Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 12 - Aula 3
Comprimento de arco e curvatura

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Comprimento de arco

- Suponha que uma curva tenha equação vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b$.
- Isto equivale às equações paramétricas $x = f\,(t)$, $\mathrm{y} = g(t)$ e $\mathrm{z} = h(t)$ onde *f'*, g' e h' são contínuas.

Comprimento de arco

- Suponha que uma curva tenha equação vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle, \quad a \leq t \leq b.$
- Isto equivale às equações paramétricas $x = f\,(t)$, $\mathrm{y} = g(t)$ e $\mathrm{z} = h(t)$ onde *f'*, g' e h' são contínuas.
- Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a até b, é possível mostrar que:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

Comprimento de arco

- Suponha que uma curva tenha equação vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b.$
- Isto equivale às equações paramétricas $x = f(t)$, $\mathrm{y} = g(t)$ e $\mathrm{z} = h(t)$ onde *f*', g' e h' são contínuas.
- Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a até b, é possível mostrar que:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

O comprimento de arco independe da parametrização

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Solução:

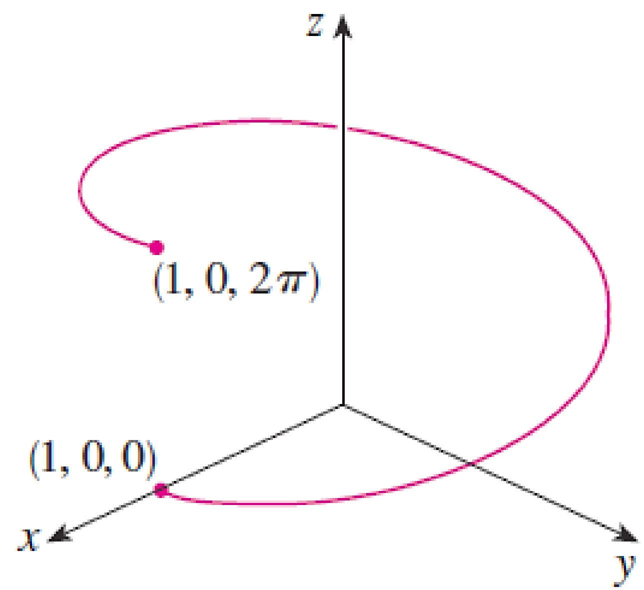


FIGURA 2

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Solução:

$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, temos

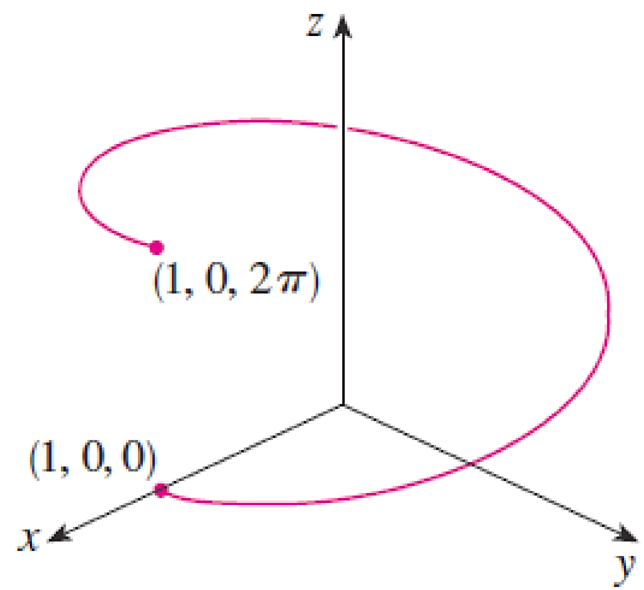


FIGURA 2

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Solução:

$\mathrm{r}'(t) = -\text{sen}\,t\,\mathrm{i} + \cos t\,\mathrm{j} + \mathrm{k}$, temos

$$|\mathrm{r}'(t)| = \sqrt{(-\text{sen}\,t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

