Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 13 - Aula 3
Teorema fundamental das integrais de linha

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Teorema fundamental das integrais de linha

- A Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Onde F' é contínua em [a, b]. A Equação 1 é também chamada **Teorema da Variação Total**: a integral de uma taxa de variação é a variação total.

Teorema fundamental das integrais de linha

- A Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Onde F' é contínua em [a, b]. A Equação 1 é também chamada **Teorema da Variação Total**: a integral de uma taxa de variação é a variação total.
- Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função *f* como uma derivada de *f*, então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema 2

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema 2

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

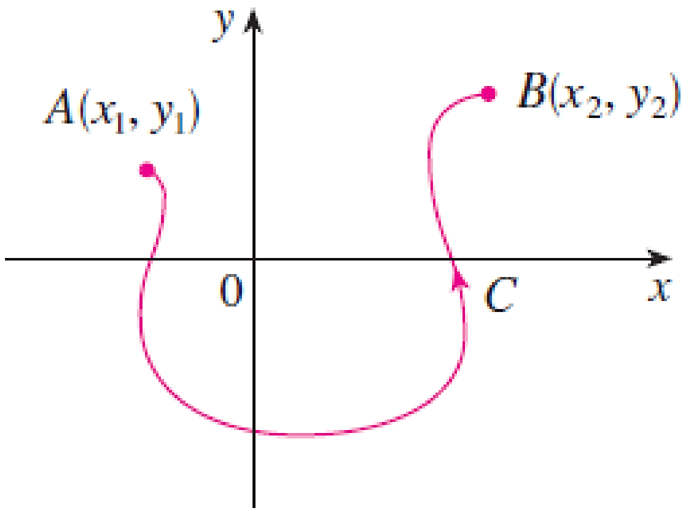
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo simplesmente sabendo o valor de f nos pontos finais de C.

Teorema fundamental das integrais de linha

- Se f é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana, então o Teorema 2 torna-se:

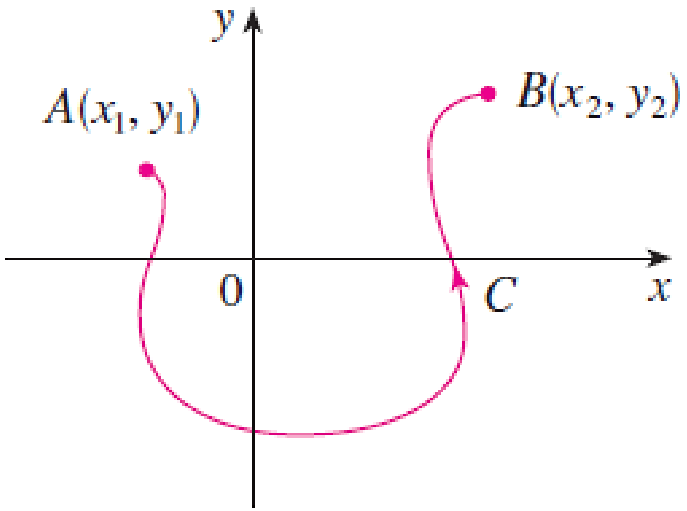
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

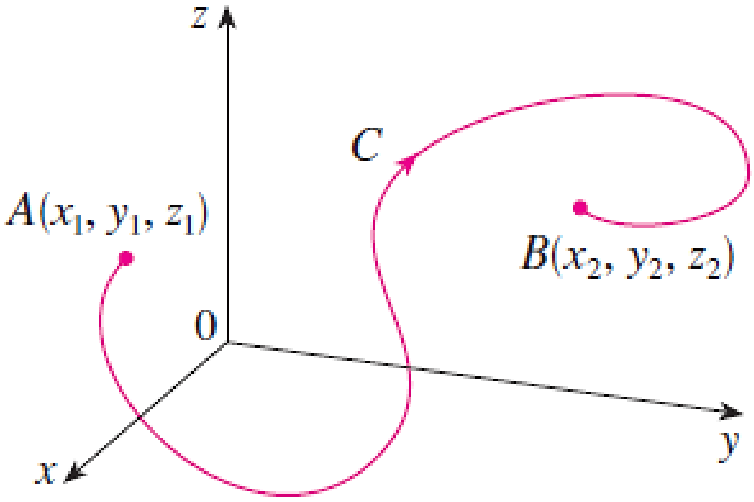


Teorema fundamental das integrais de linha

- Se f é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana, então o Teorema 2 torna-se:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$





