Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 13 - Aula 2
Integrais de linha

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Integrais de linha

- Integrais de linha são integrais sobre uma curva C.
- Elas foram desenvolvidas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Integrais de linha

- Integrais de linha são integrais sobre uma curva C.
- Elas foram desenvolvidas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.
- Seja uma curva plana *C* dada pelas equações paramétricas:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Equações (1)

Integrais de linha

- Integrais de linha são integrais sobre uma curva C.
- Elas foram desenvolvidas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.
- Seja uma curva plana *C* dada pelas equações paramétricas:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Equações (1)

- Supomos que C seja uma curva suave. Isso significa que **r'** é contínua e **r'**(t) $\neq$ 0.

Integrais de linha

- Se f for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C,

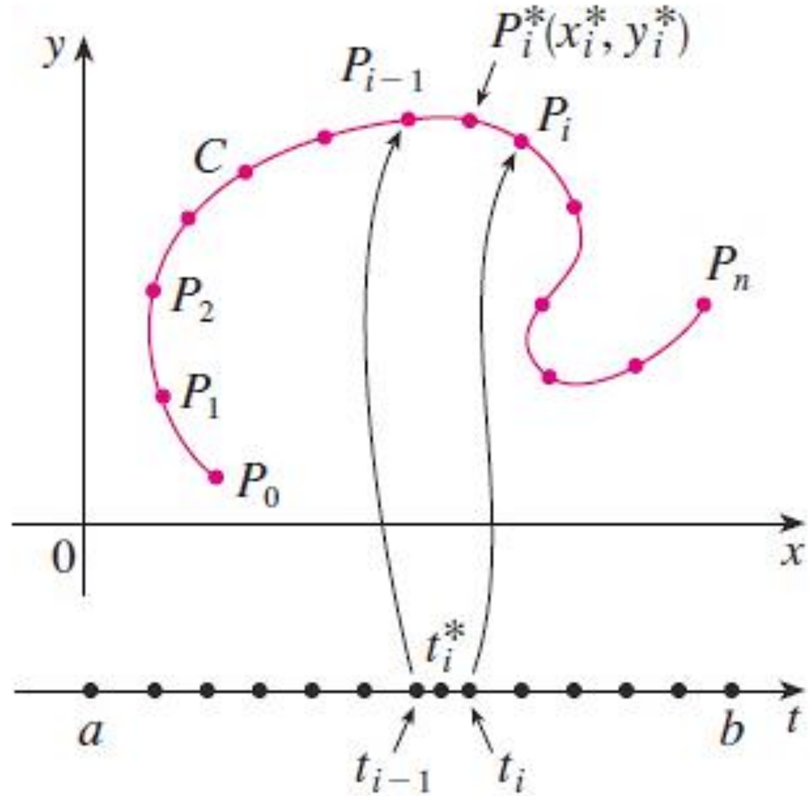


FIGURA 1

Integrais de linha

- Se f for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C,
- Calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*), multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos.

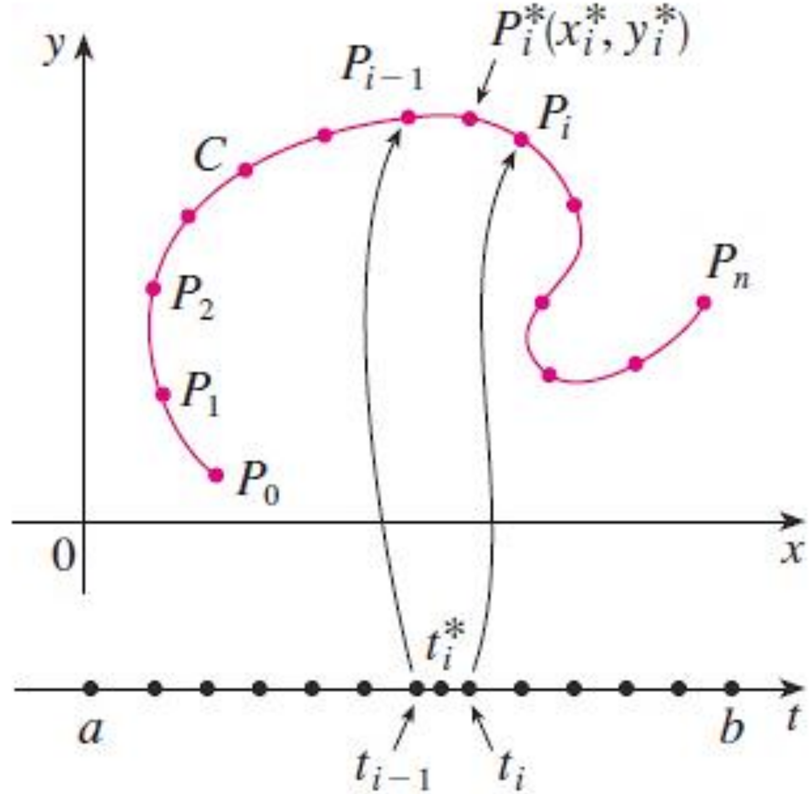


FIGURA 1

Integrais de linha

- Se f for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C,
- Calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*), multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos.
- Que é uma operação semelhante à soma de Riemann.
- Em seguida tomamos o limite.

