Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 12 - Aula 1
Funções vetoriais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Funções vetoriais

- Na **função vetorial** o domínio é um conjunto de números reais e a imagem um conjunto de vetores.
- Estamos particularmente interessados em funções vetoriais **r** cujos valores são vetores tridimensionais.

Funções vetoriais

- Na **função vetorial** o domínio é um conjunto de números reais e a imagem um conjunto de vetores.
- Estamos particularmente interessados em funções vetoriais **r** cujos valores são vetores tridimensionais.
- Para todo número t no domínio de **r** existe um único vetor de $\mathbb{R}^3$ denotado por **r**(t) como imagem.

Funções vetoriais

- Na **função vetorial** o domínio é um conjunto de números reais e a imagem um conjunto de vetores.
- Estamos particularmente interessados em funções vetoriais **r** cujos valores são vetores tridimensionais.
- Para todo número t no domínio de **r** existe um único vetor de $\mathbb{R}^3$ denotado por **r**(t) como imagem.
- Se *f* (t), *g*(t) e h(t) são as componentes do vetor **r**(t), então, podemos escrever a função vetorial como:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Funções vetoriais

- Usamos a **letra t** para denotar a **variável independente** porque ela representa o tempo na maioria das aplicações.
- O **domínio** de **r** é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão **r**(t) está definida.

Funções vetoriais

- Usamos a **letra t** para denotar a **variável independente** porque ela representa o tempo na maioria das aplicações.
- O **domínio** de **r** é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão **r**(t) está definida.

Por exemplo, qual o domínio de r(t):

Se $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$ então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Funções vetoriais

- Usamos a **letra t** para denotar a **variável independente** porque ela representa o tempo na maioria das aplicações.
- O **domínio** de **r** é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão **r**(t) está definida.

Por exemplo, qual o domínio de r(t):

Se $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$ então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

As expressões t^3, $\ln(3 - t)$ e $\sqrt{t}$ são definidas quando

$$3 - t > 0 \quad \text{e} \quad t \geqslant 0.$$

Funções vetoriais

- Usamos a **letra t** para denotar a **variável independente** porque ela representa o tempo na maioria das aplicações.
- O **domínio** de **r** é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão **r**(t) está definida.

Por exemplo, qual o domínio de r(t):

Se $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \right\rangle$ então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

As expressões t^3, $\ln(3 - t)$ e $\sqrt{t}$ são definidas quando

$3 - t > 0$ e $t \geqslant 0$. Portanto, o domínio de $\mathbf{r}$ é $[0, 3)$.

Limites de funções vetoriais

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Limites de funções vetoriais

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

Limites de funções vetoriais

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

Continuidade de funções vetoriais

Uma função vetorial $\mathbf{r}$ é **contínua em** $\boldsymbol{a}$ se $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

Limites de funções vetoriais

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

Continuidade de funções vetoriais

Uma função vetorial $\mathbf{r}$ é **contínua em a** se $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

$\mathbf{r}$ é contínua em a se e somente se suas funções componentes f, g e h forem contínuas em a.

Exemplo 1

Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$, onde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

Funções vetoriais

Exemplo 1

Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$, onde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

Solução:

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0}(1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

Curvas no espaço

- Suponha que *f*, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I.

Curvas no espaço

- Suponha que *f*, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I.
- Em seguida, seja o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde t varia no intervalo I, onde:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

Curvas no espaço

- Suponha que *f*, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I.
- Em seguida, seja o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde t varia no intervalo I, onde:

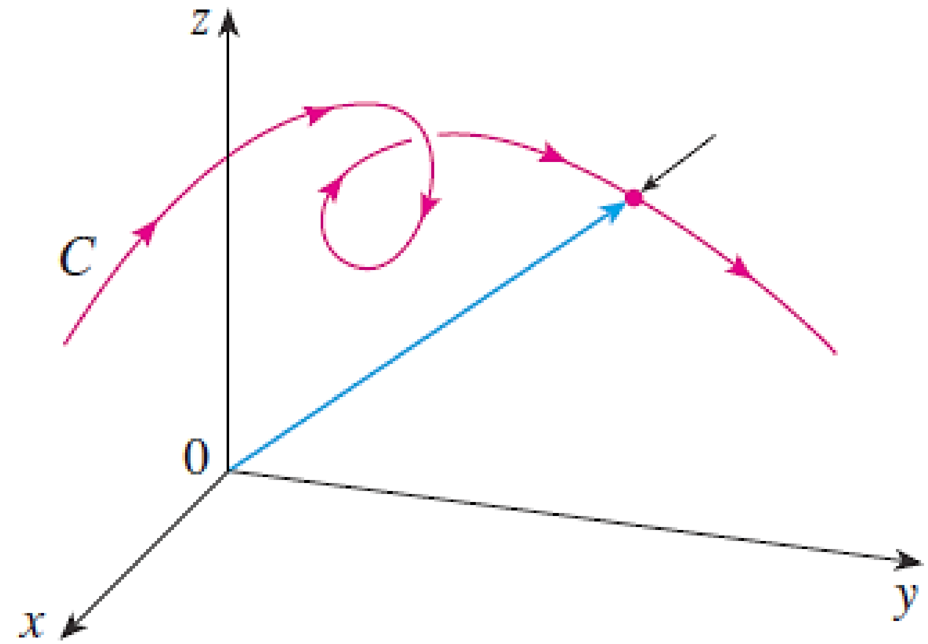
$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