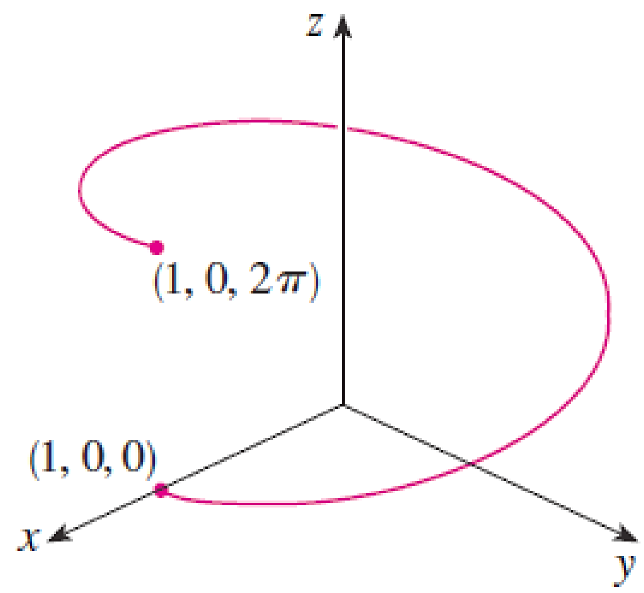


FIGURA 2

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Solução:

$\mathrm{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathrm{i} + \cos t\,\mathrm{j} + \mathrm{k}$, temos

$$|\mathrm{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de $(1, 0, 0)$ até $(1, 0, 2\pi)$ é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e, assim,

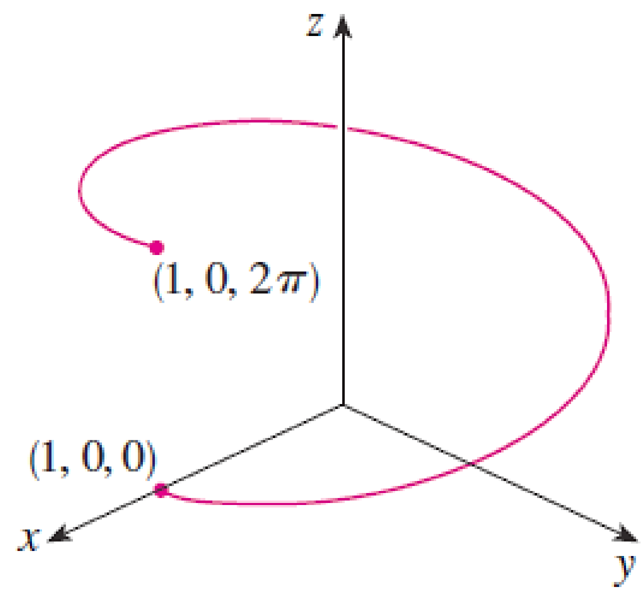


FIGURA 2

Comprimento de arco

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

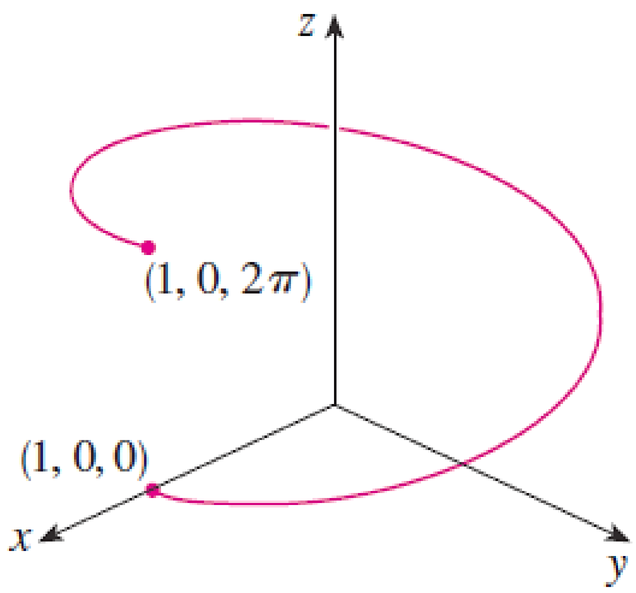


FIGURA 2

Solução:

$\mathrm{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathrm{i} + \cos t\,\mathrm{j} + \mathrm{k}$, temos

$$|\mathrm{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de $(1, 0, 0)$ até $(1, 0, 2\pi)$ é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e, assim,

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\pi$$

A função comprimento de arco

- Seja C uma curva dada pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b.$
- Onde $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a até b.

