Cálculo I
Licenciatura

Integração
definições

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Integração

- Iniciaremos o estudo da integração através do **problema de determinação de áreas**;

- O objetivo é entendermos o que é uma **integral definida** e em seguida **a integral indefinida**;

- Finalmente, estudaremos o **Teorema Fundamental do Cálculo** que estabelece a conexão entre derivação e integração.

6.4 Definição de área como limite

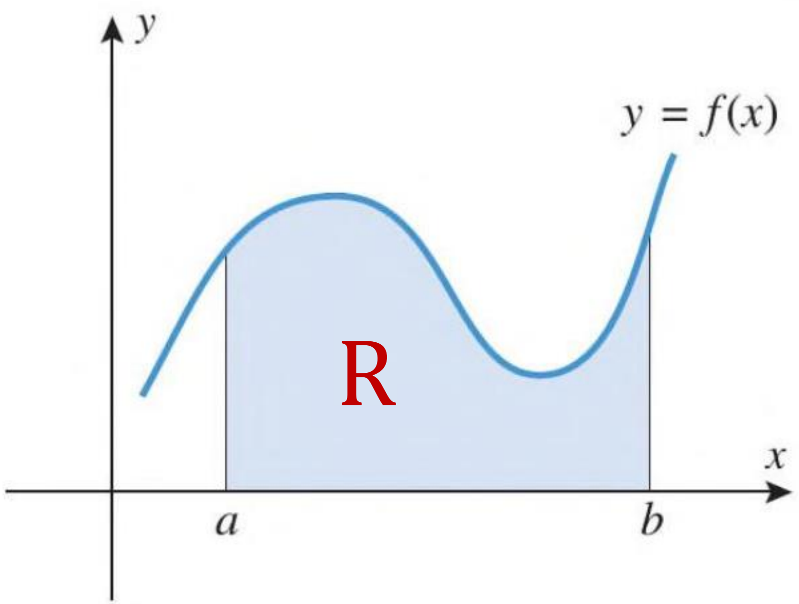
- Seja a função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada com região R.

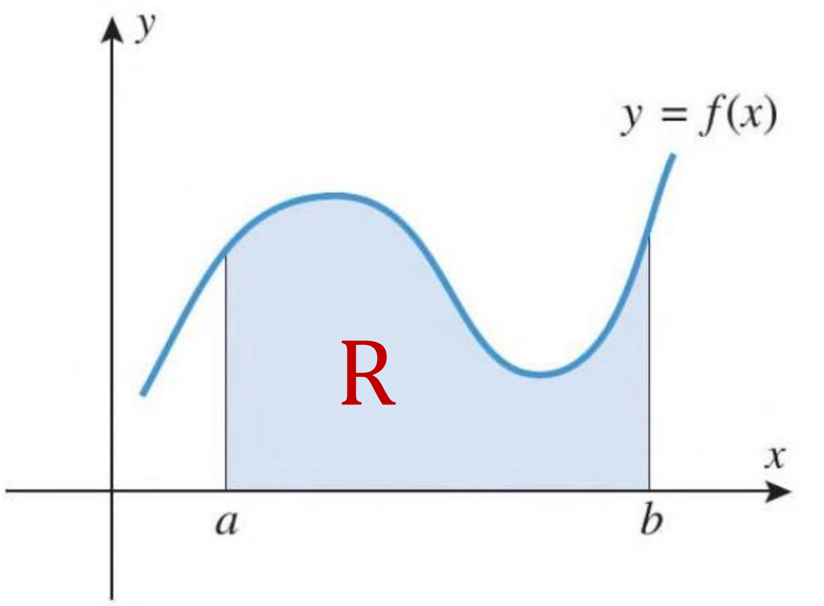


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$ será denotada com região R.

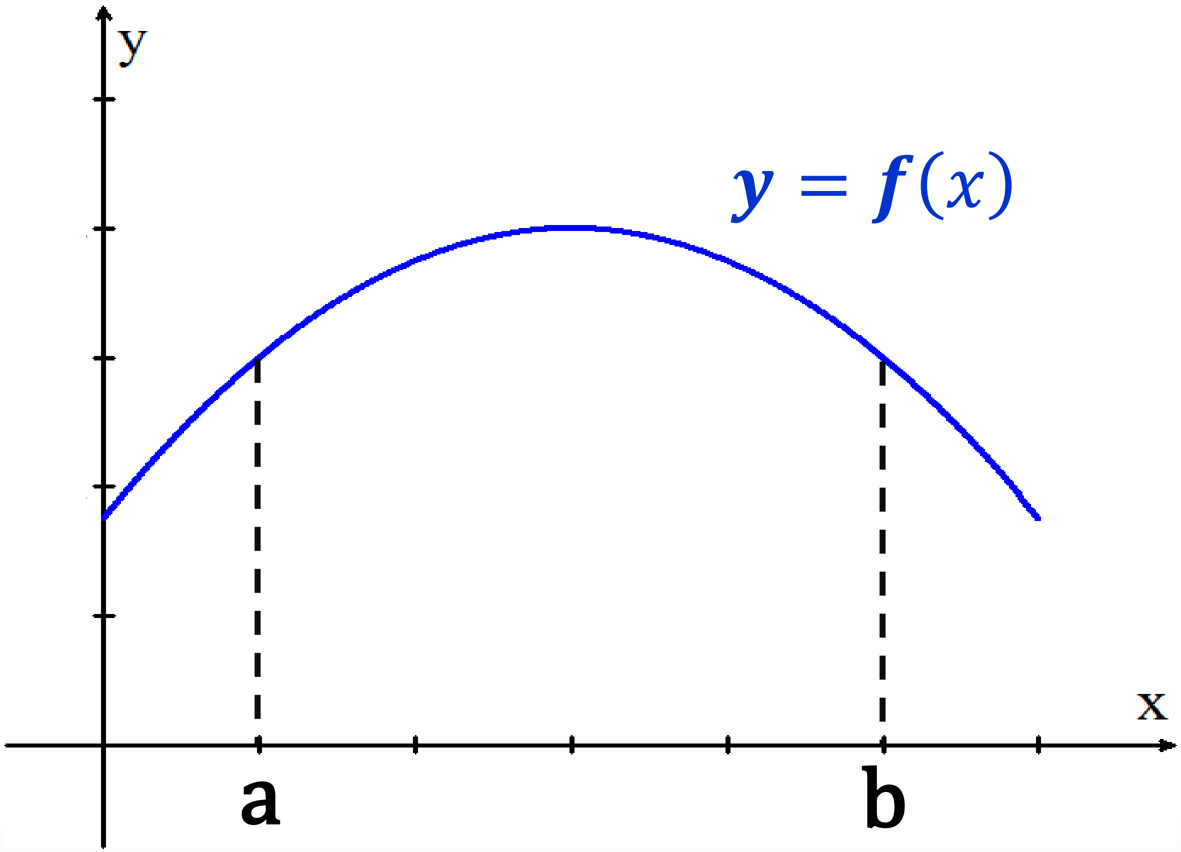


Como podemos calcular a área de R?