- Se f é uma função de três variáveis e C é uma curva espacial, então temos:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

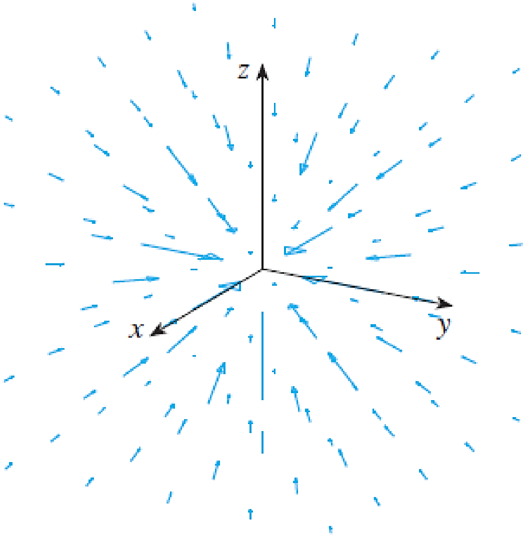
Teorema fundamental

Exemplo 1

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto (3, 4, 12) para o ponto (2, 2, 0) ao longo da curva suave por partes C.



Teorema fundamental

Exemplo 1

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

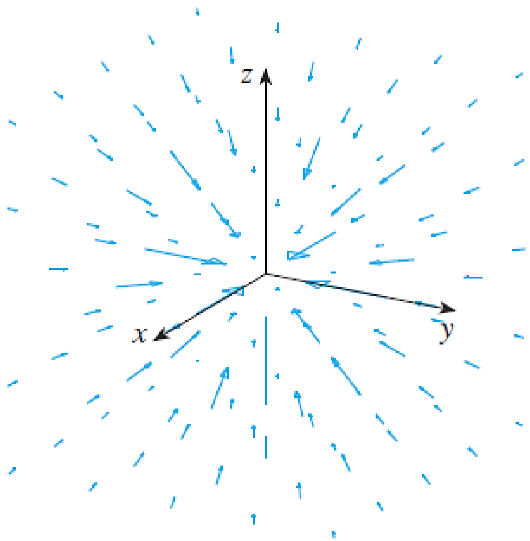
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto (3, 4, 12) para o ponto (2, 2, 0) ao longo da curva suave por partes C.

Solução:

Da Seção 16.1, sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservador e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Teorema fundamental

Exemplo 1 - solução

Portanto, pelo Teorema, o trabalho realizado é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Teorema fundamental

Exemplo 1 - solução

Portanto, pelo Teorema, o trabalho realizado é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

Exemplo 1 - solução

Portanto, pelo Teorema, o trabalho realizado é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}}$$

Teorema fundamental

Exemplo 1 - solução

Portanto, pelo Teorema, o trabalho realizado é

$$
\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\
&= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\
&= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \\
&= mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)
\end{aligned}
$$

Independência de caminho

- Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes denominadas **caminhos**, que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B.
- Em geral a integral $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ é diferente para cada caminho.

Independência de caminho

- Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes denominadas **caminhos**, que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B.
- Em geral a integral $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ é diferente para cada caminho.
- Contudo, em decorrência do Teorema das integrais de linha, sempre que ∇f for contínua:

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Independência de caminho

- Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes denominadas **caminhos**, que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B.
- Em geral a integral $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ é diferente para cada caminho.
- Contudo, em decorrência do Teorema das integrais de linha, sempre que ∇f for contínua:

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

- Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial conservativo depende somente das extremidades da curva.