A função comprimento de arco

- Seja C uma curva dada pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b.$
- Onde $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a até b.
- Definimos a **função de comprimento de arco** *s* por:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

A função comprimento de arco

- Seja C uma curva dada pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b.$
- Onde $\boldsymbol{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a até b.
- Definimos a **função de comprimento de arco** *s* por:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

- Se derivarmos os dois lados: $\dfrac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$

A função comprimento de arco

- Frequentemente, é útil parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco.

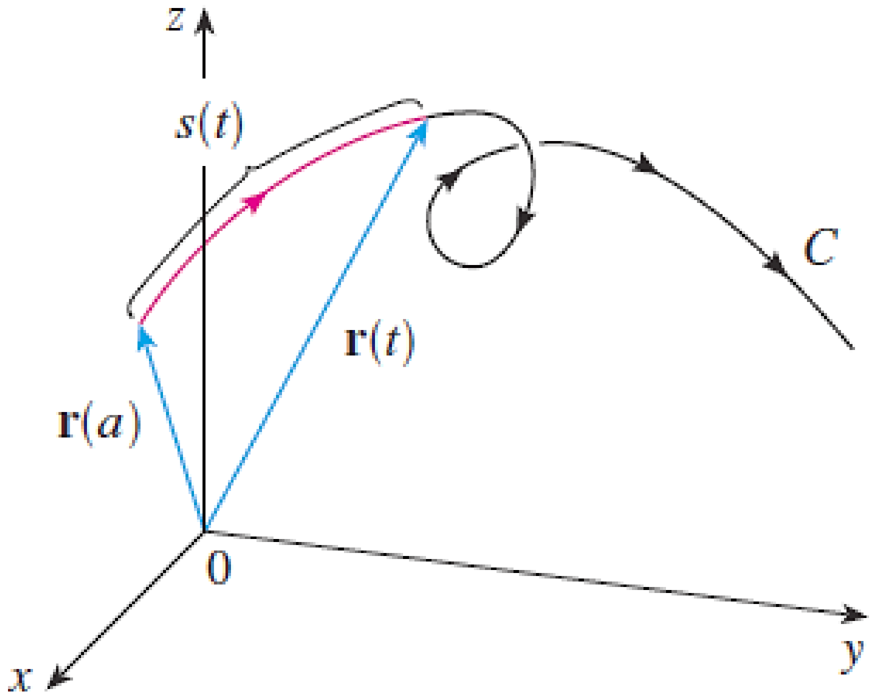


FIGURA 3

A função comprimento de arco

- Frequentemente, é útil parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco.
- O comprimento de arco *s*(t) aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas