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

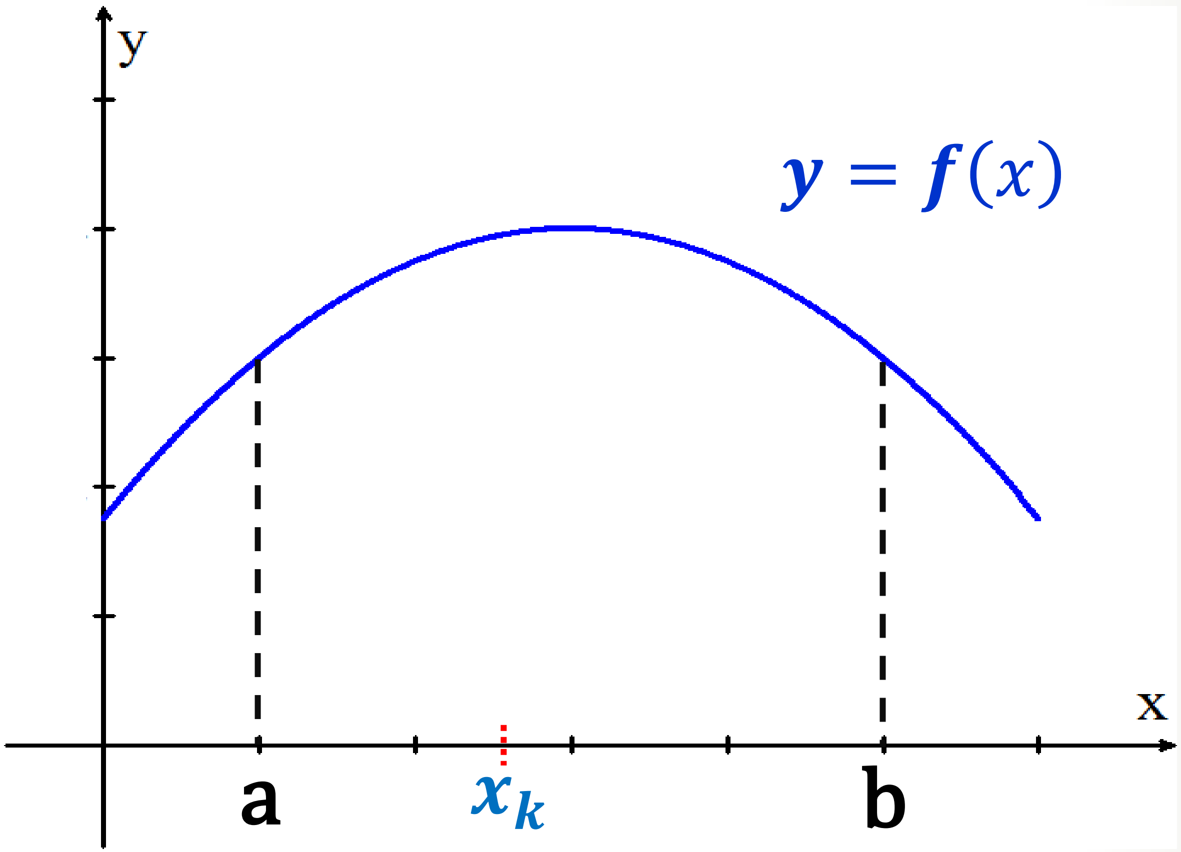
Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$



6.4 Definição de área como limite

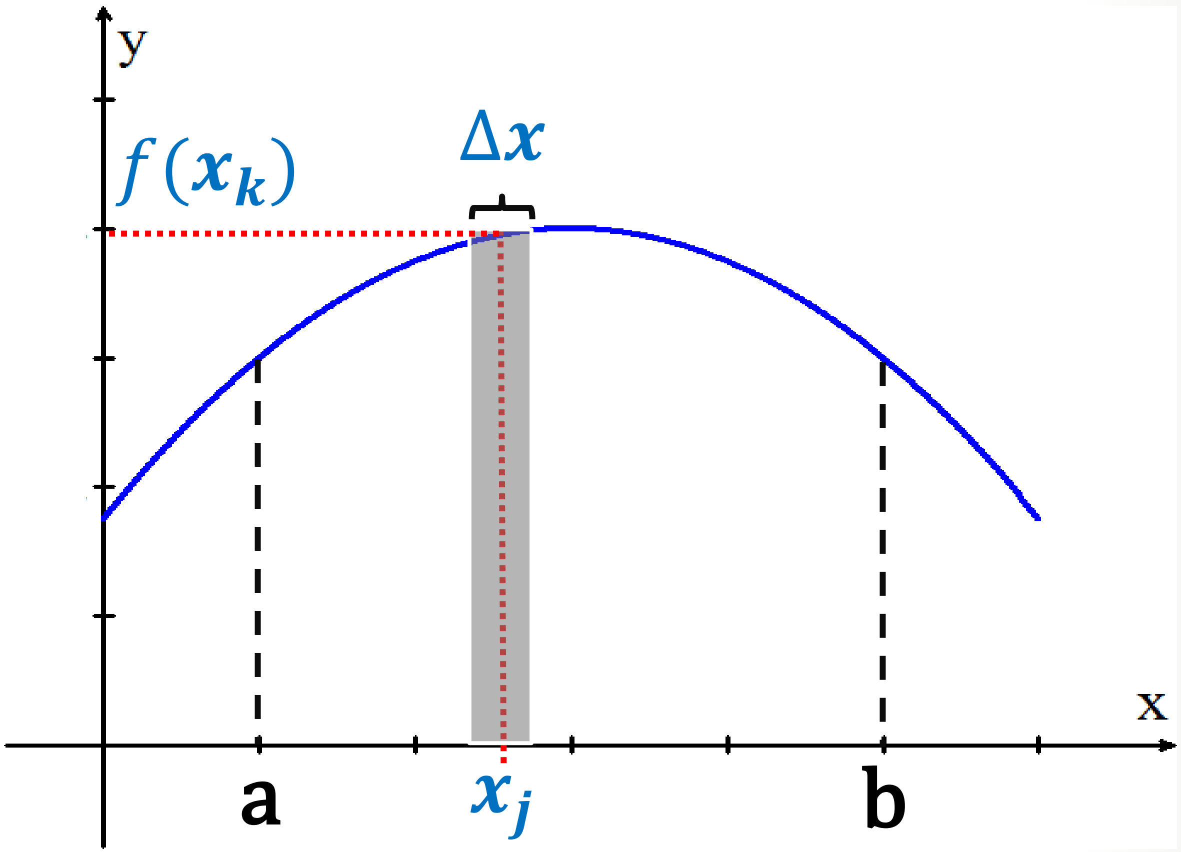
- O intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ será dividido em $\boldsymbol{n}$ subintervalos, de larguras iguais $\Delta\boldsymbol{x}$.

- $\boldsymbol{x_k}$ é um ponto qualquer do subintervalo.