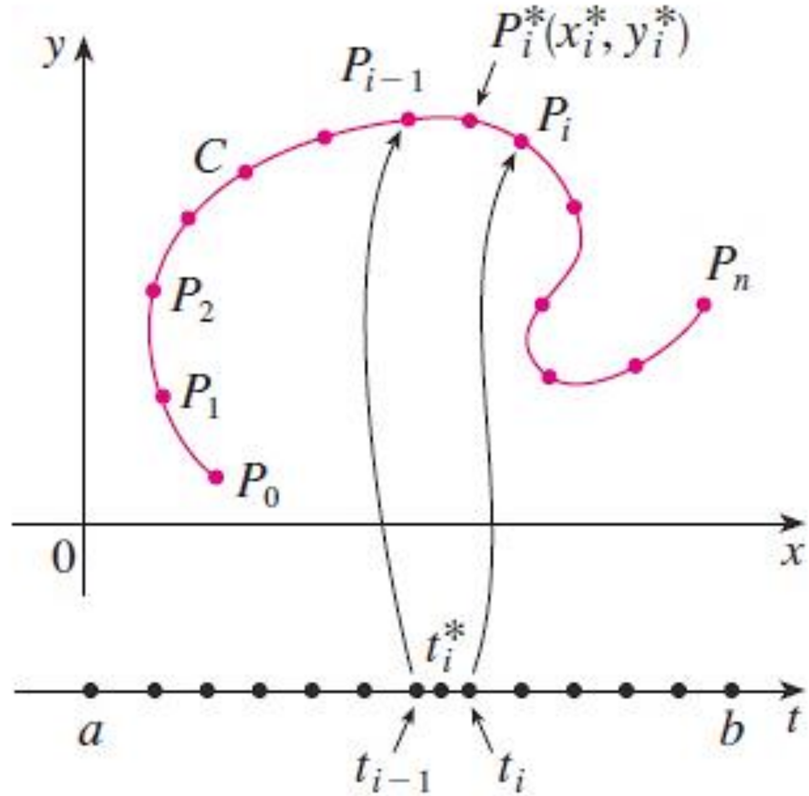


FIGURA 1

Integrais de linha no plano

Definição

Se f é definida sobre uma curva suave C dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de f sobre C** é, se esse limite existir

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

Integrais de linha no plano

Definição

Se f é definida sobre uma curva suave C dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de f sobre C** é, se esse limite existir

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

Um modo para calcular a integral de linha é escrever tudo em termos do parâmetro t:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Integrais de linha

- Podemos interpretar a integral de linha de uma função positiva como uma área.

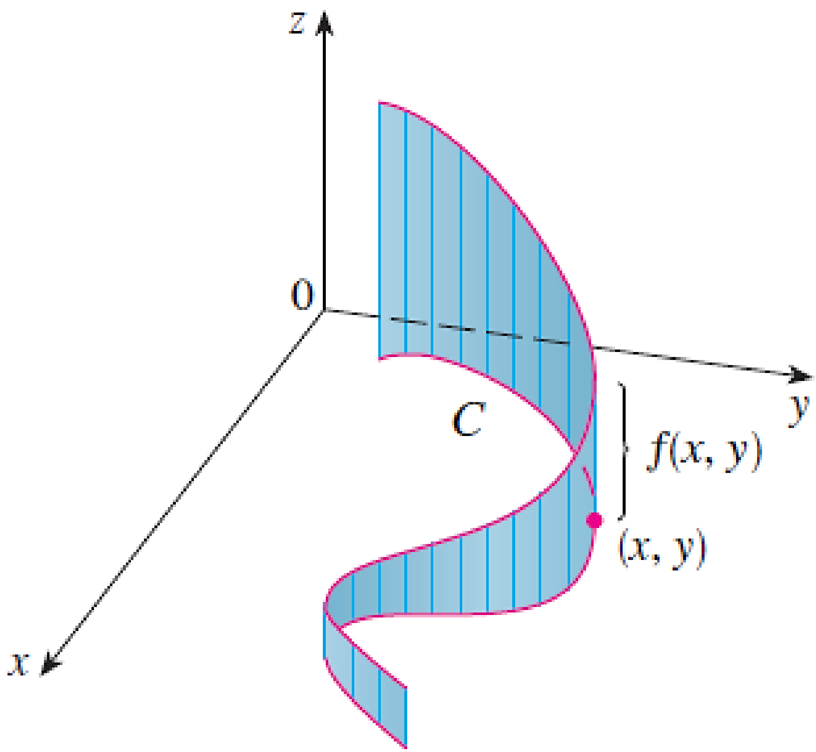


FIGURA 2

Integrais de linha

- Podemos interpretar a integral de linha de uma função positiva como uma área.

- De fato, se $f(x, y) \geq 0$, a integral de linha representa a área da "cerca" ou "cortina" da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

- De fato, se $f(x, y) \geq 0$, a integral de linha representa a área da "cerca" ou "cortina" da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