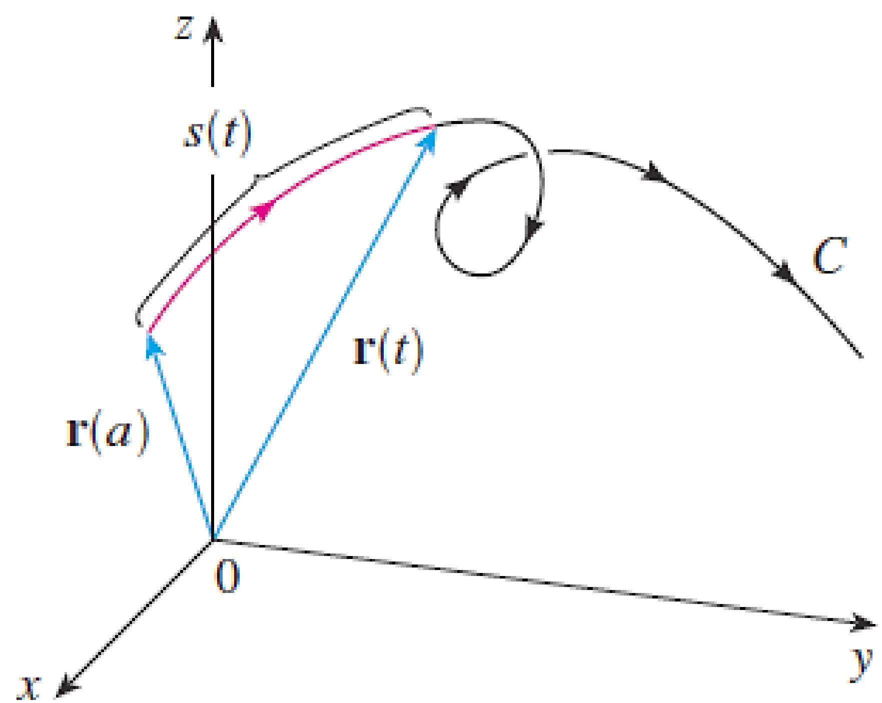


FIGURA 3

Função comprimento de arco

Exemplo 2

Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ utilizando o comprimento de arco medido a partir de $(1, 0, 0)$ na direção de crescimento de t.

Função comprimento de arco

Exemplo 2

Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ utilizando o comprimento de arco medido a partir de (1, 0, 0) na direção de crescimento de t.

Solução:

O ponto inicial (1, 0, 0) corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. A partir do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

Função comprimento de arco

Exemplo 2

Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ utilizando o comprimento de arco medido a partir de $(1, 0, 0)$ na direção de crescimento de t.

Solução:

O ponto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. A partir do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2} \qquad \text{e assim}$$

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Função comprimento de arco

Exemplo 2

Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ utilizando o comprimento de arco medido a partir de $(1, 0, 0)$ na direção de crescimento de t.

Solução:

O ponto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. A partir do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2} \qquad \text{e assim}$$

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Portanto $t = s/\sqrt{2}$ e a reparametrização pedida é

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{j} + \left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{k}$$

Curvatura

Curvatura

- Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada suave em um intervalo I se $\boldsymbol{r}$' for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I.
- Uma curva é chamada de suave se tiver uma parametrização suave.

Curvatura

- Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada suave em um intervalo I se $\boldsymbol{r}$' for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I.
- Uma curva é chamada de suave se tiver uma parametrização suave.
- Uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides.
- Quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

Curvatura

- Uma parametrização $\boldsymbol{r}(t)$ é chamada suave em um intervalo I se $\boldsymbol{r}$' for contínua e $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ em I.
- Uma curva é chamada de suave se tiver uma parametrização suave.
- Uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides.
- Quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.
- Lembrando que o vetor tangente unitário indica a direção da curva e é dado por:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Curvatura

- **T**(t) muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta.

