Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 10 - Aula 3
Mudança de variável em integrais múltiplas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Mudança de variável em integrais múltiplas

- No cálculo unidimensional usamos uma mudança de variável para simplificar uma integral.
- Podemos escrever a Regra da Substituição como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$.

Mudança de variável em integrais múltiplas

- No cálculo unidimensional usamos uma mudança de variável para simplificar uma integral.
- Podemos escrever a Regra da Substituição como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c), b = g(d)$.

- Outro modo de escrever a substituição é o seguinte:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Mudança de variável em integrais múltiplas

- No cálculo unidimensional usamos uma mudança de variável para simplificar uma integral.
- Podemos escrever a Regra da Substituição como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c), b = g(d)$.

- Outro modo de escrever a substituição é o seguinte:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

- Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas e triplas.

Mudança de variável em integrais múltiplas

- De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela transformação T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

Mudança de variável em integrais múltiplas

- De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela transformação T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

- Onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações:

$$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

Mudança de variável em integrais múltiplas

- De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela transformação T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

- Onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações:

$$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

- Ou, como às vezes escrevemos:

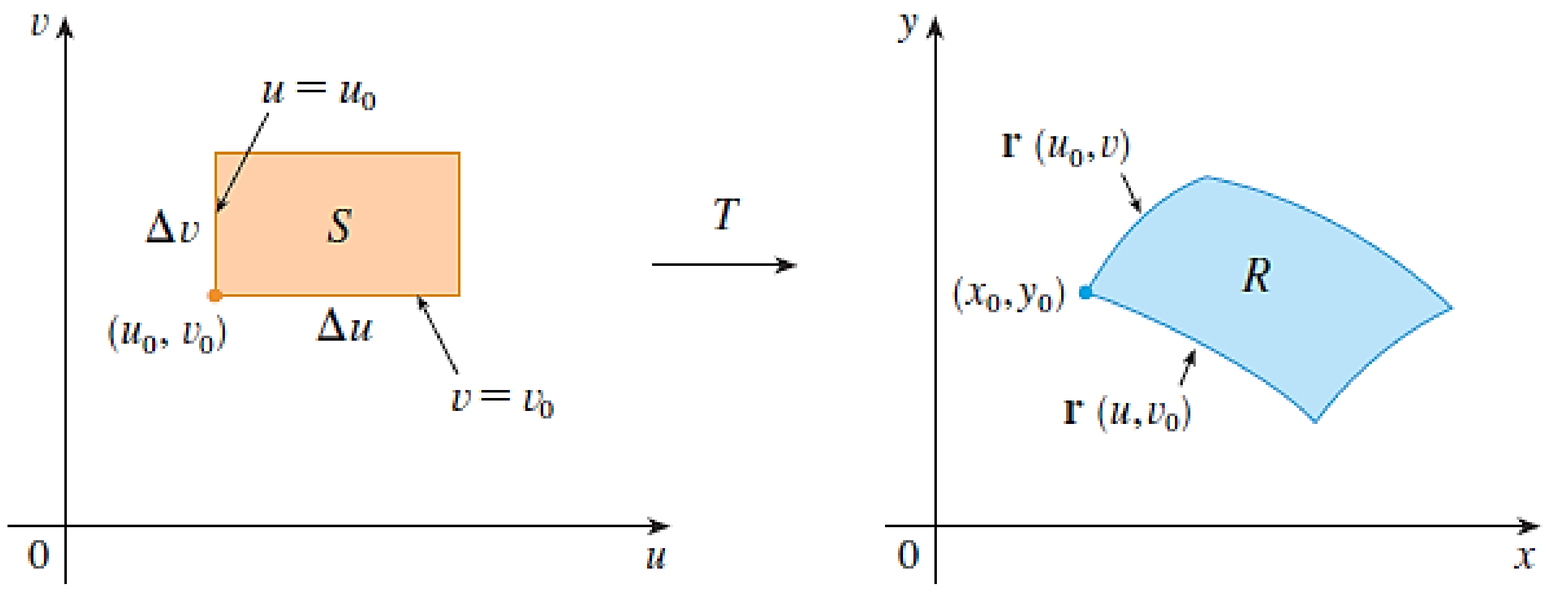
$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Mudança de variável em integrais múltiplas

- Em geral, consideramos **T** uma **transformação C^1**, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Mudança de variável em integrais múltiplas

- Em geral, consideramos **T** uma **transformação C¹**, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.



- Podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \boldsymbol{r}_u$ e $\Delta v\, \boldsymbol{r}_v$.

Mudança de variável em integrais múltiplas

- O produto vetorial entre os vetores $\Delta u\, \boldsymbol{r}_u$ e $\Delta v\, \boldsymbol{r}_v$ leva a um determinante, chamado de jacobiano.

Mudança de variável em integrais múltiplas

- O produto vetorial entre os vetores $\Delta \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{r}_u$ e $\Delta \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{r}_v$ leva a um determinante, chamado de jacobiano.

O jacobiano da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Teorema da mudança de variável

- Suponha que T seja uma transformação cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy.

Teorema da mudança de variável

- Suponha que T seja uma transformação cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy.
- Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II.
- Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S. Então:

Teorema da mudança de variável

- Suponha que T seja uma transformação cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy.
- Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II.
- Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S. Então:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Teorema da mudança de variável

- A integração em coordenadas polares é um caso especial deste teorema.

Teorema da mudança de variável

- A integração em coordenadas polares é um caso especial deste teorema.
- Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por:

$$x = g(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Teorema da mudança de variável

- A integração em coordenadas polares é um caso especial deste teorema.
- Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por:

$$x = g(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

- O jacobiano da transformação será:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r$$

Teorema da mudança de variável

Assim, o Teorema fornece

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

Teorema da mudança de variável

Assim, o Teorema fornece

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\; r\, dr\, d\theta$$

Teorema da mudança de variável

Assim, o Teorema fornece

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\; r\,dr\,d\theta$$

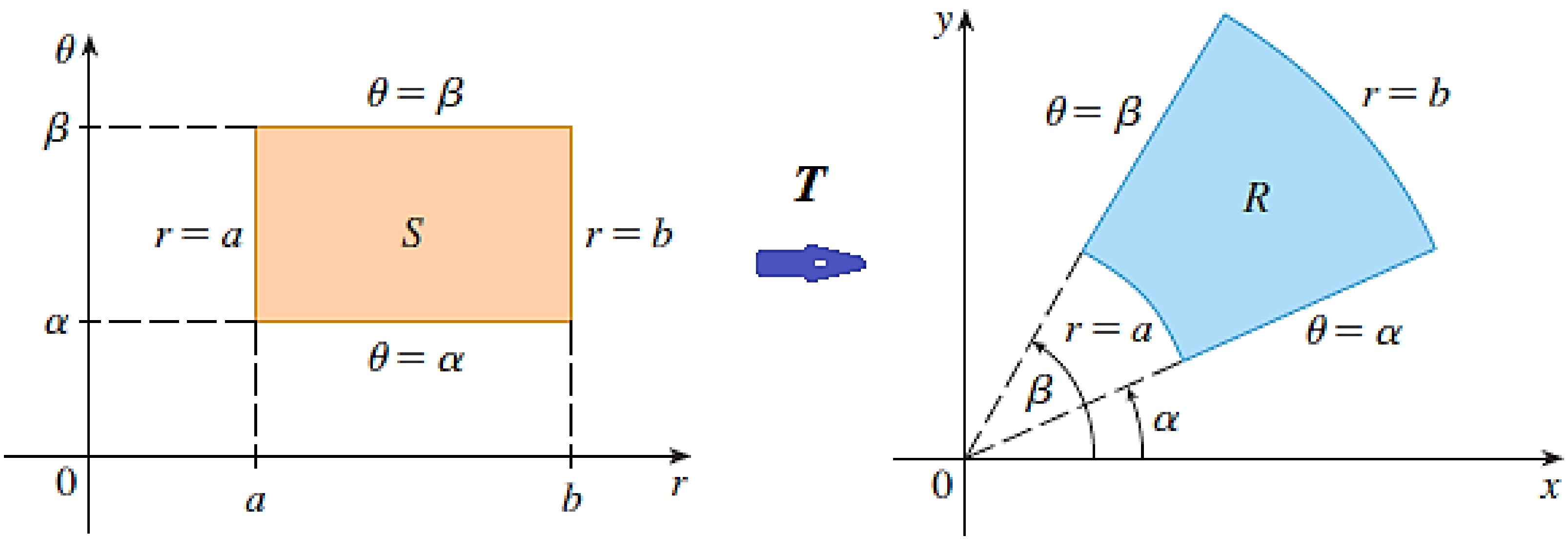


FIGURA 7 Transformação para as coordenadas polares

Mudança de coordenadas

Exemplo 1

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

Mudança de coordenadas

Exemplo 1

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

Solução:

mudança de variáveis sugerida $\quad u = x + y \qquad v = x - y$

Mudança de coordenadas

Exemplo 1

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

Solução:

mudança de variáveis sugerida $\quad u = x + y \qquad v = x - y$

T é obtida isolando-se x e y nas Equações

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

Mudança de coordenadas

Exemplo 1

Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ e $(0, -1)$.

