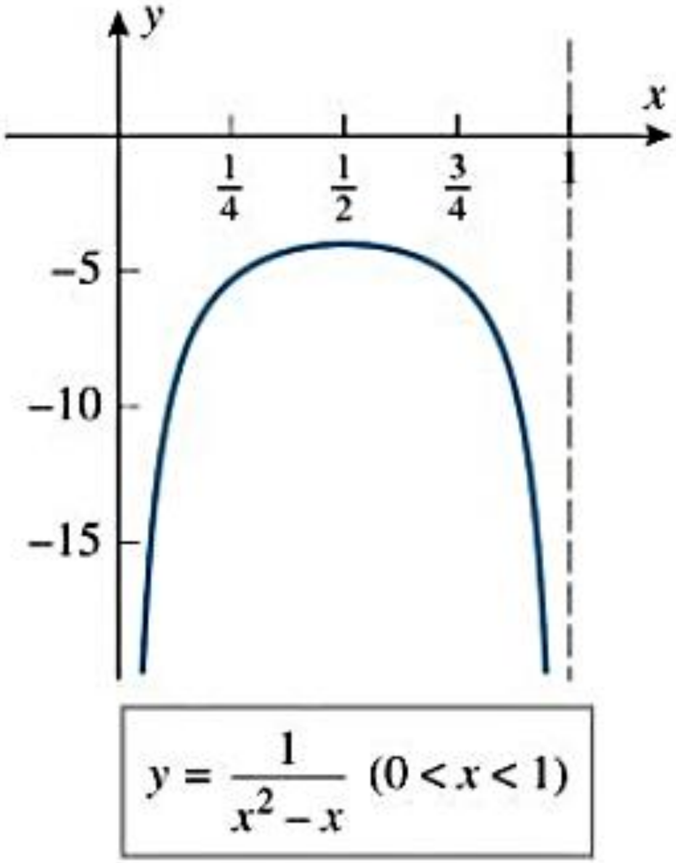
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 4 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (0, 1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

Exemplo 4 – Determine se f tem extremos absolutos no intervalo (0, 1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$



Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

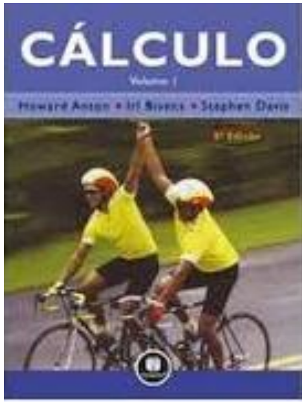
Próxima aula:

- Traçado de gráficos de funções.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br