6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

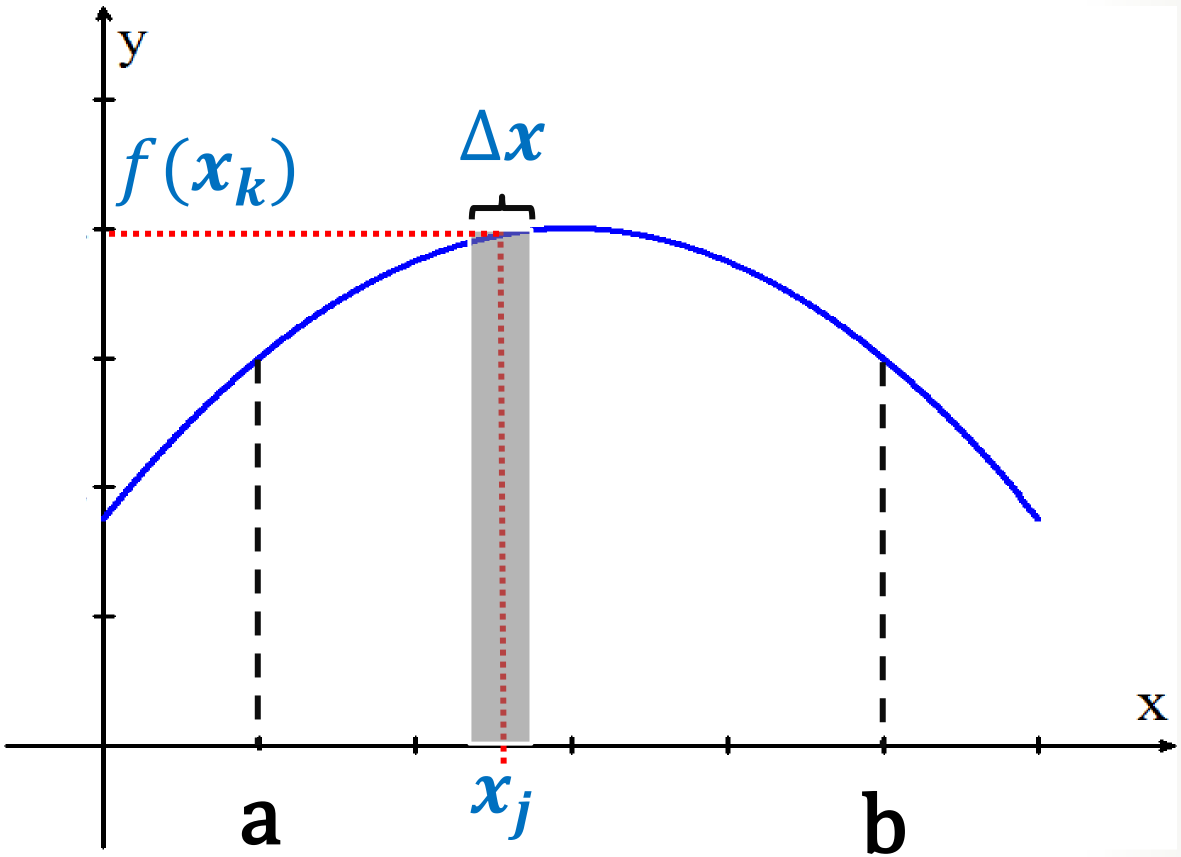


6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

- A área de cada retângulo será:

$$A_k = f(x_k)\Delta x$$

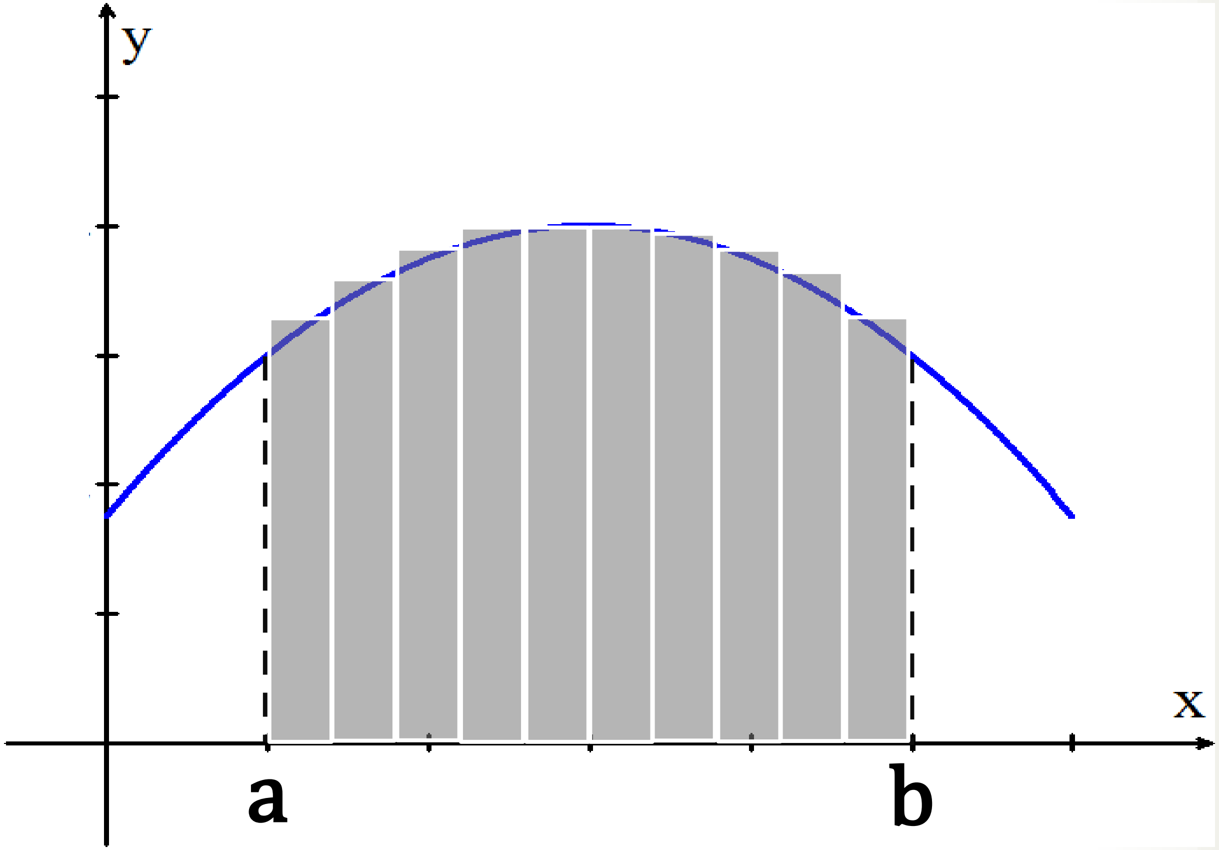


6.4 Definição de área como limite

- A soma das áreas dos n retângulos é o somatório:

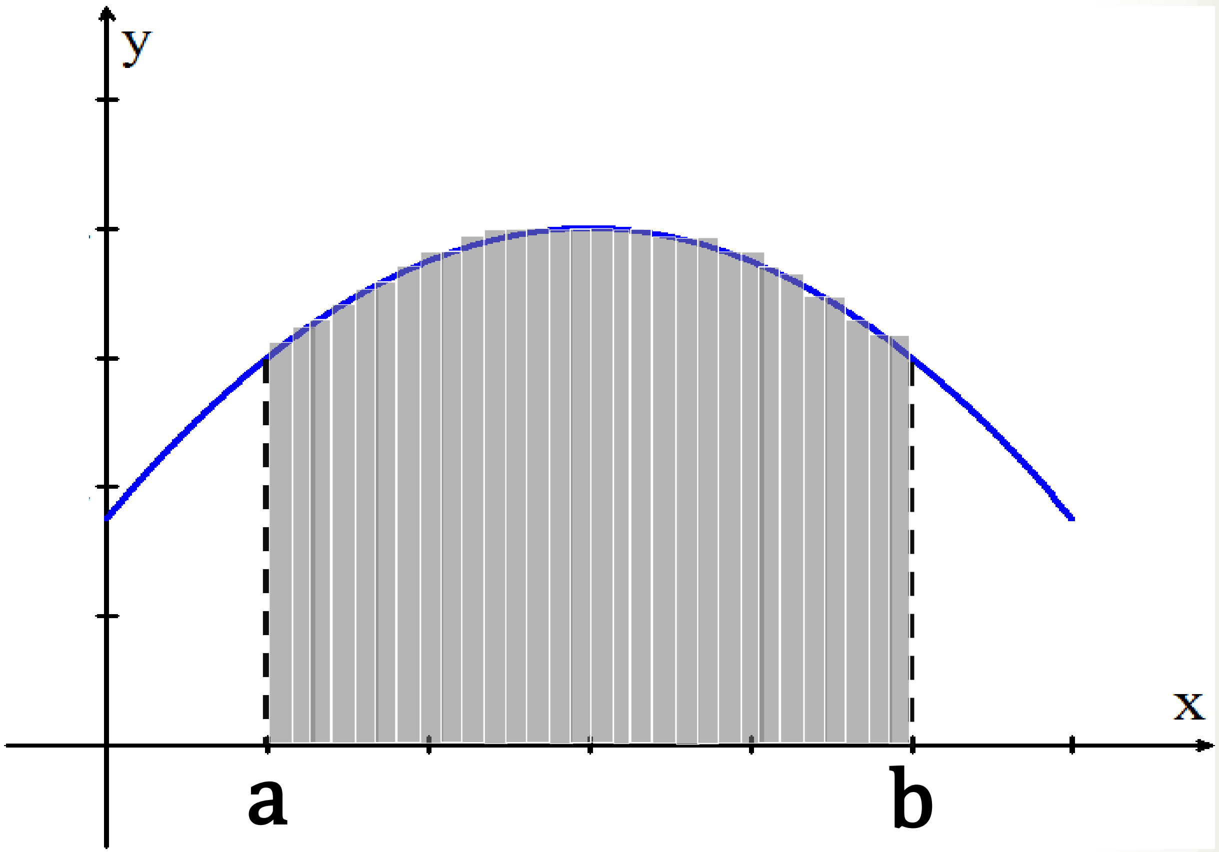
$$A_R \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Chamada de **soma de Riemann**

