Cálculo I

Licenciatura

Regras para Integração

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Relembrando conceitos

Teorema fundamental do cálculo

- Ambas as partes do **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelecem conexões entre as antiderivadas e as integrais.

- Relembrando o Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema fundamental do cálculo

Se $\boldsymbol{f}$ for contínua em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e $\boldsymbol{F(x)}$ for antiderivada de $\boldsymbol{f}$ em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, então:

Teorema fundamental do cálculo

Se $\boldsymbol{f}$ for contínua em $[a, b]$ e $\boldsymbol{F(x)}$ for antiderivada de $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$, então:

Parte 1.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental do cálculo

Se $\boldsymbol{f}$ for contínua em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e $\boldsymbol{F(x)}$ for antiderivada de $\boldsymbol{f}$ em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, então:

Parte 1.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Parte 2.

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

Em que $\boldsymbol{F}$ é a antiderivada de $\boldsymbol{f}$, ou: $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

1 Integral indefinida

A integral indefinida é uma notação para expressar a **antiderivada ou primitiva de uma função**:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

significa: $F'(x) = f(x)$

C é uma constante

1 Integral indefinida

A integral indefinida é uma notação para expressar a **antiderivada ou primitiva de uma função:**

$$\boxed{\int f(x)dx = \underbrace{F(x) + C}}$$

significa: $F'(x) = f(x)$

C é uma constante

Antiderivada ou primitiva de $f(x)$

Exemplo – determinar $f(x)$

a. **Seja** $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

Exemplo – determinar $f(x)$

a. **Seja** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2$

Exemplo – determinar $f(x)$

a. **Seja** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2$

- Mas, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de $f(x)$;

Exemplo – determinar $f(x)$

a. **Seja** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2$

- Mas, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de $f(x)$;
- Ao ser somada uma constante C a $F(x)$, também tem-se outra antiderivada:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \rightarrow F'(x) = f(x) = x^2$$

Integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\Downarrow$

Família de funções

C é uma constante

Integral indefinida

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

Família de funções

$\boldsymbol{C}$ é uma constante

Integral definida

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{dx} = F(\mathrm{b}) - F(\mathrm{a})$$

Número Real

2 Principais antiderivadas (primitivas)

- $\int k dx = kx + C$ $\quad$ k, C são constantes
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad$ $n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$
- $\int senx\, dx = -cosx + C$
- $\int cosx\, dx = senx + C$

Exemplos – encontrar a primitiva. Que é o mesmo que resolver a integral indefinida.

$$a)\ \int 4\, cos x\, dx$$

$$b)\ \int (x + x^2)\, dx$$

$$c)\ \int \left(\frac{t^2 - 2t^4}{t^4}\right) dt$$

$$d)\ \int \left(\sqrt{1 + x^2}\right) 2x\, dx$$

Para resolver esta integral teremos que utilizar a técnica da substituição de variável.

$$d)\quad \int \left(\sqrt{1+x^2}\right) 2x\,dx$$

Técnicas de integração

Técnicas de integração

- Possibilitam a resolução de **integrais que não possuem uma primitiva imediata**;
- São equivalentes inversas das técnicas de derivação;

Técnicas de integração

- Possibilitam a resolução de **integrais que não possuem uma primitiva imediata**;
- São equivalentes inversas das técnicas de derivação;
- Duas dessas técnicas, **constante vezes uma função e soma de funções na derivada**, ficaram evidentes nas **propriedades das integrais**;
- **Resta então**, definir as **técnicas correspondentes** à **regra do produto**, **da cadeia** e **do quociente**.

Integração por substituição ou mudança de variável

A – Integração por substituição

Se uma função $F = F(g(x))$, depender de outra função, então pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'\big(g(x)\big)g'(x)$$

A – Integração por substituição

Se uma função $F = F(g(x))$, depender de outra função, então pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Calculando-se a integral da derivada retorna-se a primitiva

$$\int F'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

A – Integração por substituição

Substituindo $g(x) = u \;\rightarrow\; du = g'(x)dx$, tem-se:

$$\int F'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int F'(u)\,du = F(u) + C$$

A – Integração por substituição

Substituindo $g(x) = u \rightarrow du = g'(x)dx$, tem-se:

$$\int F'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int F'(u)\,du = F(u) + C$$

Como $F' = f$:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

A – Integração por substituição

Se $g(x) = u$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo [a, b] e f for contínua em [a, b]:

$$\int \boldsymbol{f(g(x))g'(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(u)du}$$

A – Integração por substituição

Se $g(x) = u$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo [a, b] e f for contínua em [a, b]:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du$$

Essa técnica funciona sempre que a integral puder ser escrita na forma:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Exemplo – Resolver por substituição de variável

$$\mathbf{2d)} \rightarrow \boldsymbol{a)} \quad \int \left(\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\right) \mathbf{2}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$$

Exemplo 2 – Resolver por substituição de variável

$$a) \int (x^2 + 1)^{50}\, 2x\, dx$$

$$b) \int cos(5x)\ dx$$

$$c) \int \frac{1}{(x-8)^5} dx$$

$$d) \int sen^2x\, cosx\, dx$$

B – Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:

B – Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:

1. Calcular primeiro a **integral indefinida** com substituição; **voltar a variável original** e avaliar nos limites.

B – Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:

1. Calcular primeiro a **integral indefinida** com substituição; **voltar a variável original** e avaliar nos limites.

2. **Ajustar os limites de integração** na substituição da variável. (mais direto)

Teorema para o método 2

5.9.1 TEOREMA *Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ com $a \leq x \leq b$, então*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 3 – Resolver por substituição de variável utilizando-se dos dois procedimentos

$$a)\ \int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx$$

$$b)\ \int_0^{ln3} e^x(1+e^x)^{1/2}\,dx$$

Para depois desta aula:

- Reler o tópico da aula no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Acessar a lista de exercícios no link: site lista.

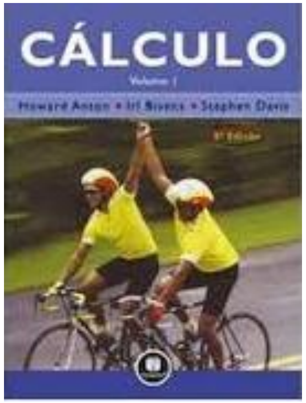
Próxima aula:

- Integração por partes.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br