FIGURA 2

Integrais de linha

Exemplo 1

Calcule $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

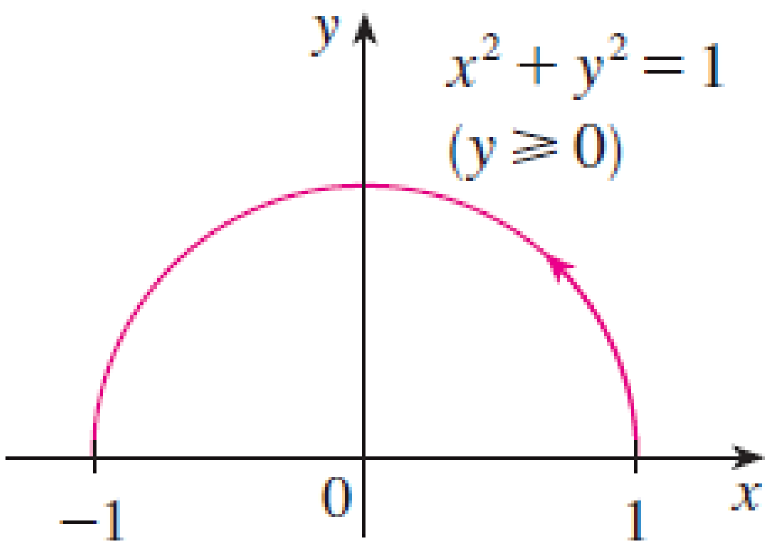


FIGURA 3

Integrais de linha

Exemplo 1

Calcule $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

Recorde-se de que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

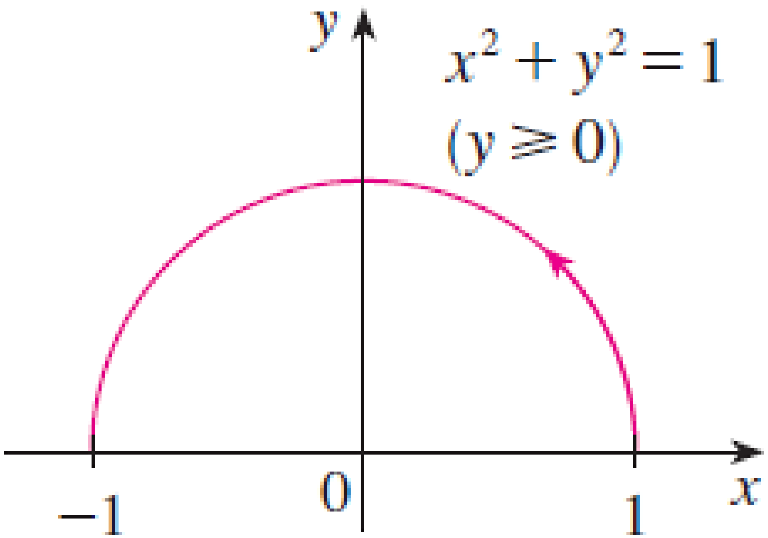


FIGURA 3

Exemplo 1

Calcule $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

Recorde-se de que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

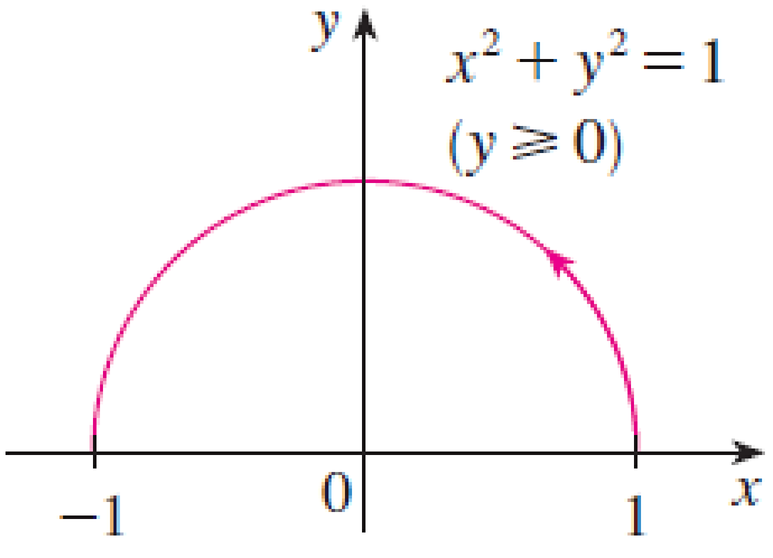


FIGURA 3

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leqslant t \leqslant \pi$

Integrais de linha

Exemplo 1 - solução

$$\int_C (2 + x^2y)\, ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Integrais de linha

Exemplo 1 - solução

$$\int_C (2 + x^2y)\, ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t) \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

Integrais de linha

Exemplo 1 - solução

$$\int_C (2 + x^2 y)\, ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t) \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi}$$

Integrais de linha

Exemplo 1 - solução

$$\int_C (2 + x^2y)\, ds = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t) \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \text{ sen } t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi + \tfrac{2}{3}$$

Integrais de linha

Exemplo 2

Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de (1, 1) a (1, 2).

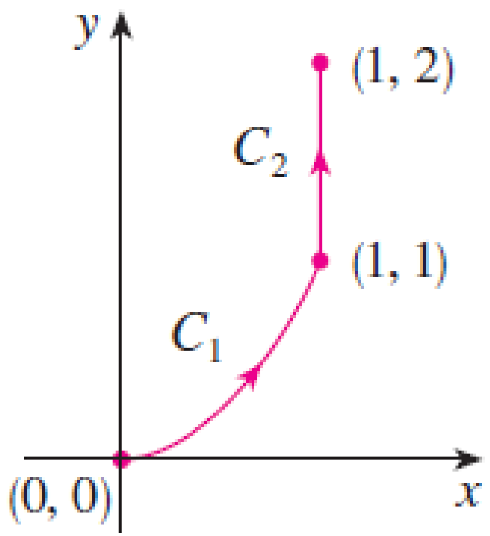


FIGURA 5 $C = C_1 \cup C_2$

Integrais de linha

Exemplo 2

Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de (1, 1) a (1, 2).

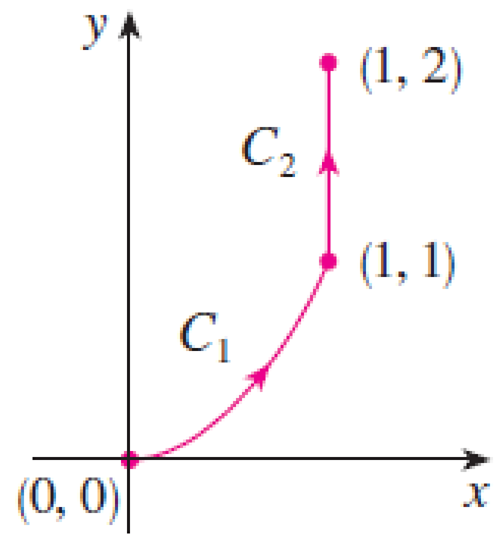


FIGURA 5 $C = C_1 \cup C_2$

Solução:

C_1 é o gráfico de uma função de x, então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Exemplo 2

Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de (1, 1) a (1, 2).