- O conjunto C é chamado **curva espacial**.
- As equações de x, y e z são denominadas **equações paramétricas de C** e t é conhecido como **parâmetro**.

Curvas no espaço

- Se considerarmos agora a função vetorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

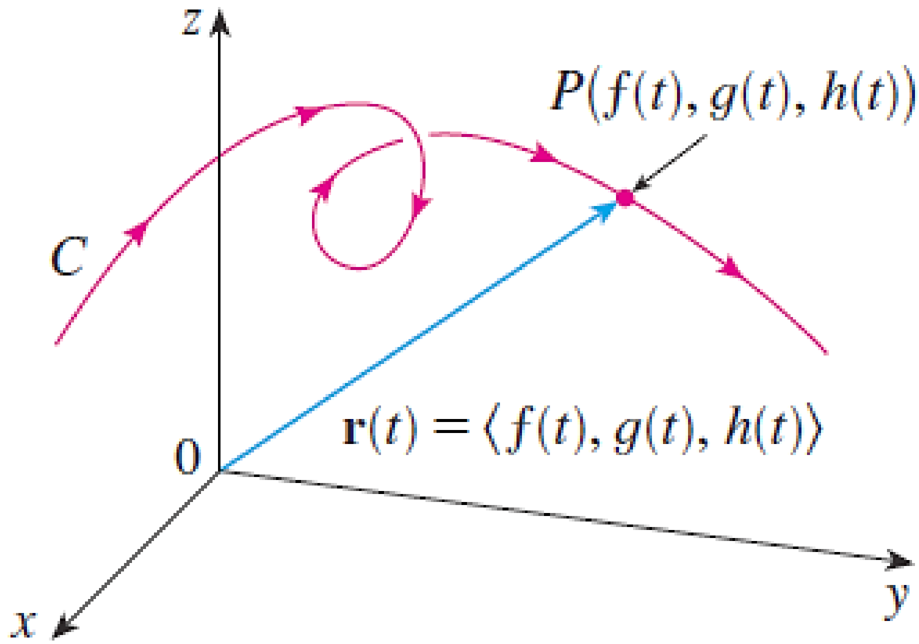


Curvas no espaço

- Se considerarmos agora a função vetorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

- Então, **r**(t) é o vetor posição do ponto *P*(*f*(t), *g*(t), h(t)).



Curvas no espaço

- Se considerarmos agora a função vetorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

- Então, **r**(t) é o vetor posição do ponto *P*(*f*(t), *g*(t), h(t)).

- Assim, qualquer função vetorial contínua **r** define uma curva espacial C como da Figura 1.

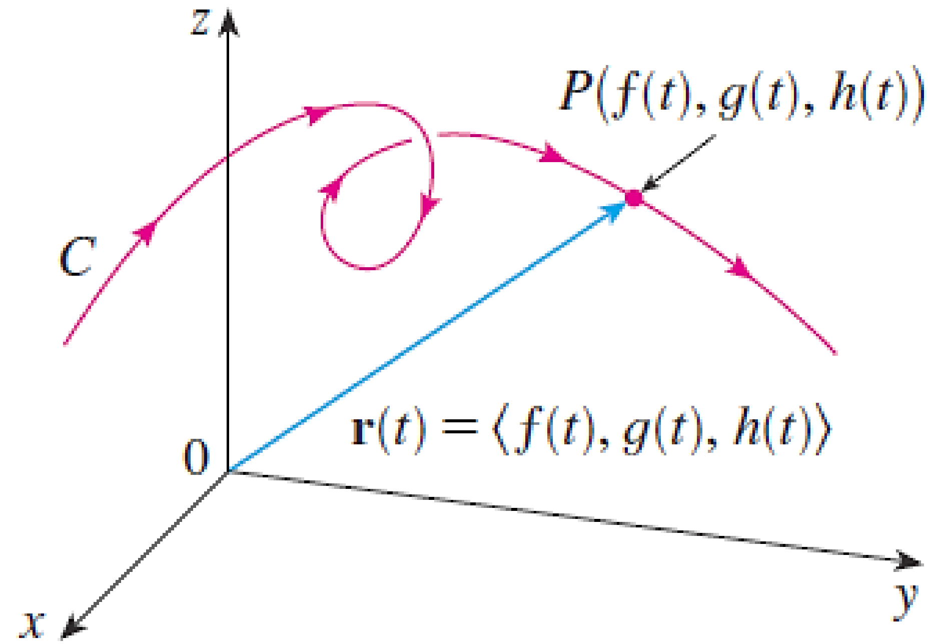


FIGURA 1 *C* é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição **r**(*t*).

