Cálculo I

Licenciatura

Integração por frações parciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

D – Integração por frações parciais

- Corresponde a regra do quociente das derivadas.
- Qualquer função racional (quociente de polinômios) pode ser expressa como a soma de frações mais simples (parciais)

D – Integração por frações parciais

- Corresponde a regra do quociente das derivadas.
- Qualquer função racional (quociente de polinômios) pode ser expressa como a soma de frações mais simples (parciais)

Exemplo 4:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

D – Integração por frações parciais

- Seja $\boldsymbol{R(x)}$ uma função racional, composta pelo quociente de dois polinômios $\boldsymbol{P(x)}$ e $Q(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

D – Integração por frações parciais

- Seja $\boldsymbol{R(x)}$ uma função racional, composta pelo quociente de dois polinômios $\boldsymbol{P(x)}$ e $Q(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

- Se o grau de $\boldsymbol{P(x)}$ for maior do que o grau de $Q(\boldsymbol{x})$, deve-se **dividir os dois polinômios até** chegar a uma fração onde $degP(x) \leq degQ(x)$.

Onde: *degP(x) é o grau de **maior ordem de P(x).***

D – Integração por frações parciais

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

- Se o grau de $\boldsymbol{P(x)}$ é menor do que o grau de $Q(x)$, é possível **expressar $\boldsymbol{R(x)}$ como frações parciais**.

- Antes de estudarmos os três casos principais, iremos revisar a divisão de polinômios pelo método da chave.

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$P(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

$Q(x) = x^2 - 1$

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$P(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

$Q(x) = x^2 - 1$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{P(x) = x^5 + 2x^3 + 4}$

$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2 - 1}$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{P(x) = x^5 + 2x^3 + 4}$

$\boldsymbol{Q(x) = x^2 - 1}$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

IV. Repetir os itens de I a III, até que o grau do resto seja menor do que o grau de Q(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$P(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

$Q(x) = x^2 - 1$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

IV. Repetir os itens de I a III, até que o grau do resto seja menor do que o grau de Q(x);

V. Escrever na forma: $R(x) = quociente + \dfrac{resto}{divisor}$

Divisão de polinômios, método da chave

Solução $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} Dividendo & Divisor \\ \hline resto & quociente \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 \\ \hline 0 + 3x^3 + 4 & \end{array}$$

Divisão de polinômios, método da chave

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{l|l} \textit{Dividendo} & \textit{Divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l}
& x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
& -x^5 + x^3 & x^3 + 3x \\ \cline{1-2}
& 0 + 3x^3 + 4 & \\
& -3x^3 + 3x & \\ \cline{1-2}
& 0 + 3x + 4 &
\end{array}$$

Divisão de polinômios, método da chave

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{l|l} \textbf{\textit{Dividendo}} & \textbf{\textit{Divisor}} \\ \hline \textbf{\textit{resto}} & \textbf{\textit{quociente}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x^5 + 2x^3 + 4 & \underline{|\, x^2 - 1} \\ \underline{-x^5 + x^3 \qquad\quad} & x^3 + 3x \\ 0 + 3x^3 + 4 & \\ \underline{-3x^3 + 3x} & \\ 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Então: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}} = x^3 + 3x + \frac{3x+4}{\boldsymbol{x^2-1}}$

Divisão de polinômios, método da chave

$$\boldsymbol{Dividendo \,\lfloor\, Divisor}$$
$$\boldsymbol{resto \quad quociente}$$

Solução $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 \qquad & x^3 + 3x \\ \cline{1-1} 0 + 3x^3 + 4 & \\ -3x^3 + 3x \quad & \\ \cline{1-1} 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Novos

degP(x) < *degQ(x)*

Então: $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1} = x^3 + 3x + \dfrac{3x+4}{x^2-1}$

Divisão de polinômios, método da chave

$$\begin{array}{l|l} \textbf{Dividendo} & \textbf{Divisor} \\ \hline \textbf{resto} & \textbf{quociente} \end{array}$$

Solução $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 \quad\quad & x^3 + 3x \\ \hline 0 + 3x^3 + 4 & \\ -3x^3 + 3x & \\ \hline 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Novos

degP(x) < *degQ(x)*

Então: $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1} = x^3 + 3x + \dfrac{3x+4}{x^2-1}$

Expressar em frações parciais

D – Integração por frações parciais

Caso 1:

O denominador $Q(\boldsymbol{x})$ pode ser decomposto em fatores lineares distintos.

$$\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x - r_1}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{x - r_2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{x - r_k}}$$

A, B e K: são coeficientes a determinar;

$\boldsymbol{r_1, r_2, r_K}$: são as raízes do polinômio $Q(\boldsymbol{x})$.

Exemplo 6 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$$

D – Integração por frações parciais

Caso 2:

O denominador $Q(x)$ pode ser decomposto em fatores lineares, mas alguns destes são repetidos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{K}{(x - r_1)^n}$$

A, B e K: são coeficientes a determinar;

r_1 : raiz do polinômio $Q(x)$.

Exemplo 7 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,dx$$

D – Integração por frações parciais

Caso 3:

O denominador $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e quadráticos irredutíveis distintos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + a} + \frac{Dx + E}{x^2 + b} + \cdots + \frac{Kx + J}{x^2 + n}$$

$A, B, C, D, E\ e\ K, J$: são coeficientes a determinar;

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: são números reais.

Exemplo 8 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}\, dx$$

Para depois desta aula:

- Reler o tópico da aula no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Acessar a lista de exercícios no link: site lista.

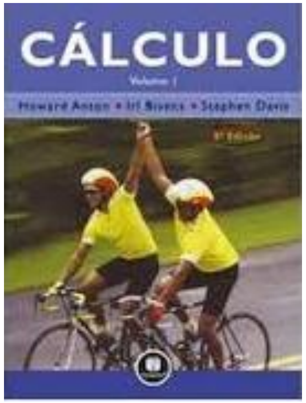
Próxima aula:

- Aplicações de integrais.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br