Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 12 - Aula 2
Derivadas e integrais de funções vetoriais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas de funções vetoriais

- A derivada **r'** de uma função vetorial **r** é definida do mesmo modo das funções a valores reais.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Derivadas de funções vetoriais

- A derivada **r'** de uma função vetorial **r** é definida do mesmo modo das funções a valores reais.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

- O significado geométrico desta definição está representado na Figura 1.

Derivadas de funções vetoriais

- A derivada **r'** de uma função vetorial **r** é definida do mesmo modo das funções a valores reais.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

- O significado geométrico desta definição está representado na Figura 1.
- Se os pontos *P* e *Q* têm vetores posição **r**(t) e **r**(t + h), então PQ representa o vetor secante **r**(t + h) – **r**(t).

Derivadas de funções vetoriais

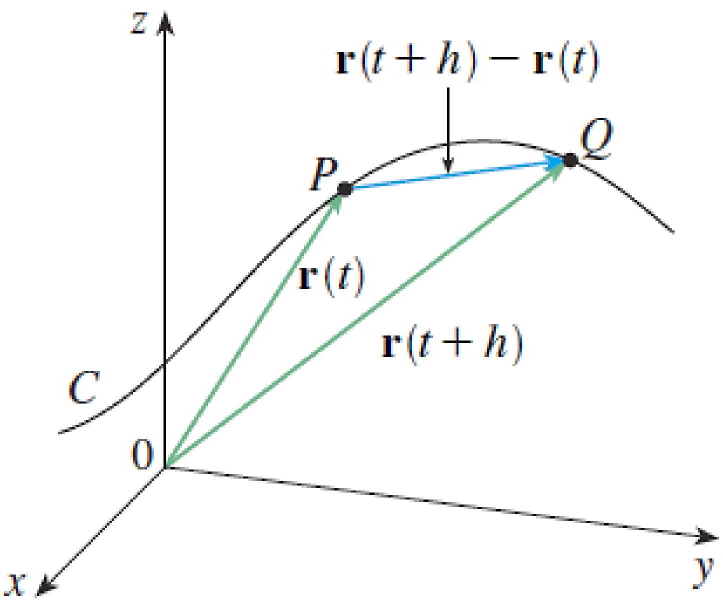
- A derivada **r'** de uma função vetorial **r** é definida do mesmo modo das funções a valores reais.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

- O significado geométrico desta definição está representado na Figura 1.
- Se os pontos *P* e *Q* têm vetores posição **r**(t) e **r**(t + h), então PQ representa o vetor secante **r**(t + h) – **r**(t).
- Quando P se aproxima de Q quando h → 0 esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente a P.