Exemplo 2

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Funções vetoriais

Exemplo 2

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

Exemplo 2

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

Como alternativa, a função pode ser escrita como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$$

Exemplo 2

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Solução:

As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

Como alternativa, a função pode ser escrita como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$$

que reconhecemos, como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto $(1, 2, -1)$ e paralela ao vetor $\langle 1, 5, 6 \rangle$.

Funções vetoriais

Exemplo 3

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

Funções vetoriais

Exemplo 3

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

Solução:

As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Exemplo 3

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

Solução:

As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Uma vez que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 3

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

Solução:

As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Uma vez que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$.

Como $z = t$ a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.

Funções vetoriais

Exemplo 3 - solução:

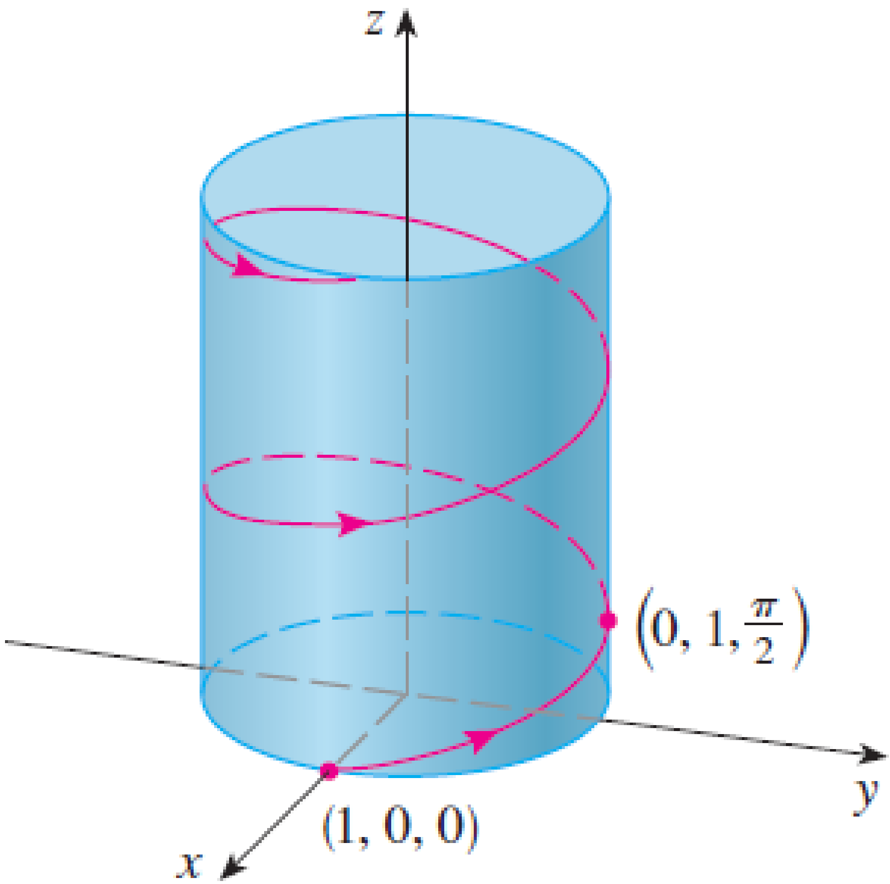


FIGURA 2

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

$$x = \cos t$$

$$y = \operatorname{sen} t$$

$$z = t$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Funções vetoriais

Exemplo 4

Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

Exemplo 4

Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

Solução: A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra a curva de intersecção C, que é uma elipse.