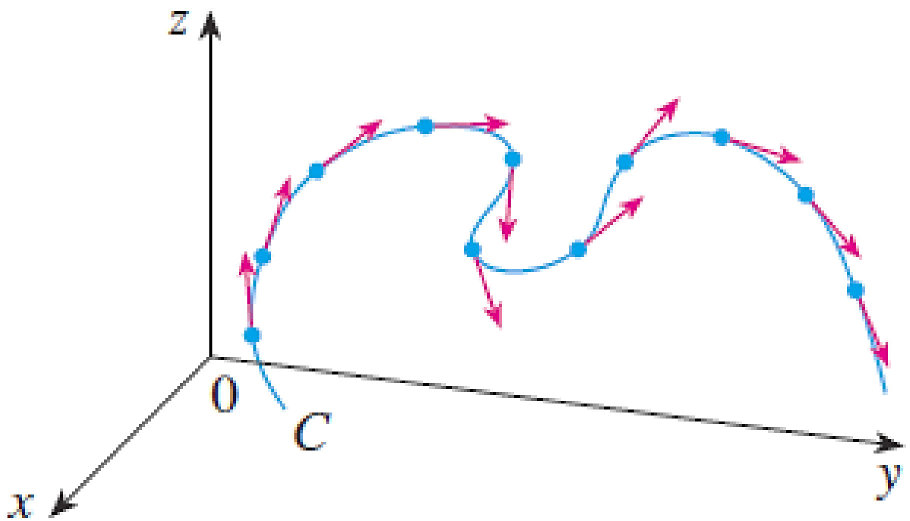


FIGURA 4 Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de C

Curvatura

- **T**(t) muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta.

- Contudo, muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.

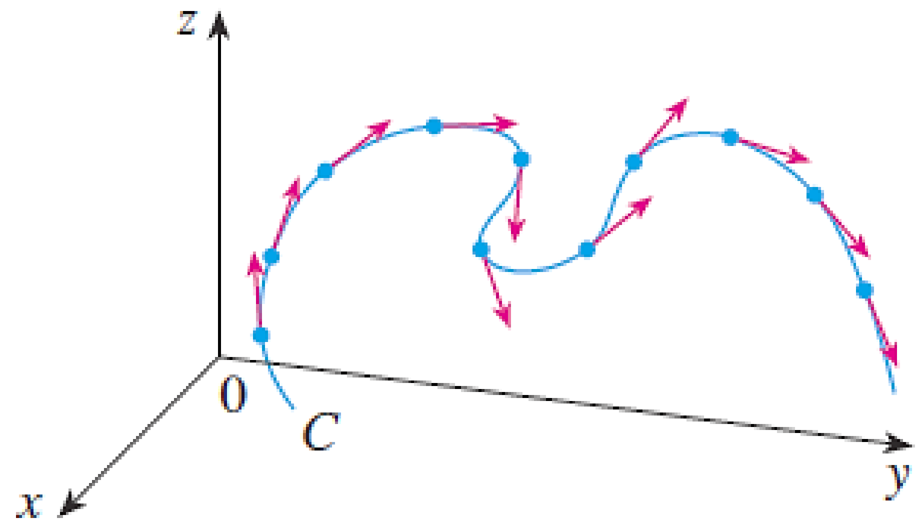


FIGURA 4 Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de C

Curvatura

- A **curvatura de C** em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção neste ponto.
- Definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco.

Curvatura

- A **curvatura de C** em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção neste ponto.
- Definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco.
- O comprimento de arco é utilizado, pois desse modo a curvatura independe da parametrização.

Curvatura

- A **curvatura de C** em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção neste ponto.
- Definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco.
- O comprimento de arco é utilizado, pois desse modo a curvatura independe da parametrização.

A **curvatura** de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde $\mathbf{T}$ é o vetor tangente unitário.

Curvatura

- A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s.

Curvatura

- A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s.
- Assim, usamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Curvatura

- A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s.
- Assim, usamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Curvatura

- A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s.
- Assim, usamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Mas, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, e então

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Curvatura

- A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s.
- Assim, usamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Mas, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, e então

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \Rightarrow \quad \kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

Curvatura

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$$

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

Solução:

Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t \, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + a \cos t \, \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + \cos t \, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \, \mathbf{j}$$

Isso nos dá $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, então temos $\kappa(t) = \dfrac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \dfrac{1}{a}$

Curvatura

Exemplo 4

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em (0, 0, 0).

Exemplo 4

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em $(0, 0, 0)$.

Solução:

Calculemos inicialmente:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

Exemplo 4

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em $(0, 0, 0)$.

Solução:

Calculemos inicialmente:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

Curvatura

Exemplo 4

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em (0, 0, 0).

Solução:

Calculemos inicialmente:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Exemplo 4

Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em (0, 0, 0).