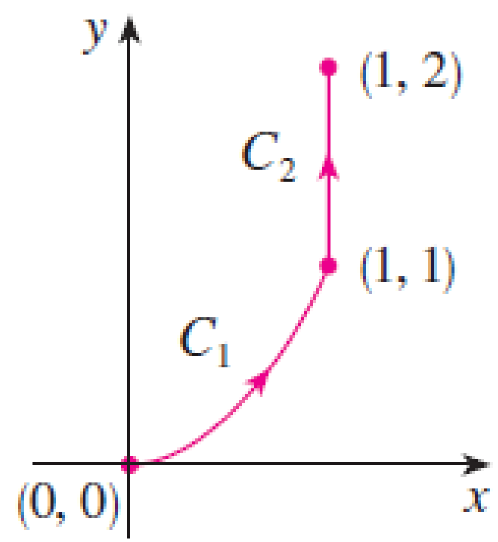


FIGURA 5 $C = C_1 \cup C_2$

Solução:

C_1 é o gráfico de uma função de x, então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\int_{C_1} 2x\, ds = \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Exemplo 2

Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de (1, 1) a (1, 2).

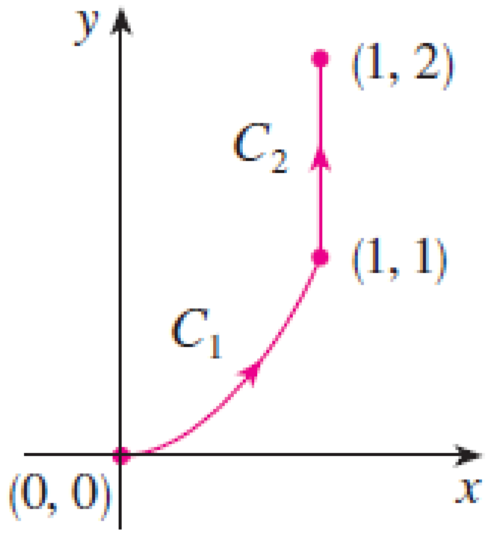


FIGURA 5 $C = C_1 \cup C_2$

Solução:

C_1 é o gráfico de uma função de x, então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\int_{C_1} 2x\, ds = \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Exemplo 2 - solução

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

Integrais de linha

Exemplo 2 - solução

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy$$

Exemplo 2 - solução

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

$$\int_{C_2} 2x\, ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^2 2\, dy = 2$$

Integrais de linha

Exemplo 2 - solução

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$= \int_1^2 2\,dy = 2$$

Logo,

$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Integrais de linha em relação a x e y

- Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i1}$.
- Elas são chamadas, respectivamente, integrais de linha de *f* ao longo de C com relação a x e y.

Integrais de linha em relação a x e y

- Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i1}$.
- Elas são chamadas, respectivamente, integrais de linha de *f* ao longo de C com relação a x e y.
- Essas integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t.

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\, dt$$

Integrais de linha em relação a x e y

- Frequentemente as integrais de linha com relação a x e y ocorrerem em conjunto, então, costuma-se abreviar escrevendo:

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

Integrais de linha em relação a x e y

- Frequentemente as integrais de linha com relação a x e y ocorrerem em conjunto, então, costuma-se abreviar escrevendo:

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

- Será útil lembrar a representação vetorial do **segmento de reta** que inicia em $\mathbf{r}_0$ e termina em $\mathbf{r}_1$, pois em muitas situações iremos parametrizar um segmento de reta:

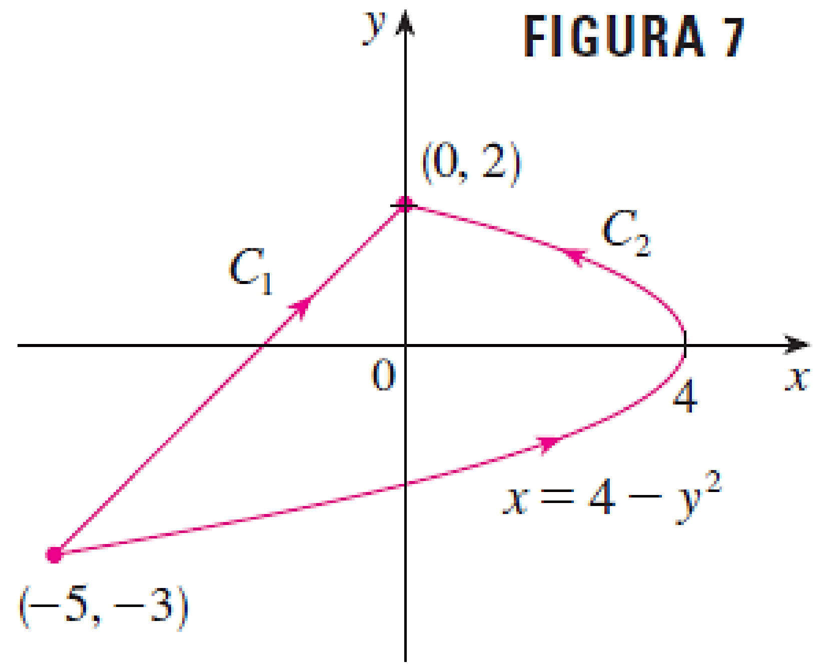
$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Integrais de linha

Exemplo 3

Calcule $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$.

FIGURA 7



Integrais de linha

Exemplo 3

Calcule $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$.