FIGURA 5

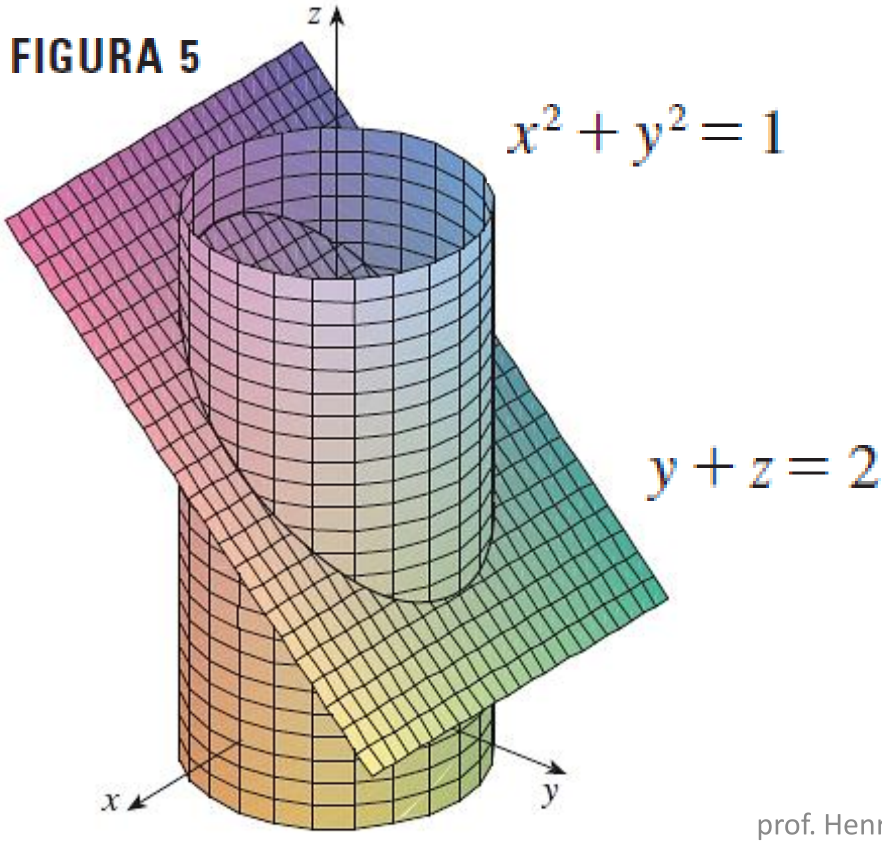
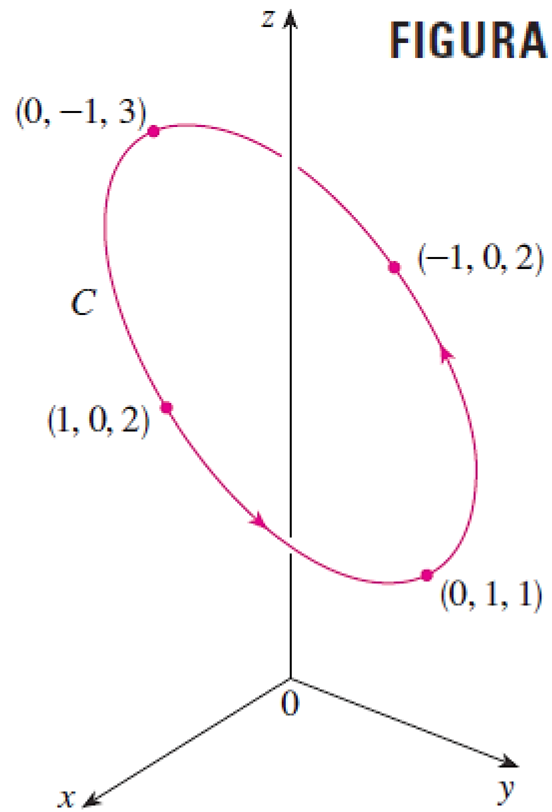


FIGURA 6



Exemplo 4 - solução:

A projeção de C para o plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Então, podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Exemplo 4 - solução:

A projeção de C para o plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Então, podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Exemplo 4 - solução:

A projeção de C para o plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Então, podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Exemplo 4 - solução:

A projeção de C para o plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Então, podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Essa equação é chamada de *parametrização* da curva C.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 13.1 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

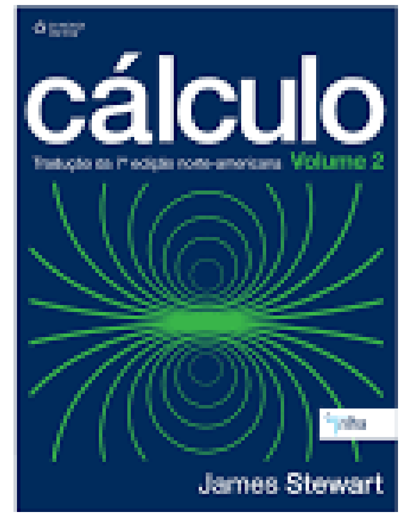
Próxima aula:

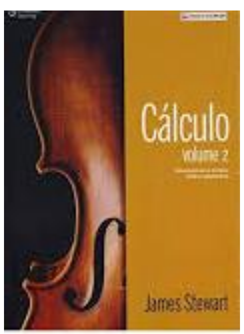
- Derivadas e integrais de funções vetoriais.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br