Solução:

Calculemos inicialmente:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Exemplo 4

Solução:

Então temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, onde $t = 0$, a curvatura é $\kappa(0) = 2$.

Curvatura de uma curva plana

- Para o caso especial de uma curva plana com equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro.

Curvatura de uma curva plana

- Para o caso especial de uma curva plana com equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro.

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}.$$

Então $\quad \mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j} \quad$ e $\quad \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}.$

Curvatura de uma curva plana

- Para o caso especial de uma curva plana com equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro.

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}.$$

Então $\quad \mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j} \quad$ e $\quad \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}.$

Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que

Curvatura de uma curva plana

- Para o caso especial de uma curva plana com equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro.

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}.$$

Então $\quad \mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j} \quad$ e $\quad \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}.$

Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}. \quad |\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Curvatura de uma curva plana

- Para o caso especial de uma curva plana com equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro.

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}.$$

Então $\quad \mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j} \quad$ e $\quad \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}.$

Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}. \quad |\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

Curvatura

Exemplo 5

Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$.

Curvatura

Exemplo 5

Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos (0, 0), (1, 1) e (2, 4).

Solução:

Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

Exemplo 5

Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$.

Solução:

Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em $(0, 0)$ é $\kappa(0) = 2$.

Curvatura

Exemplo 5

Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$.

Solução:

Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em $(0, 0)$ é $\kappa(0) = 2$.

Em $(1, 1)$ isso é $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0{,}18$.

Exemplo 5

Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos (0, 0), (1, 1) e (2, 4).

Solução:

Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em (0, 0) é $\kappa(0) = 2$.

Em (1, 1) isso é $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0{,}18$.

Em (2, 4) $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0{,}03$.

Exemplo 5

Solução:

$\kappa(0) = 2 \qquad \kappa(1) \approx 0{,}18 \qquad \kappa(2) \approx 0{,}03$

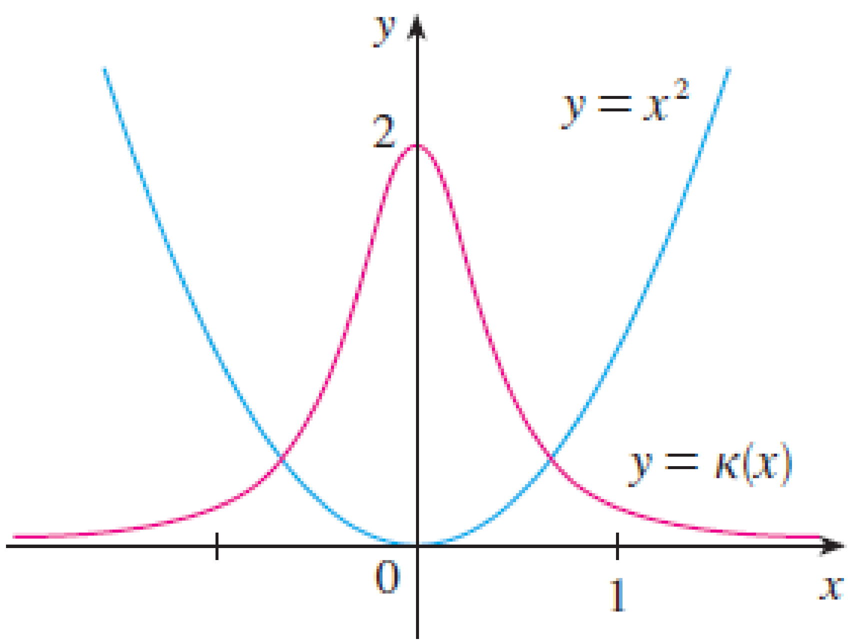


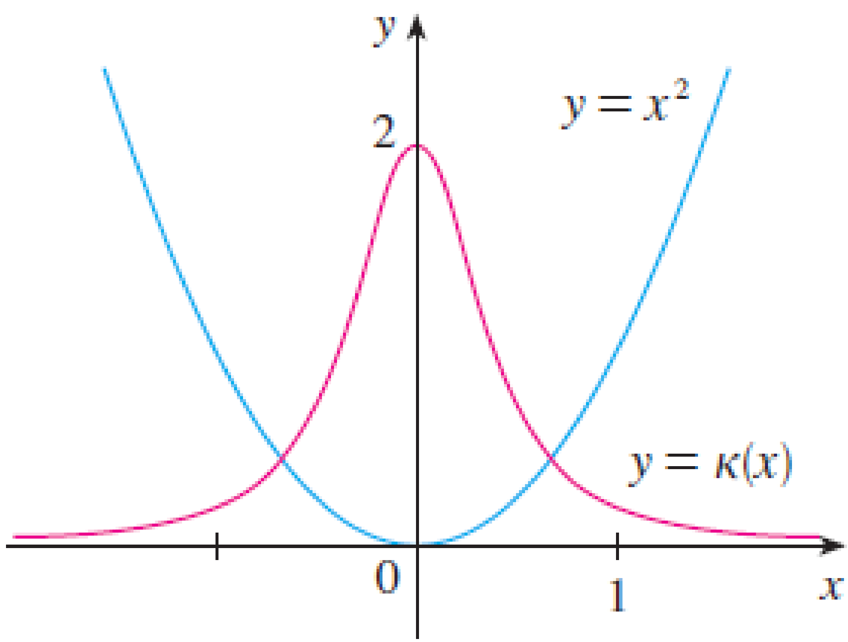
FIGURA 5 A parábola $y = x^2$ e sua função curvatura

Curvatura

Exemplo 5

Solução:

$\kappa(0) = 2 \qquad \kappa(1) \approx 0{,}18 \qquad \kappa(2) \approx 0{,}03$



$\kappa(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$.

a parábola parece tornar-se mais plana quando $x \to \pm\infty$.

FIGURA 5 A parábola $y = x^2$ e sua função curvatura

Vetor normal e vetor binormal

- Em um ponto dado de uma curva suave, existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$.
- Se escolhemos $\boldsymbol{T}'(t)$ ortogonal a $\boldsymbol{T}(t)$, então: $\boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{T}'(t) = 0$.

Vetor normal e vetor binormal

- Em um ponto dado de uma curva suave, existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$.
- Se escolhemos $\boldsymbol{T}'(t)$ ortogonal a $\boldsymbol{T}(t)$, então: $\boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{T}'(t) = 0$.
- Em qualquer ponto onde $\kappa \neq 0$ podemos definir um vetor normal unitário $\boldsymbol{N}(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

Vetor normal e vetor binormal

- Em um ponto dado de uma curva suave, existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\boldsymbol{T}(t)$.
- Se escolhemos $\boldsymbol{T}'(t)$ ortogonal a $\boldsymbol{T}(t)$, então: $\boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{T}'(t) = 0$.
- Em qualquer ponto onde $\kappa \neq 0$ podemos definir um vetor normal unitário $\boldsymbol{N}(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

- O vetor $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t)$ é chamado vetor binormal, perpendicular a $\boldsymbol{T}(t)$ e a $\boldsymbol{N}(t)$.

Vetor normal e vetor binormal

- O plano determinado pelos vetores normal **N** e binormal **B** num ponto **P** sobre uma curva C é chamado **plano normal** de C em P.