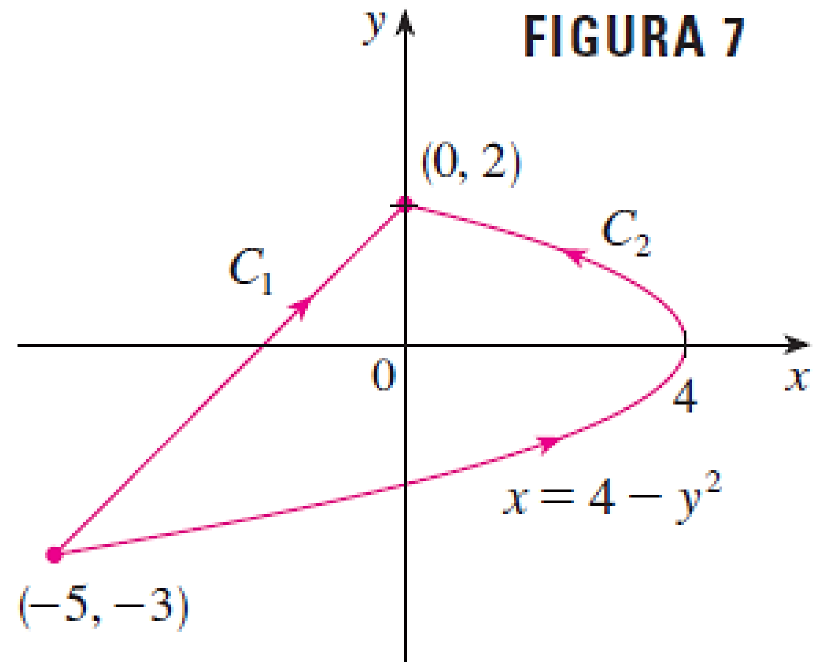


FIGURA 7

Solução:

(a) A representação parametrizada para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Integrais de linha

Exemplo 3

Calcule $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$.

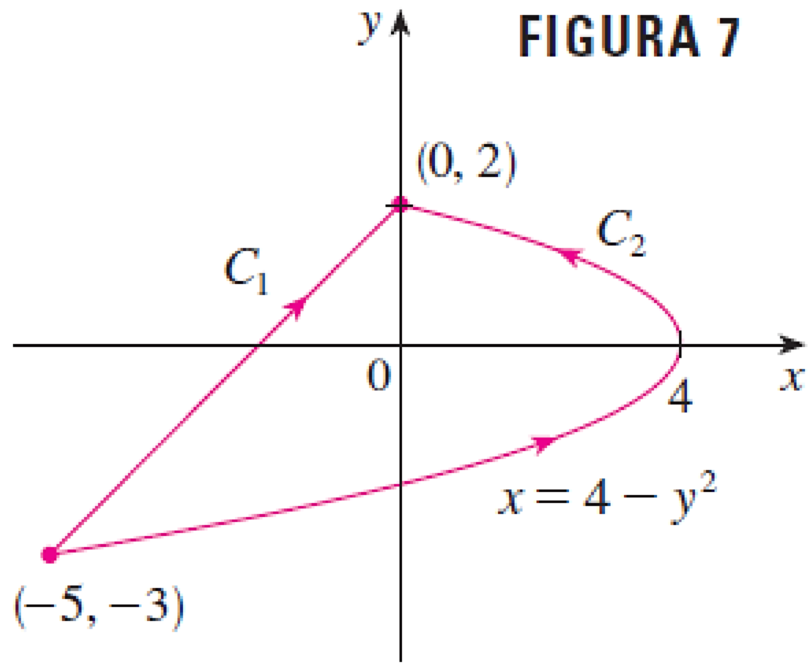


FIGURA 7

Solução:

(a) A representação parametrizada para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.

Integrais de linha

Exemplo 3 - solução

Assim, $dx = 5\,dt, \quad dy = 5\,dt$

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt)$$

Integrais de linha

Exemplo 3 - solução

Assim, $dx = 5\,dt, \quad dy = 5\,dt$

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt$$

Integrais de linha

Exemplo 3 - solução

Assim, $dx = 5\,dt, \quad dy = 5\,dt$

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt$$

$$= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

Exemplo 3 - solução

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\,dy$ e, pela Fórmula 7, temos

Exemplo 3 - solução

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\,dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

Exemplo 3 - solução

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\,dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy$$

Exemplo 3 - solução

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\,dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy$$

$$= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^{2} = 40\tfrac{5}{6}$$

Integrais de linha em relação a x e y

- Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 3 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades.

Integrais de linha em relação a x e y

- Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 3 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades.
- Assim, em geral, o **valor de uma integral de linha** depende não apenas das extremidades da curva, mas também da trajetória.
- Contudo, **nos campos vetoriais conservativos** a integral será independente do caminho.

Integrais de linha em relação a x e y

- Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 3 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades.
- Assim, em geral, o **valor de uma integral de linha** depende não apenas das extremidades da curva, mas também da trajetória.
- Contudo, **nos campos vetoriais conservativos** a integral será independente do caminho.
- As respostas do Exemplo 3 também dependem da **orientação ou sentido** em que a curva é percorrida.

Integrais de linha em relação a x e y

- Se – C denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C, mas com orientação contrária (Figura 8), então temos:

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_{C} f(x, y)\, dx$$

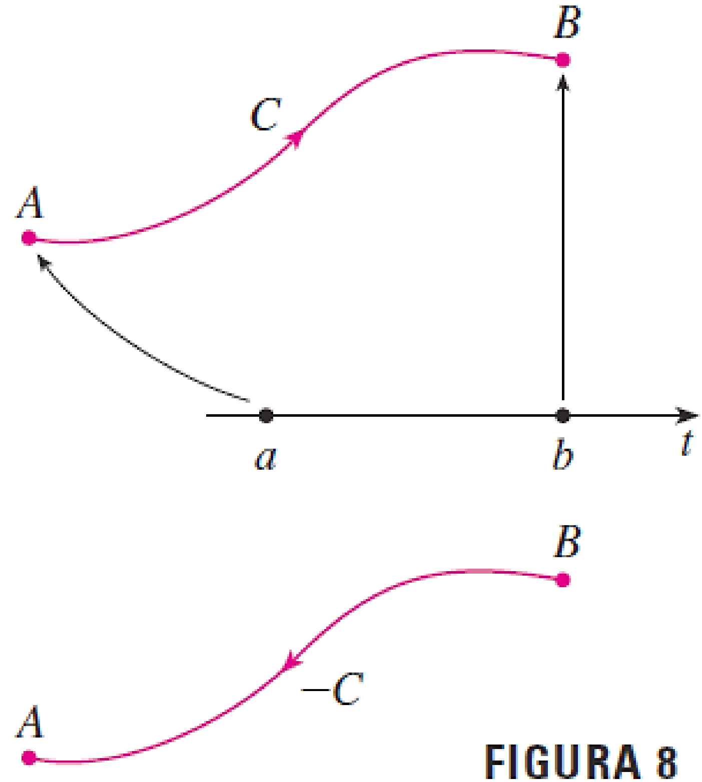


FIGURA 8

Integrais de linha em relação a x e y

- Se – C denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C, mas com orientação contrária (Figura 8), então temos:

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx$$

- Contudo, em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha não se altera ao invertermos a orientação.