Solução:

mudança de variáveis sugerida $\quad u = x + y \qquad v = x - y$

T é obtida isolando-se x e y nas Equações

$x = \frac{1}{2}(u + v) \qquad y = \frac{1}{2}(u - v)$ O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

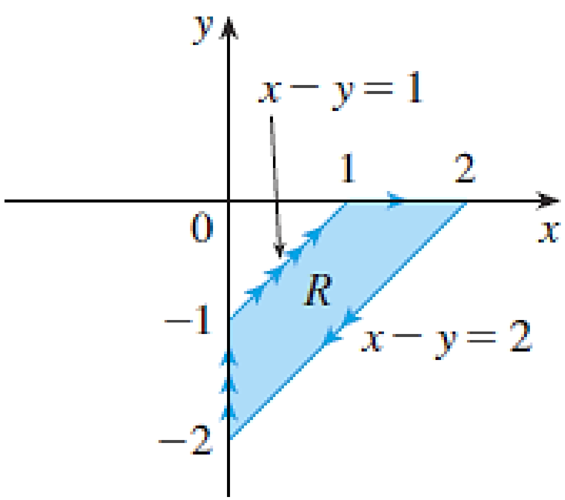
Mudança de coordenadas

Exemplo 1 - solução

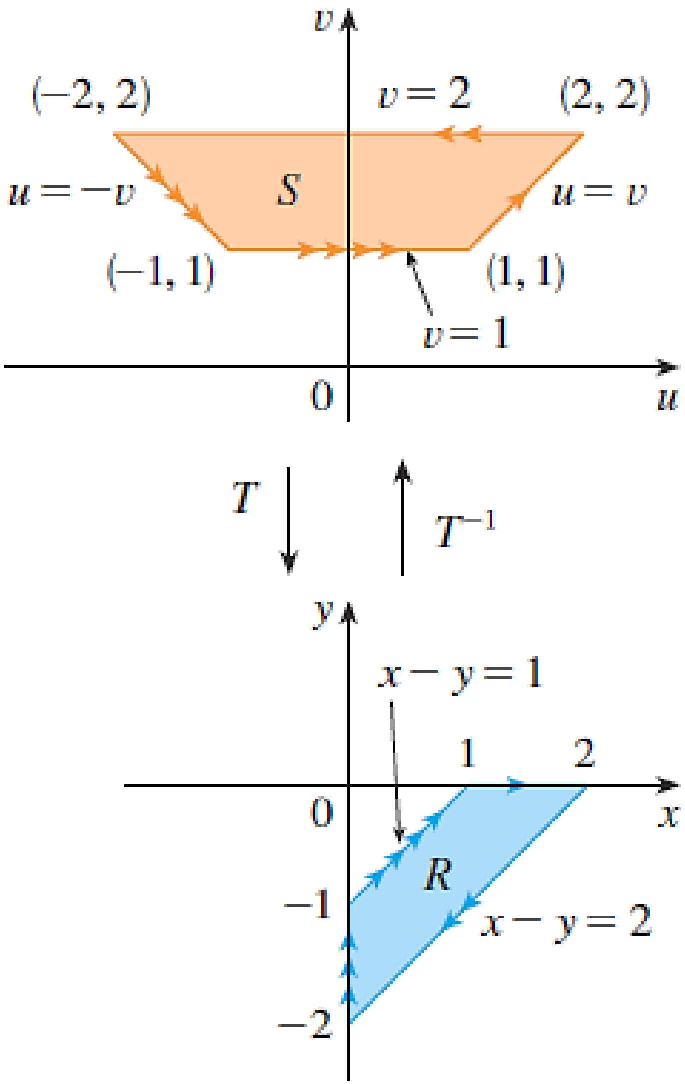
Para determinarmos a região S do plano uv correspondente a R, observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2$$