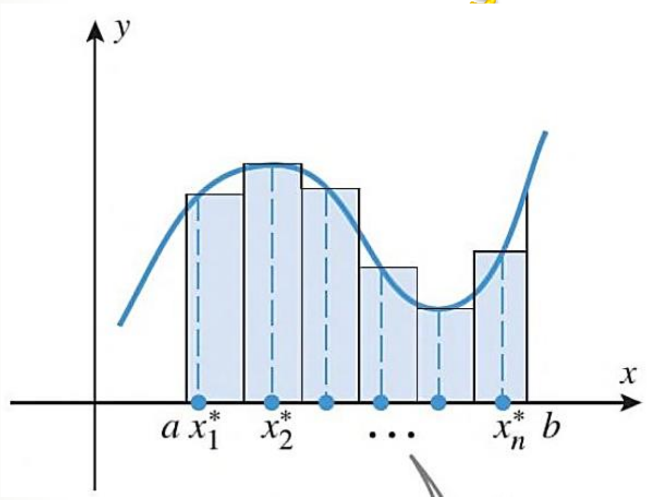


6.4 Definição de área como limite

- Quando n cresce para o infinito o somatório dos retângulos tende para a área A sob a curva no intervalo $[a, b]$.

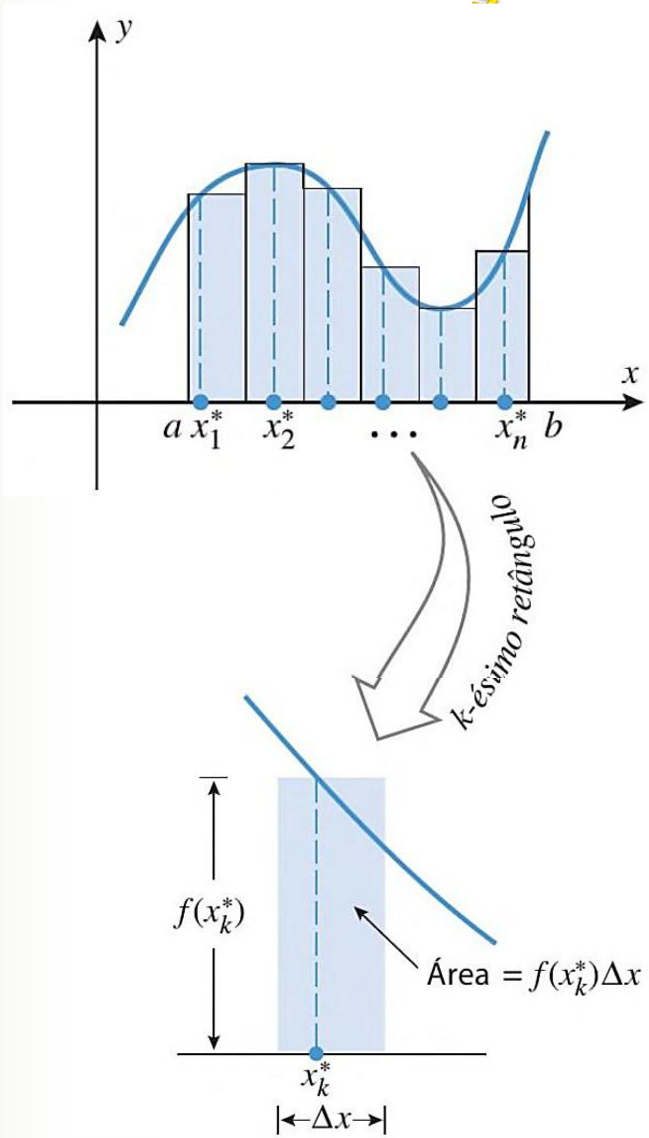


6.4 Definição de área como limite



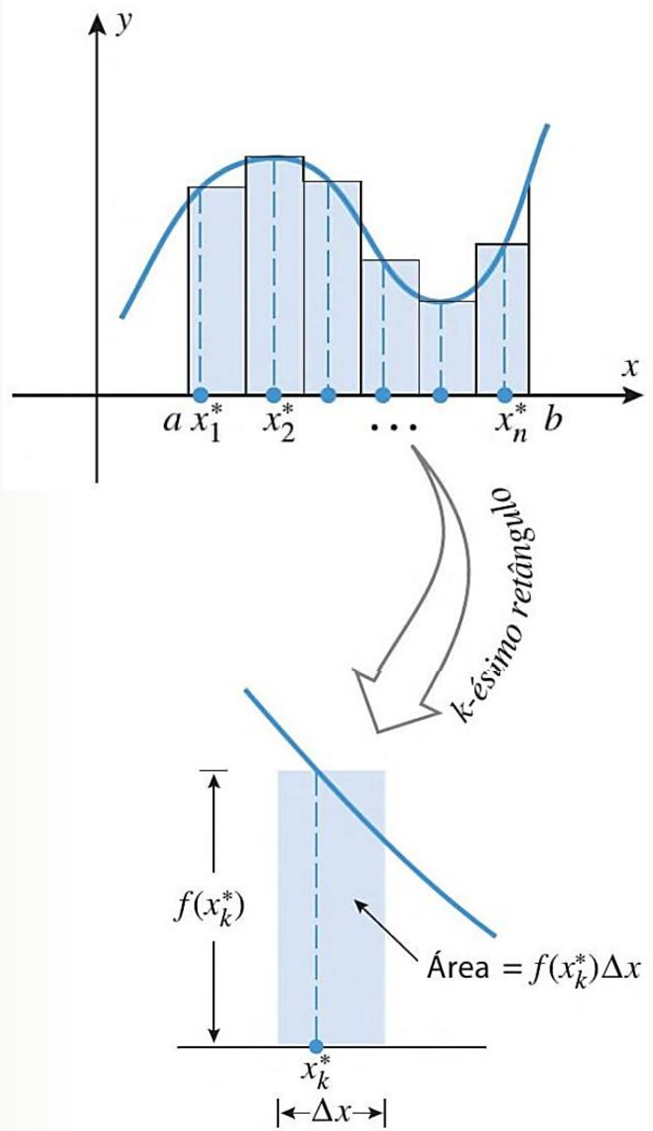
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite



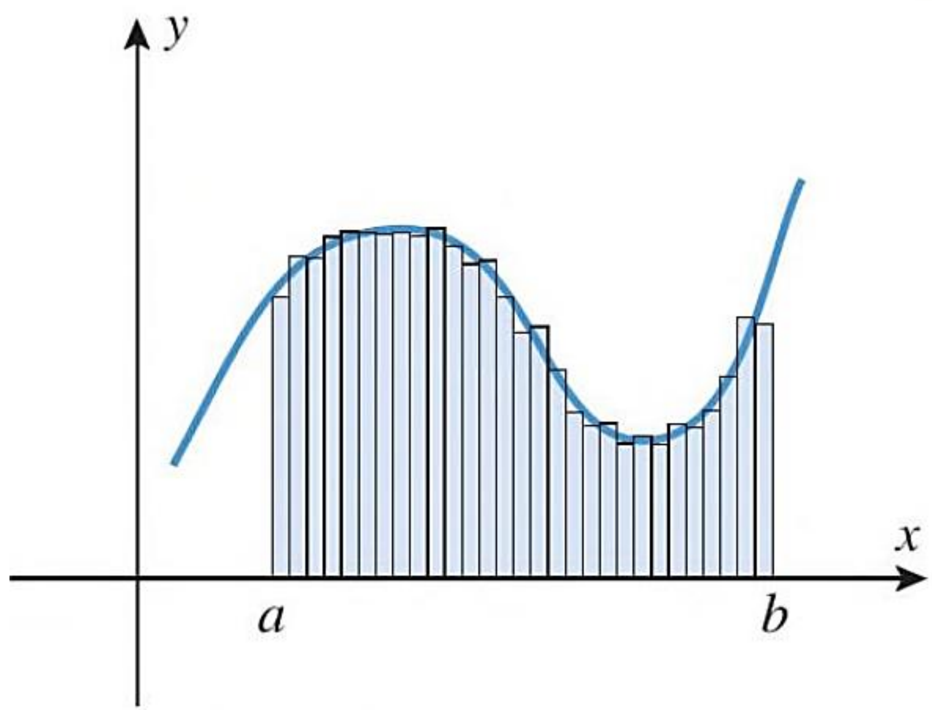


Figura 5.4.5 área $(R_n) \approx$ área (R)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