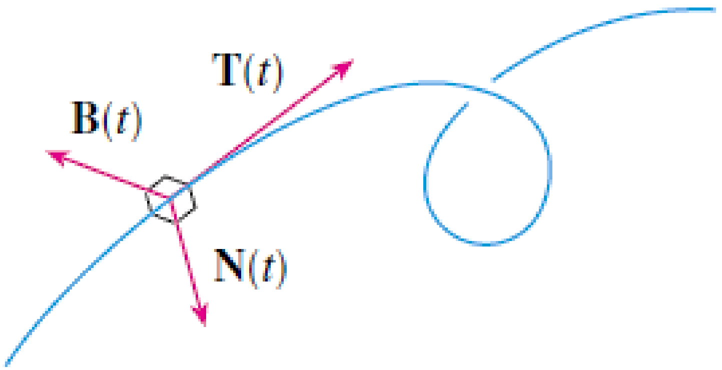


FIGURA 6

Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

Vetor normal e vetor binormal

- O plano determinado pelos vetores normal **N** e binormal **B** num ponto **P** sobre uma curva C é chamado **plano normal** de C em P.

- O plano determinado pelos vetores **T** e **N** é chamado **plano osculador** de C a P.

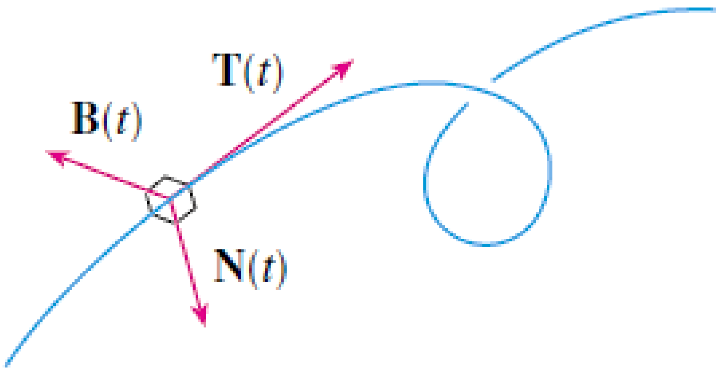


FIGURA 6

Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

Vetor normal e vetor binormal

- O plano determinado pelos vetores normal **N** e binormal **B** num ponto **P** sobre uma curva C é chamado **plano normal** de C em P.

- O plano determinado pelos vetores **T** e **N** é chamado **plano osculador** de C a P.

- Para uma curva plana, o plano osculador é simplesmente o plano que contém a curva.

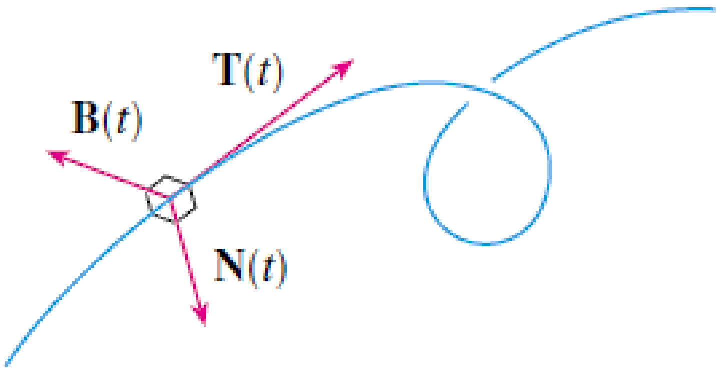


FIGURA 6

Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 13.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

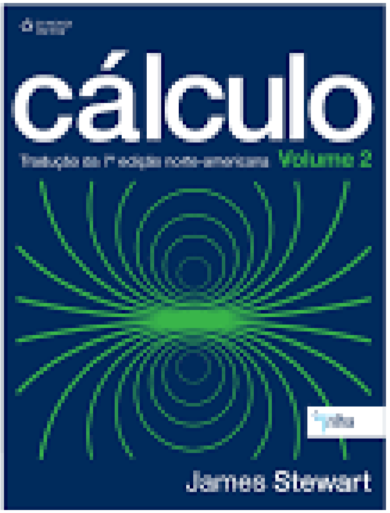
Próxima aula:

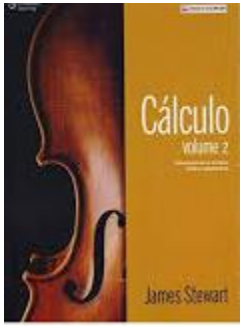
- Campos vetoriais e Integrais de linha.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br