Independência de caminho

Teorema 3

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Independência de caminho

Teorema 3

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se

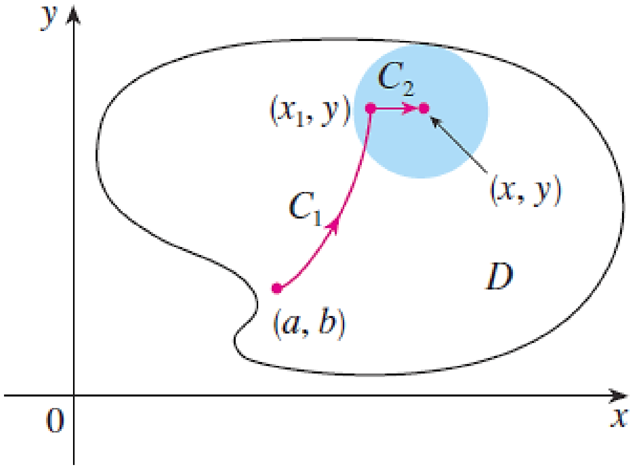
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

Independência de caminho

Teorema 4

D conexo por caminhos: quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho que se encontra em D.

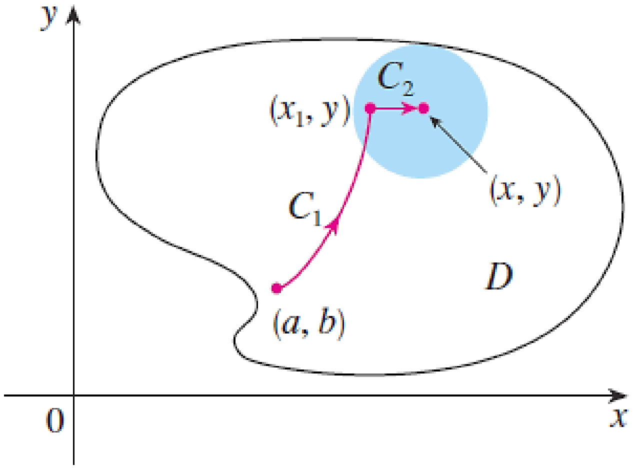


Independência de caminho

Teorema 4

Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo em D, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

D conexo por caminhos: quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho que se encontra em D.