$$x = 0 \qquad x - y = 1$$



Mudança de coordenadas **Exemplo 1** - solução



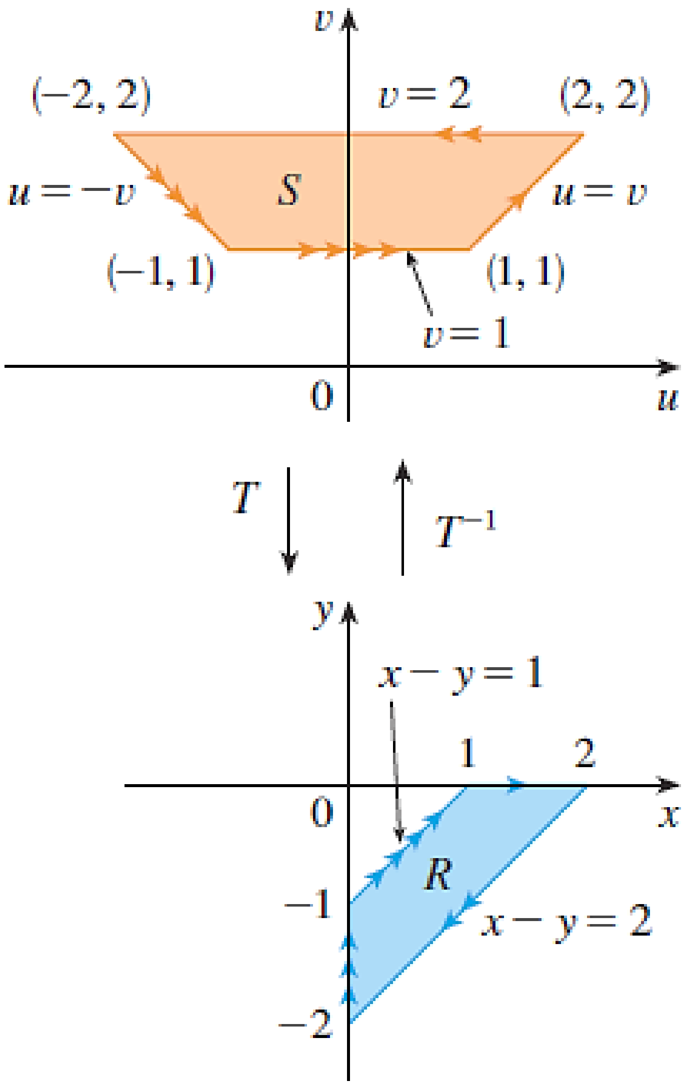
Para determinarmos a região S do plano uv correspondente a R, observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2$$
$$x = 0 \qquad x - y = 1$$

as retas imagem do plano uv são

$$u = v \qquad v = 2$$
$$u = -v \qquad v = 1$$

Mudança de coordenadas **Exemplo 1** - solução



Para determinarmos a região S do plano uv correspondente a R, observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2$$
$$x = 0 \qquad x - y = 1$$

as retas imagem do plano uv são

$$u = v \qquad v = 2$$
$$u = -v \qquad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1), (2, 2), (-2, 2)$ e $(-1, 1)$

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}$$

Mudança de coordenadas

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Mudança de coordenadas

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\, dv = \tfrac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

Mudança de coordenadas

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA = \iint_S e^{u/v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right)du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{u/v}\right]_{u=-v}^{u=v}dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\,dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1})$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.10 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

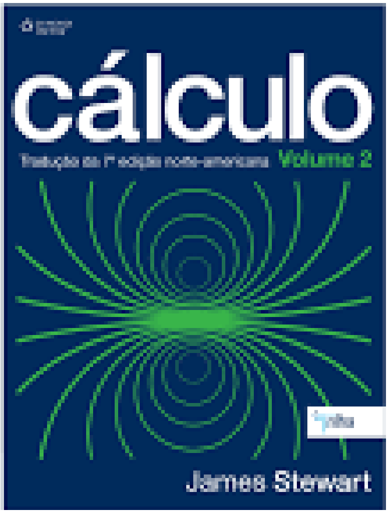
Próxima aula:

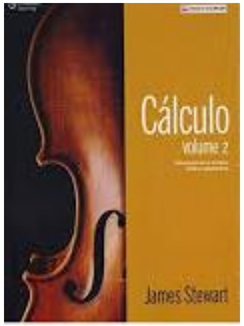
- Funções vetoriais.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ►





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br