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

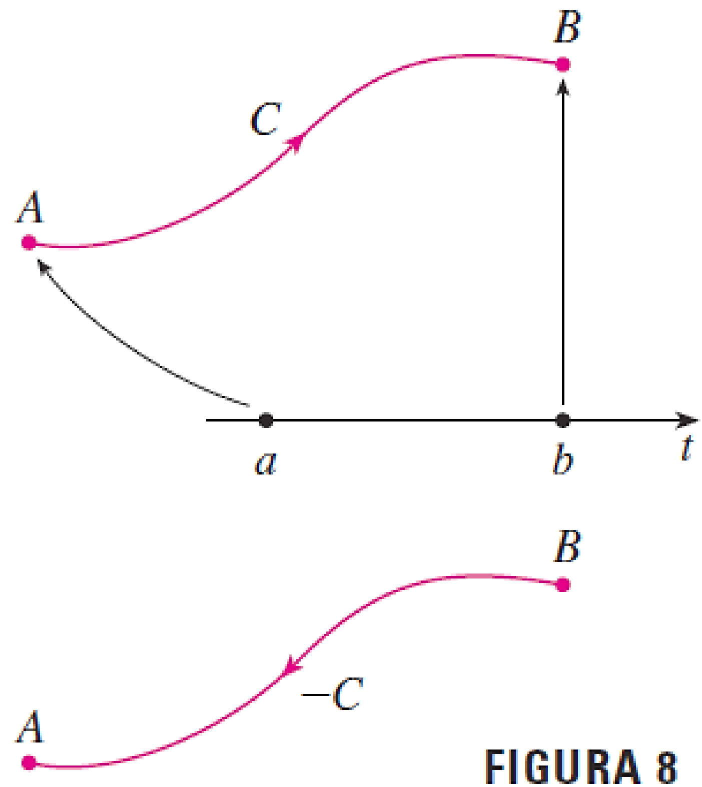


FIGURA 8

Integrais de linha no espaço

Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Integrais de linha no espaço

Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

que pode ser escrita de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Integrais de linha no espaço

Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

que pode ser escrita de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Para o caso em que $f(x, y, z) = 1$, temos o comprimento da curva C

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = L$$

Integrais de linha de campos vetoriais

- Suponha agora que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ seja um campo de força contínuo em R^3, gravitacional ou elétrico.

Integrais de linha de campos vetoriais

- Suponha agora que **F** = P**i** + Q**j** + R**k** seja um campo de força contínuo em R^3, gravitacional ou elétrico.
- Queremos calcular o trabalho exercido por esse campo de força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C.

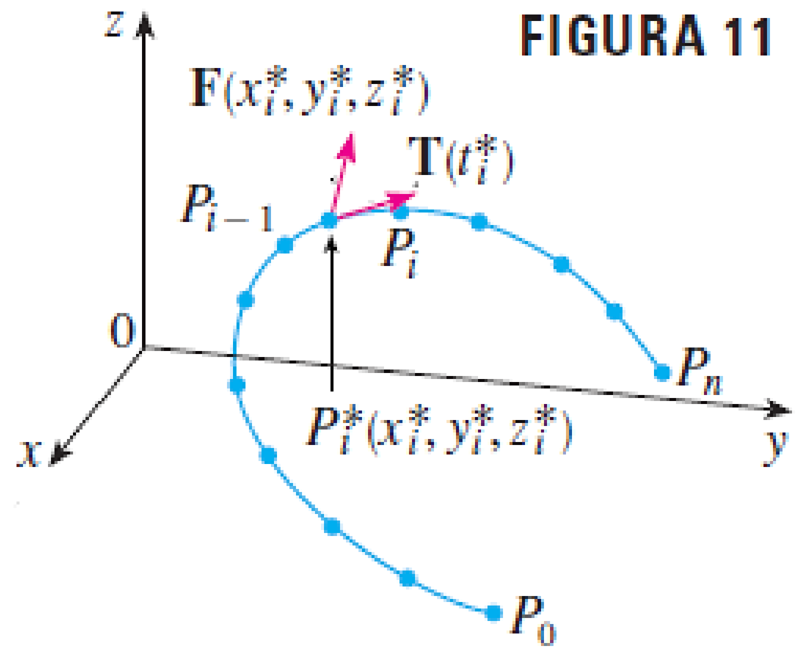


FIGURA 11

Integrais de linha de campos vetoriais

- Suponha agora que **F** = P**i** + Q**j** + R**k** seja um campo de força contínuo em R^3, gravitacional ou elétrico.
- Queremos calcular o trabalho exercido por esse campo de força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C.
- Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ de comprimento Δs_i.