Derivadas de funções vetoriais

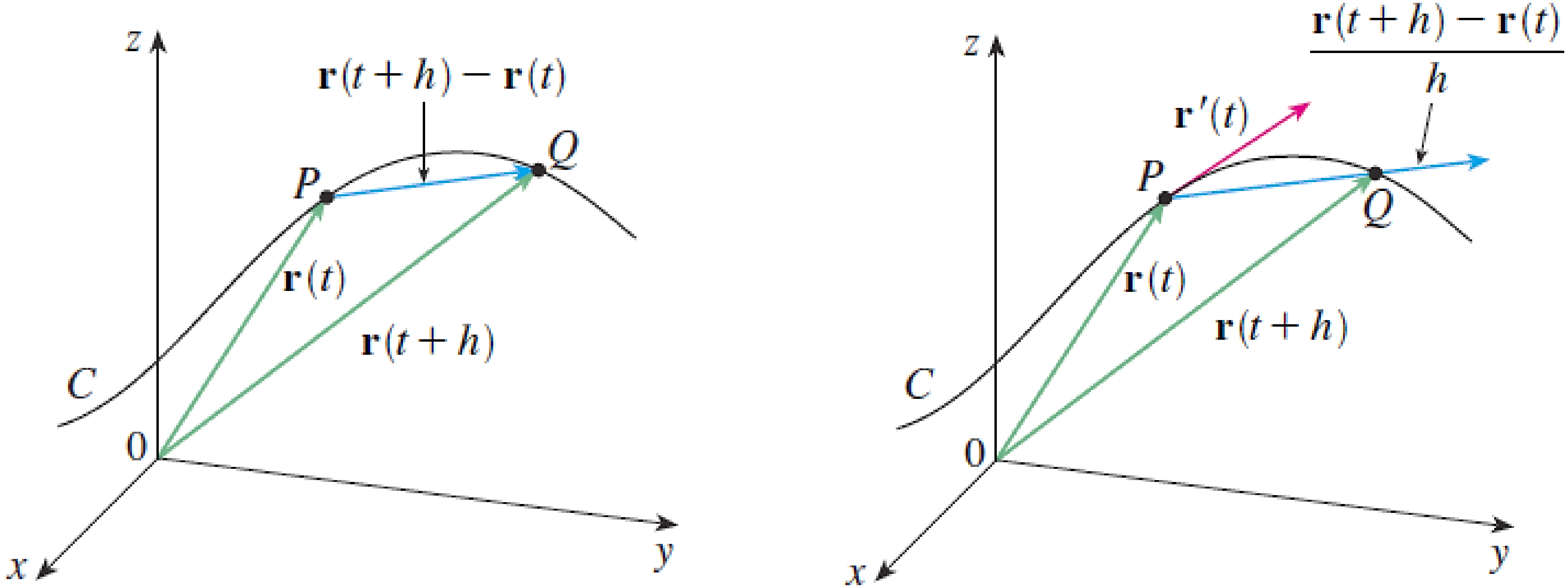
FIGURA 1



(a) O vetor secante $\overrightarrow{PQ}$

Derivadas de funções vetoriais

FIGURA 1

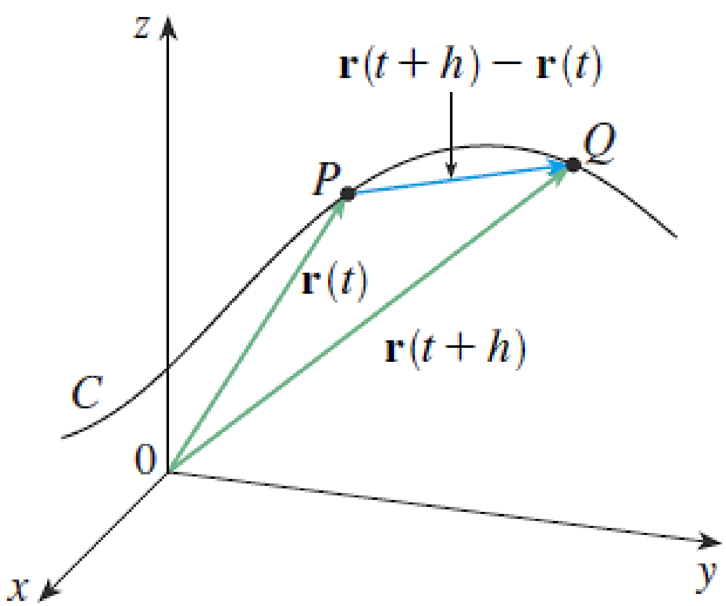


(a) O vetor secante $\overrightarrow{PQ}$ (b) O vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$

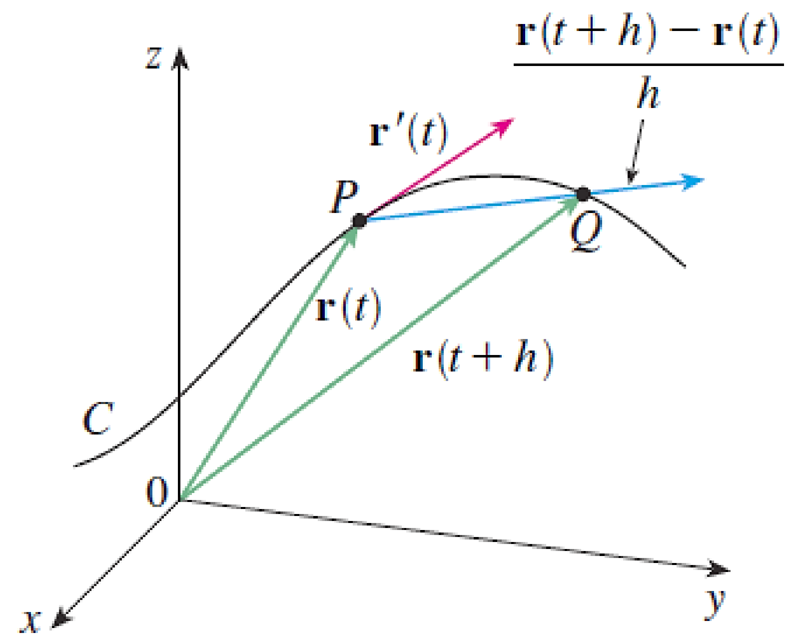
- O vetor **r'**(t) É chamado o **vetor tangente** à curva definida por **r** no ponto P.