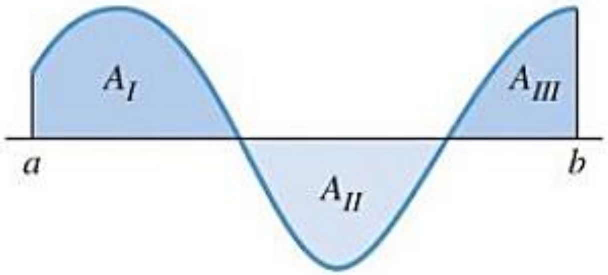
5.4.3 DEFINIÇÃO ***(Área Sob uma Curva)*** Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ em cada x de $[a, b]$, então a ***área*** sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (2)$$

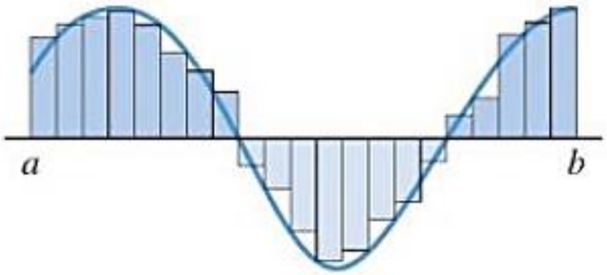
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

- Se a função f for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$;



(a)

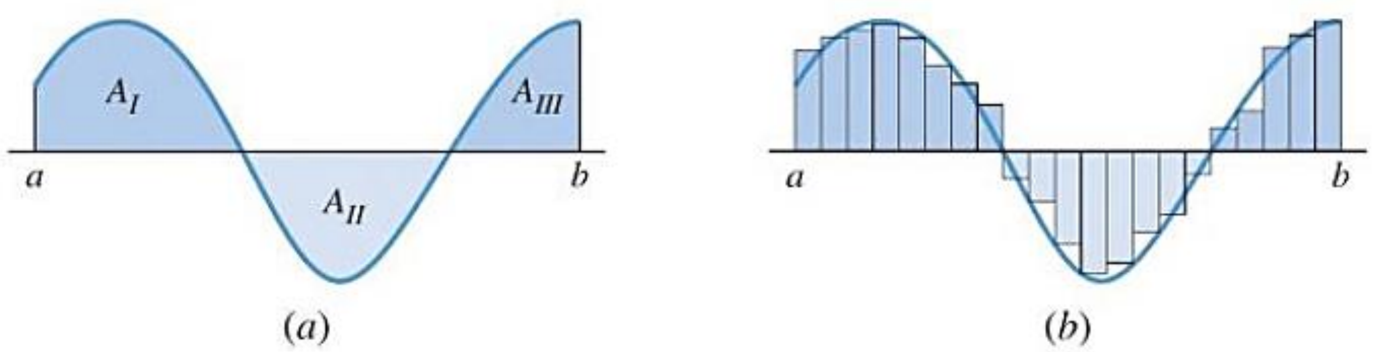


(b)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

- Se a função *f* for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo [a, b];



- Então a diferença entre as áreas acima e abaixo da curva de *f* será chamada de **área líquida com sinal** no intervalo [a, b];

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

5.4.5 DEFINIÇÃO ***(Área Líquida com Sinal)*** Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a ***área líquida com sinal*** A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{9}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

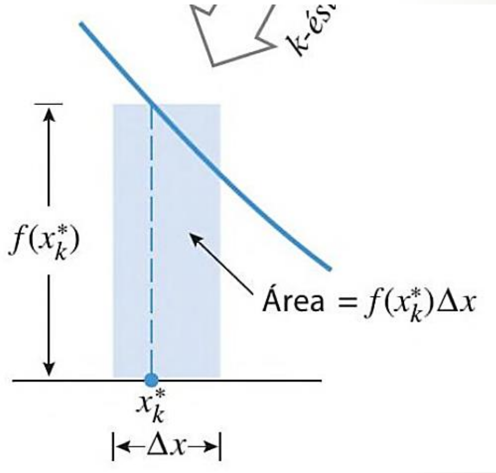
- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos ;

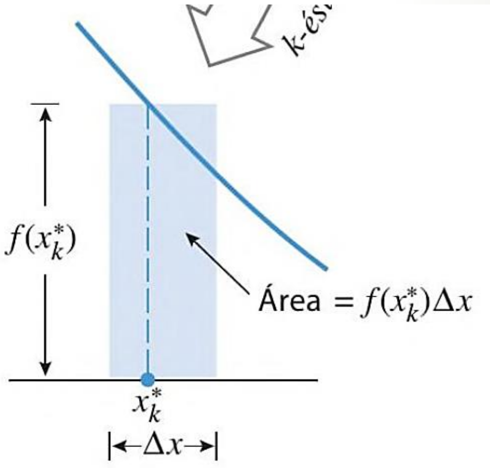


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos ;



- Este tipo de divisão é chamado partição regular.

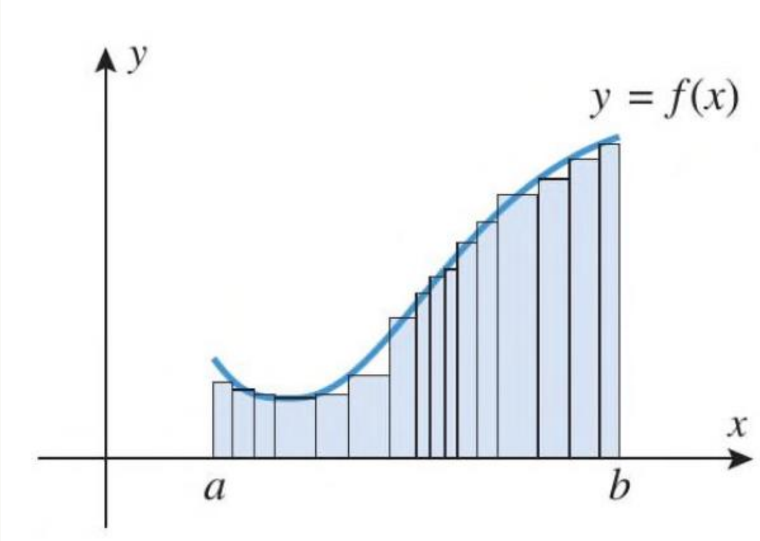
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando ***n*** cresce;

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando $\boldsymbol{n}$ cresce;

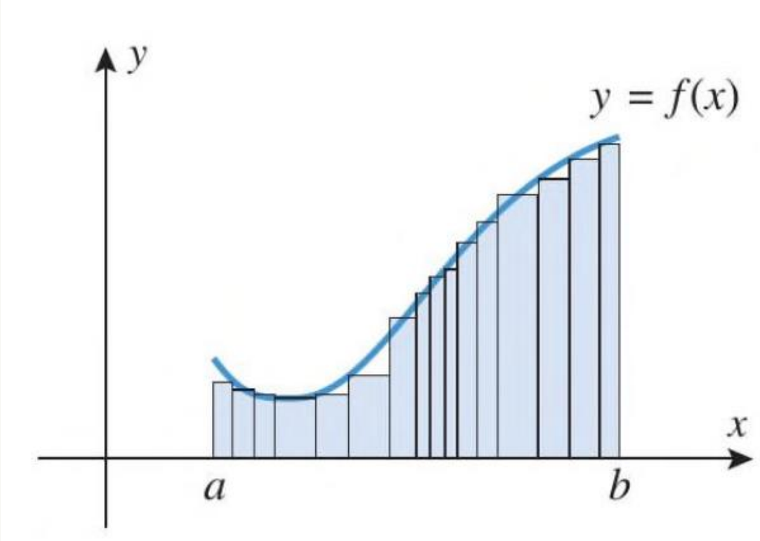


- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis $\boldsymbol{\Delta x_k}$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando $\boldsymbol{n}$ cresce;



- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k;

- Trocaremos também a expressão $\boldsymbol{n} \to \infty$ por $\text{Max}\,\Delta x_k \to 0$, de modo a garantir que as larguras de todos subintervalos tendam a zero.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***integrável*** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***integrável*** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

que é denominado ***integral definida*** de f de a até b. Os números a e b são denominados ***limite de integração inferior*** e ***limite de integração superior***, respectivamente, e $f(x)$ é denominado ***integrando***.