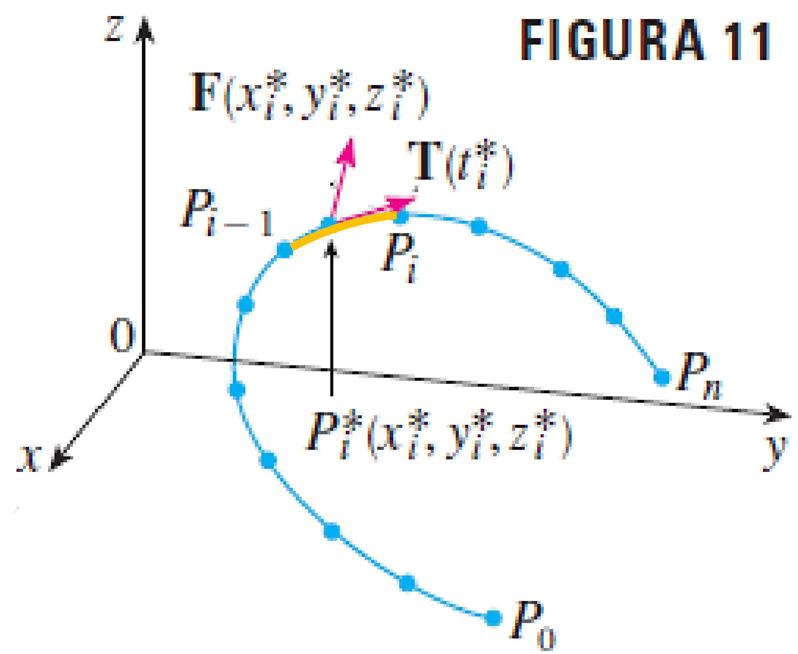


FIGURA 11

Integrais de linha de campos vetoriais

- Suponha agora que **F** = P**i** + Q**j** + R**k** seja um campo de força contínuo em R^3, gravitacional ou elétrico.
- Queremos calcular o trabalho exercido por esse campo de força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C.
- Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ de comprimento Δs_i.
- Se Δs_i é pequeno o movimento ocorre aproximadamente na direção de **T**(t_i^*).

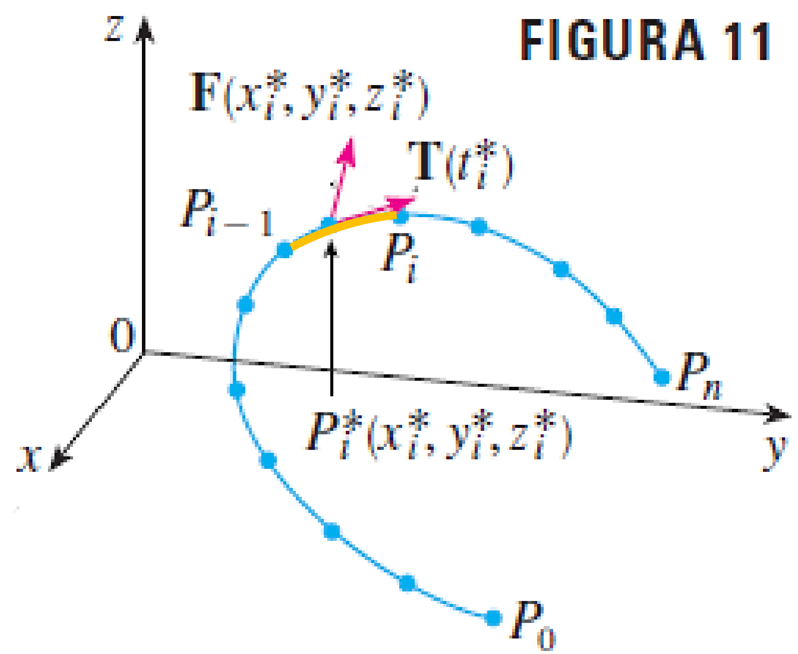


FIGURA 11

Integrais de linha de campos vetoriais

- Então, o trabalho realizado pela força **F** para mover a partícula de P_{i1} para P_i é aproximadamente:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

Integrais de linha de campos vetoriais

- Então, o trabalho realizado pela força **F** para mover a partícula de P_{i1} para P_i é aproximadamente:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

- E o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

Integrais de linha de campos vetoriais

- Então, o trabalho realizado pela força **F** para mover a partícula de P_{i1} para P_i é aproximadamente:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

- E o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

- Portanto, definimos o trabalho W realizado por um campo de força **F** como o limite da soma, ou seja:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Integrais de linha de campos vetoriais

- Se a curva C é dada pela equação vetorial **r**(t), então, como **T**(t) = **r**'(t)/| **r**'(t)| podemos reescrever:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Integrais de linha de campos vetoriais

➢ Se a curva C é dada pela equação vetorial **r**(t), então, como **T**(t) = **r**'(t)/| **r**'(t)| podemos reescrever:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Definição

Seja **F** um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial **r**(t), $a \leq t \leq b$. Então, a integral de linha de **F** ao longo de C é:

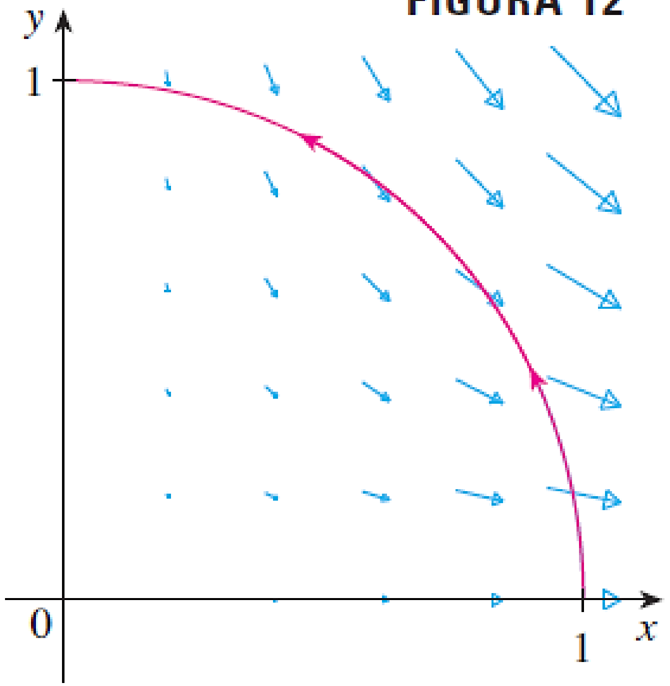
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Integrais de linha