Derivadas de funções vetoriais

FIGURA 1



(a) O vetor secante $\overrightarrow{PQ}$



(b) O vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$

- O vetor **r**’(t) É chamado o **vetor tangente** à curva definida por **r** no ponto P.
- A reta tangente a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor **r**’(t).

Derivadas de funções vetoriais

Teorema

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

Derivadas de funções vetoriais

Teorema

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle \\ &= f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Derivadas de funções vetoriais

Teorema

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle \\ &= f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Nota:

vetor tangente unitário $\quad \mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$

Derivadas de funções vetoriais

Exemplo 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

Derivadas de funções vetoriais

Exemplo 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.
(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

Solução:

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

Derivadas de funções vetoriais

Exemplo 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \text{sen}\, 2t\,\mathbf{k}$.

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

Solução:

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Uma vez que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

o vetor unitário da tangente no ponto $(1, 0, 0)$ é

Derivadas de funções vetoriais

Exemplo 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

Solução:

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Uma vez que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

o vetor unitário da tangente no ponto $(1, 0, 0)$ é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$

Regras de derivação de funções vetoriais

Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,

1. $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

2. $$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

3. $$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

Regras de derivação de funções vetoriais

Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regra da Cadeia)

Regras de derivação de funções vetoriais

Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,

1. $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

2. $$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

3. $$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

4. $$\boxed{\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)}$$

5. $$\boxed{\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)}$$

6. $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$ (Regra da Cadeia)

Integrais de funções vetoriais

- A integral definida de uma função vetorial contínua **r**(t) resulta em um vetor.

Integrais de funções vetoriais

- A integral definida de uma função vetorial contínua **r**(t) resulta em um vetor.
- Podemos expressar a integral de **r** como a integral de suas funções componentes *f*, *g* e h como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

Integrais de funções vetoriais

- Podemos estender o **Teorema Fundamental do Cálculo** para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

- Onde **R** é uma primitiva de **r**, ou seja: $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$

Integrais de funções vetoriais

- Podemos estender o **Teorema Fundamental do Cálculo** para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

- Onde **R** é uma primitiva de **r**, ou seja: $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$

- Usaremos a seguinte notação para as integrais indefinidas:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt$$

Funções vetoriais

Exemplo 2

Calcule a integral indefinida e a integral definida de 0 a $\pi/2$ da função: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,k$

Funções vetoriais

Exemplo 2

Calcule a integral indefinida e a integral definida de 0 a $\pi/2$ da função: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,k$

Solução:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

Funções vetoriais

Exemplo 2

Calcule a integral indefinida e a integral definida de 0 a $\pi/2$ da função: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\boldsymbol{k}$

Solução:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração

Exemplo 2

Calcule a integral indefinida e a integral definida de 0 a $\pi/2$ da função: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,k$

Solução:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2}$$

Funções vetoriais

Exemplo 2

Calcule a integral indefinida e a integral definida de 0 a $\pi/2$ da função: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,k$

Solução:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\mathbf{k}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 13.2 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

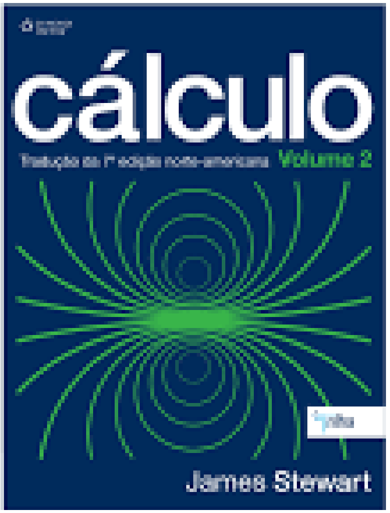
Próxima aula:

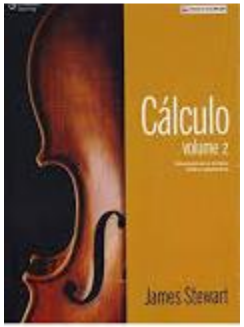
- Comprimento de arco e curvatura.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br