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo [a, b], então f será integrável em [a, b] e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo [a, b] será*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo [a, b], então f será integrável em [a, b] e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo [a, b] será*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Pode-se mostrar que se a função $\boldsymbol{y = f}(x)$ for contínua no intervalo [a, b], então será integrável.

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Que é a definição de uma integral de uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k}$$

Exemplos, calcular as integrais.

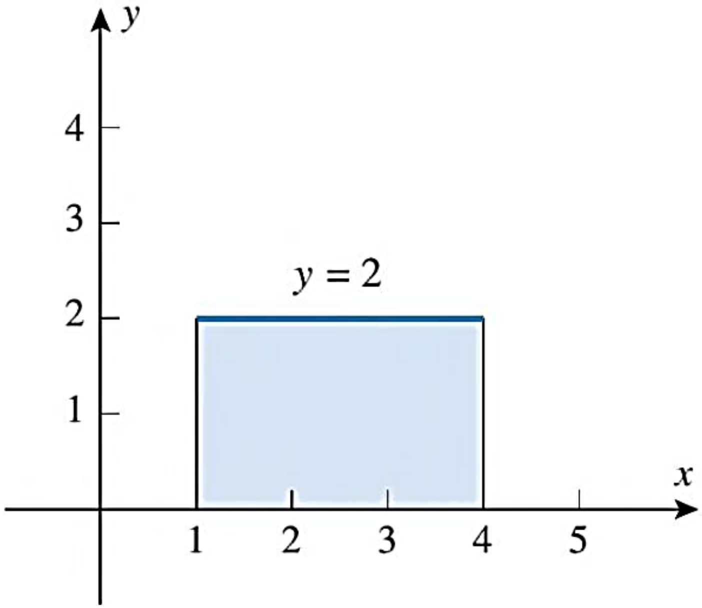
a. $\int_1^4 2dx$

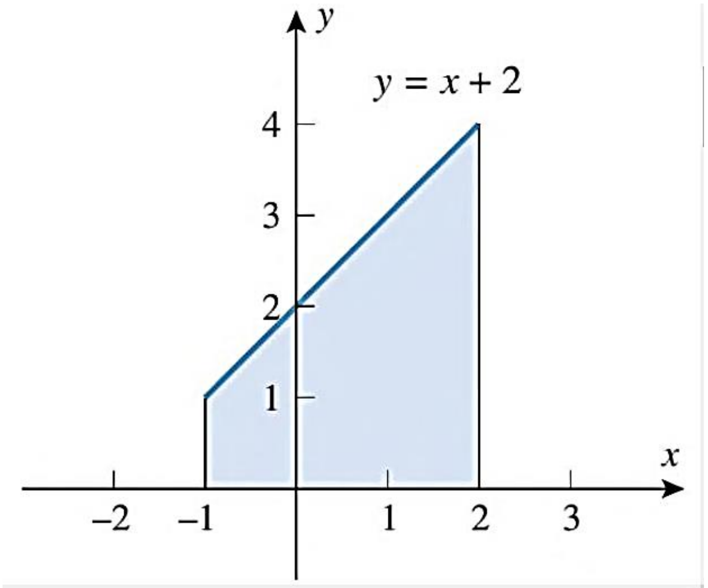
b. $\int_1^4 (x+2)dx$

Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2dx$

b. $\int_1^4 (x+2)dx$





Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Propriedades da integral definida

5.5.3 DEFINIÇÃO

(a) Se a estiver no domínio de f, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(b) Se f for integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedades da integral definida

5.5.4 TEOREMA *Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf, $f+g$ e $f-g$ serão integráveis em $[a, b]$ e*

(a) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

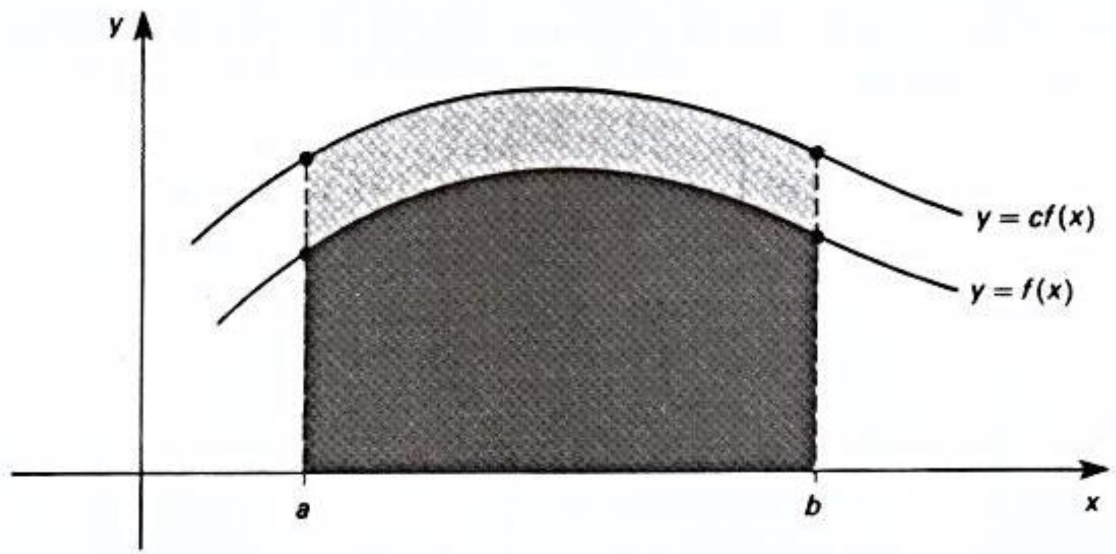
(b) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

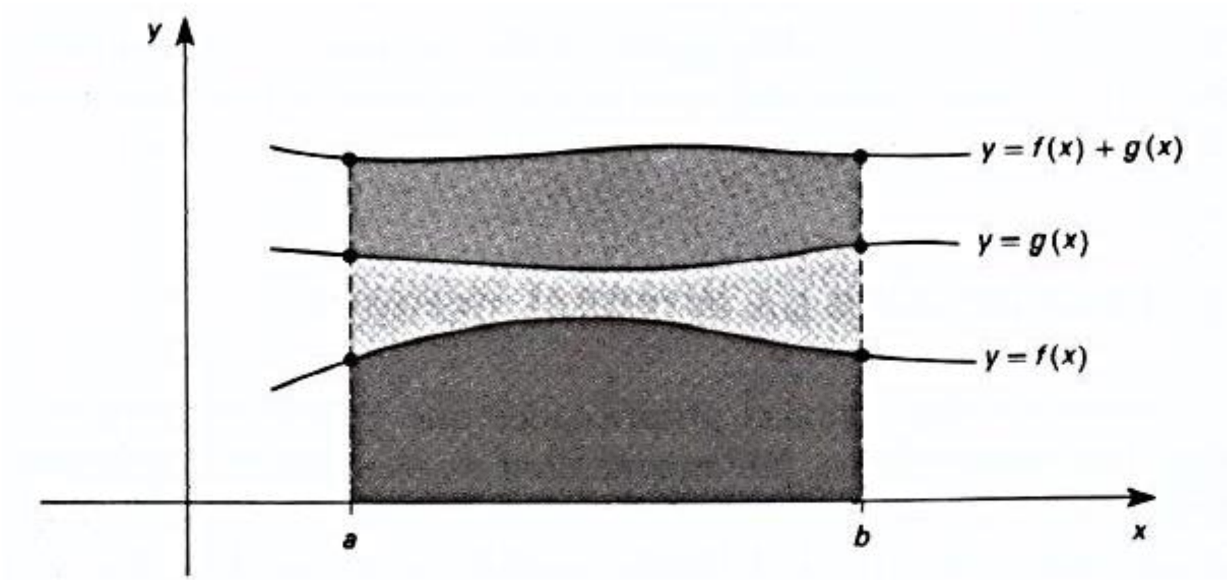
1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$



Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

2. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$



6.4 Definição de área como limite

5.5.5 TEOREMA *Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então*

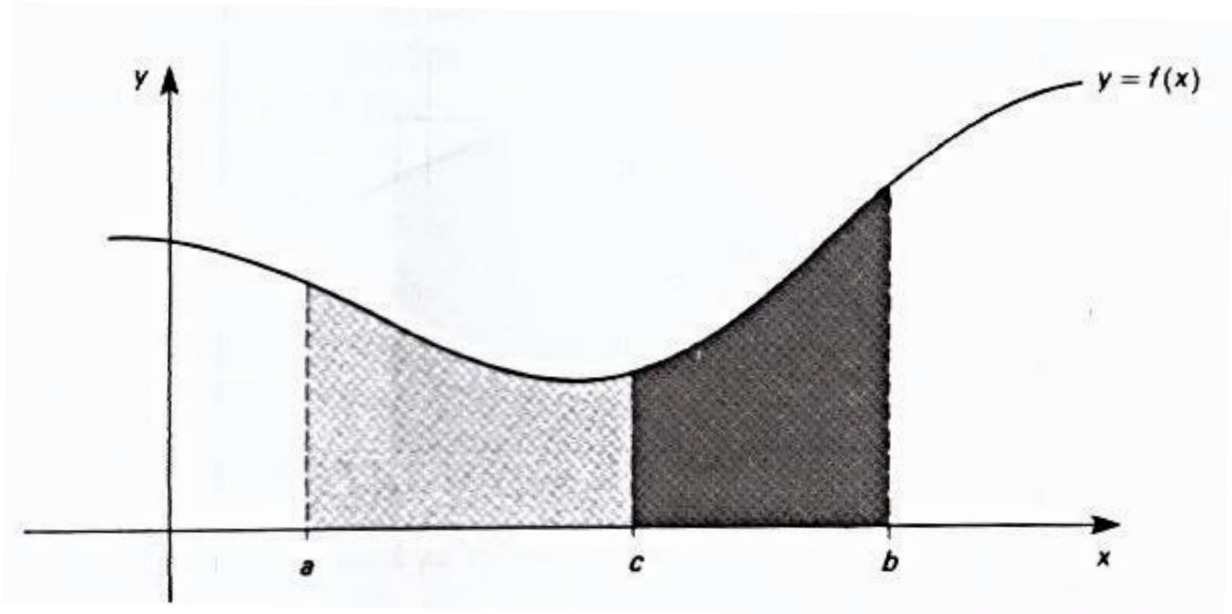
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

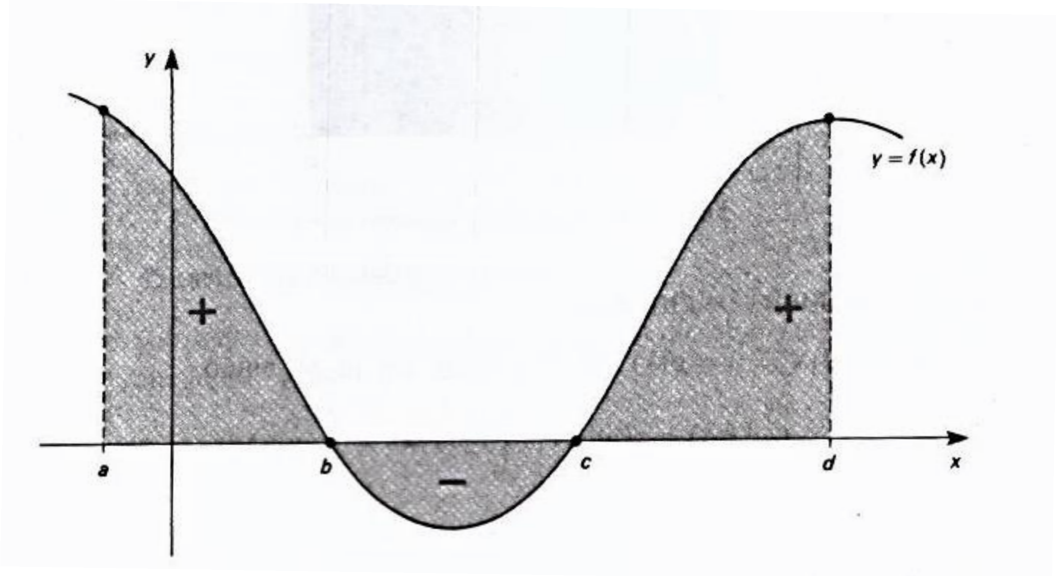
Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

3. $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\quad$ $com: \ a \leq c \leq b$



6.5 Integral definida e área líquida



$$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

$$\text{Área líquida} = A_{ab} - A_{bc} + A_{cd}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:
- ✓ Essa relação é conhecida como o **Teorema Fundamental do Cálculo:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;
- Fornece a precisa relação inversa entre a derivada e a integral;
- O teorema é apresentado em duas partes.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1)*** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA **(*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*)** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma ***antiderivada*** de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.3 TEOREMA **(*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2*)** *Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \tag{11}$$

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C, a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C.*

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C, a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C.*

A integral de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais uma constante.

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$
2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
3. $\frac{d}{dx}[\text{sen } x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \text{sen } x + C$
4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \text{sen } x$	$\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + C$
5. $\frac{d}{dx}[\text{tg } x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg } x + C$
6. $\frac{d}{dx}[-\text{cotg } x] = \text{cossec}^2 x$	$\int \text{cossec}^2 x\,dx = -\text{cotg } x + C$
7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \text{ tg } x$	$\int \sec x \text{ tg } x\,dx = \sec x + C$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
8. $\frac{d}{dx}[-\text{cossec}\, x] = \text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x$	$\int \text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x \, dx = -\text{cossec}\, x + C$
9. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
10. $\frac{d}{dx}\left[\frac{b^x}{\ln b}\right] = b^x \quad (0 < b,\ b \neq 1)$	$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b,\ b \neq 1)$
11. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert x \rvert] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
12. $\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, x] = \frac{1}{1 + x^2}$	$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \text{arc tg}\, x + C$
13. $\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \text{arc sen}\, x + C$
14. $\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, \lvert x \rvert] = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \text{arc sec}\, \lvert x \rvert + C$

Integral indefinida - propriedades

5.2.3 TEOREMA *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, e c uma constante. Então:*

(a) *Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,*

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + C$$

(b) *Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$$

(c) *Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = F(x) - G(x) + C$$

Integral indefinida - propriedades

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Síntese dos conceitos

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, a área entre a curva de $\boldsymbol{f}(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