Exemplo 4

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

FIGURA 12

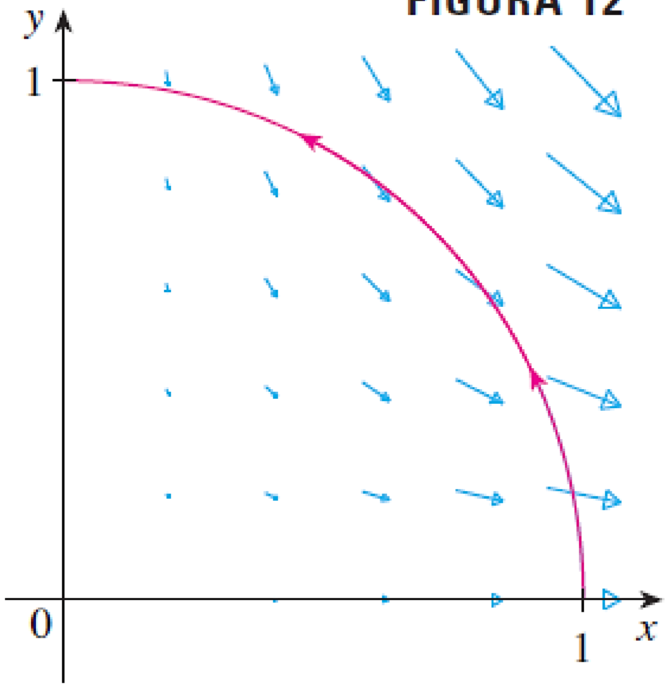


Integrais de linha

Exemplo 4

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

FIGURA 12



Solução:

Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

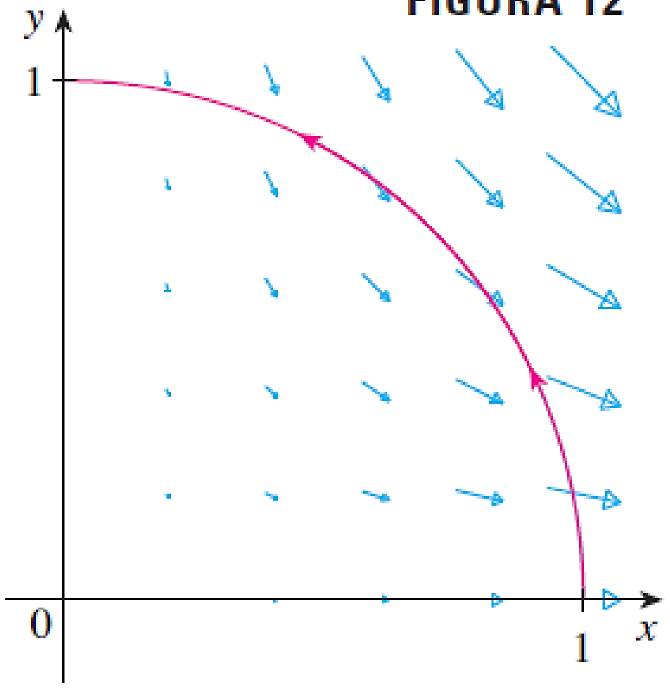
$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Integrais de linha

Exemplo 4

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

FIGURA 12



Solução:

Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

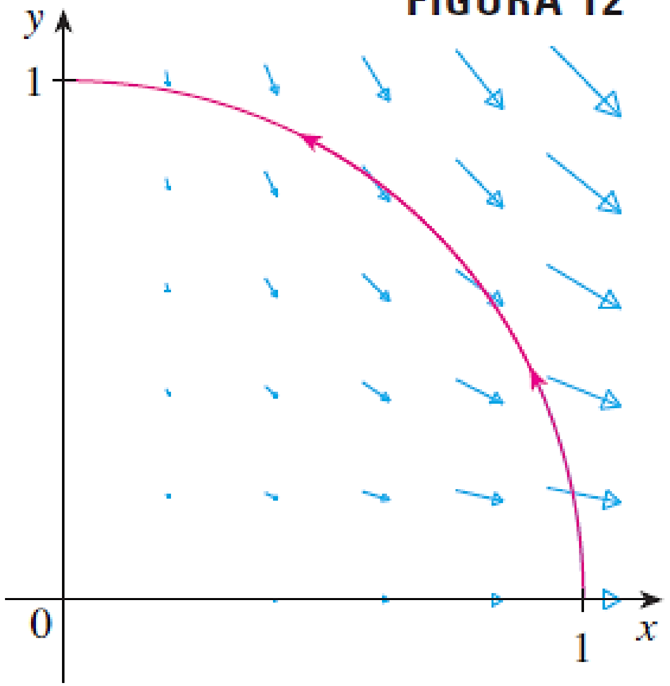
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Integrais de linha

Exemplo 4

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

FIGURA 12



Solução:

Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt = 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.2 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

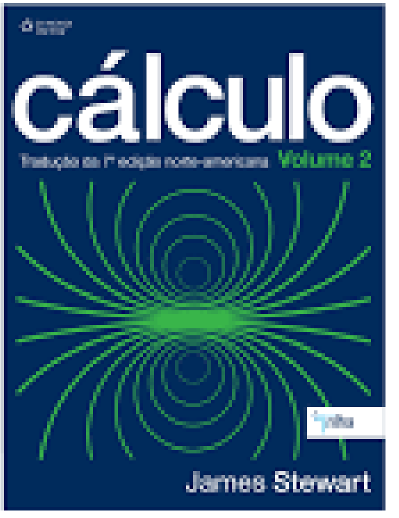
Próxima aula:

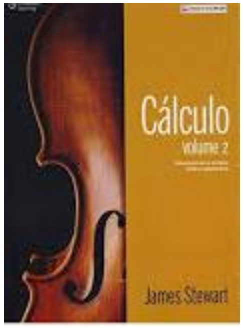
- Teorema fundamental das integrais de linha.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ►





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br