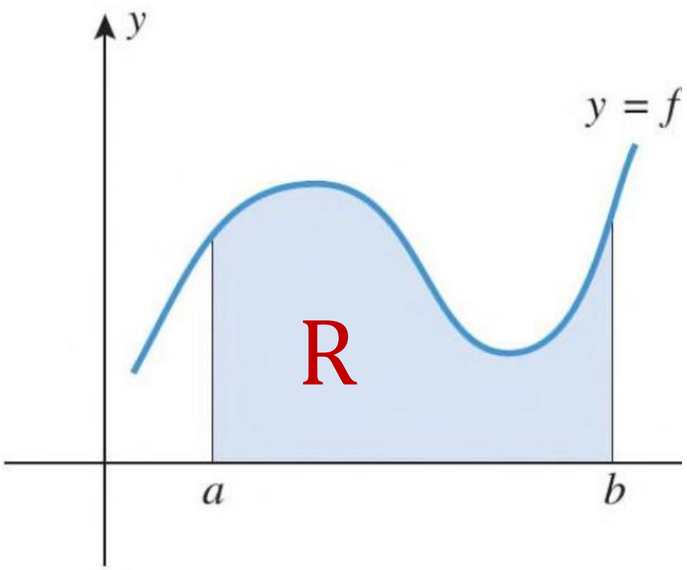
$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{dx}$$

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, a área entre a curva de $\boldsymbol{f}(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

$$\boxed{\int_{a}^{b} \boldsymbol{f}(x)\,\boldsymbol{dx}}$$

Integral definida



ÁreaR= $\int_{a}^{b} \boldsymbol{f}(x)\,\boldsymbol{dx}$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$, tal que $\boldsymbol{F}'(x) = f(x)$.

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y = F(x)}$, tal que $\boldsymbol{F'}(x) = f(x)$.

- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\boxed{\int \boldsymbol{f(x)dx}}$$

Integral Indefinida

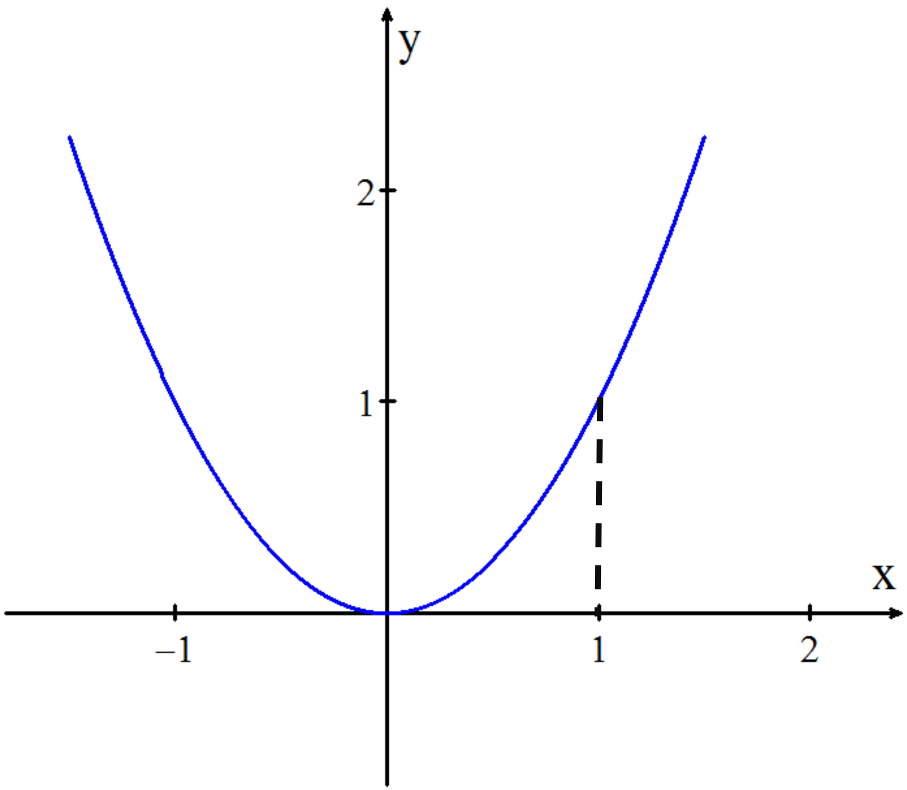
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_{1}^{3} e^{x} dx$

b. $\int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx$

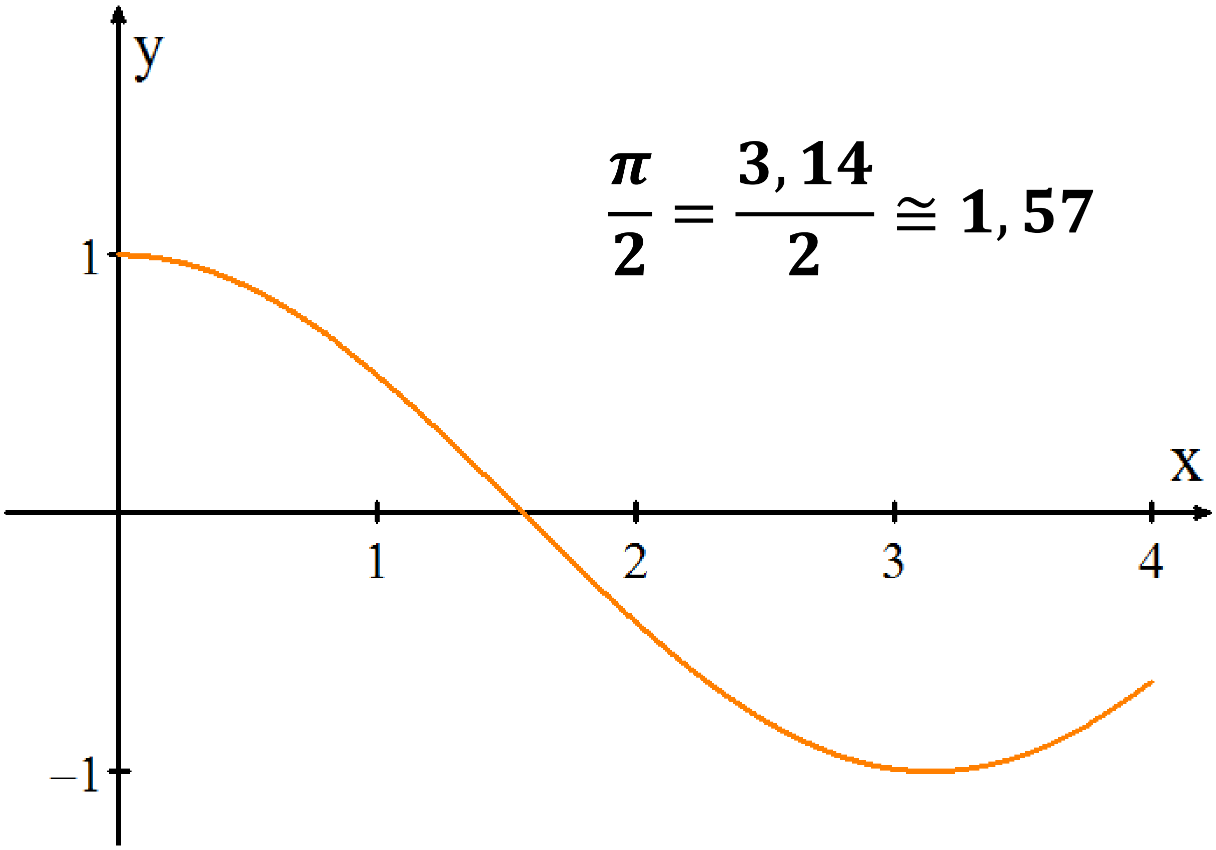
Exemplos, calcular as integrais.

c. $\int_0^1 x^2\,dx = \textit{Área sob a parábola } y = x^2$



Exemplos, calcular as integrais.

d. $\int_0^{\pi/2} cosx\, dx$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} \cong 1,57$$

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula.

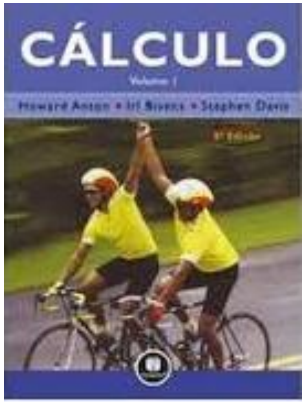
Próxima aula:

- Integração por substituição.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br