Independência de caminho

Teorema 5

Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Independência de caminho

Teorema 5

Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema 6

Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

Independência de caminho

FIGURA 6 Tipos de curva

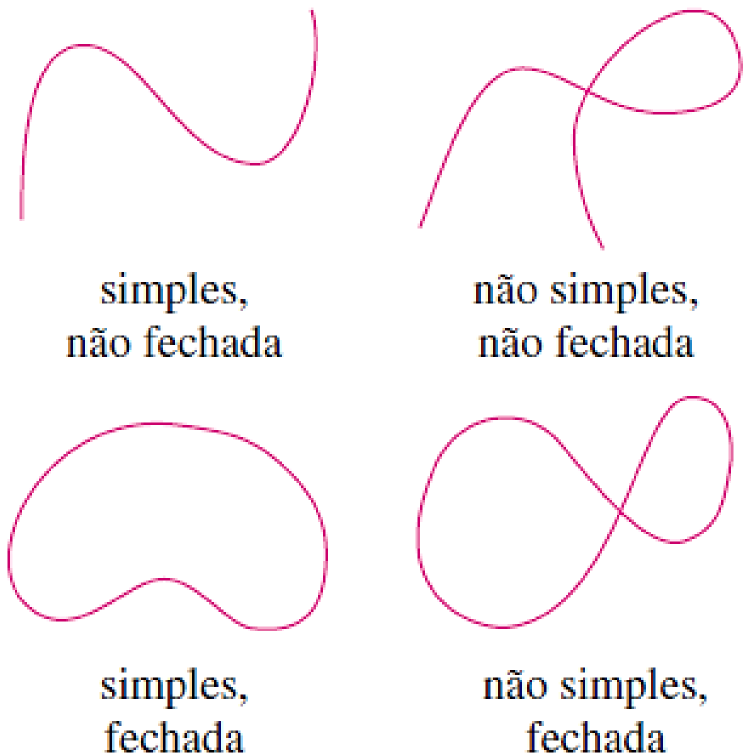
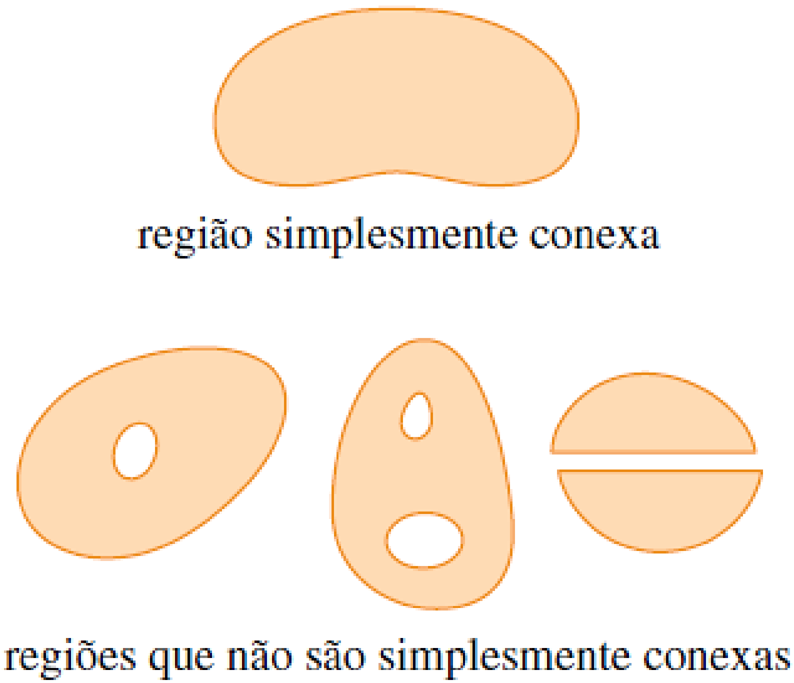


FIGURA 7



A recíproca do **teorema 5** é verdadeira se a curva é fechada simples

O **teorema 6** é válido em uma região simplesmente conexa.

Independência de caminho

Exemplo 2 - solução

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Solução:

Determine se o campo vetorial é ou não conservativo.

$P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Solução:

Determine se o campo vetorial é ou não conservativo.

$P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemplo 2 - solução

(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

Solução:

Determine se o campo vetorial é ou não conservativo.

$P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Portanto, do Teorema 6 e concluir que $\mathbf{F}$ é conservativo.

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad\qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) $\mathbf{F}$ é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Independência de caminho **Exemplo 2** - solução

(a) **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad\qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(a) **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad\qquad \boxed{8} \quad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y

$$\boxed{10} \quad f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em $\boxed{9}$, temos

$$\boxed{f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K}$$ como a função potencial desejada.

Exemplo 2 - solução

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + e^t \cos t\, \mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + e^t \cos t\, \mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(b) Para aplicarmos o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C, isto é, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$.

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + e^t \cos t\, \mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(b) Para aplicarmos o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C, isto é, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$.

Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), tomemos $K = 0$.

$$\boxed{f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Independência de caminho Exemplo 2 - solução

(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + e^t \cos t\, \mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(b) Para aplicarmos o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C, isto é, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$.

Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), tomemos $K = 0$.

$$\boxed{f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

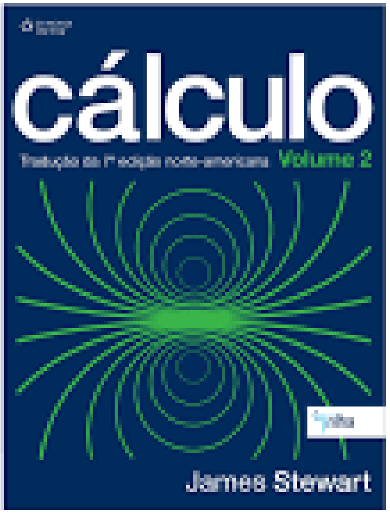
Próxima aula:

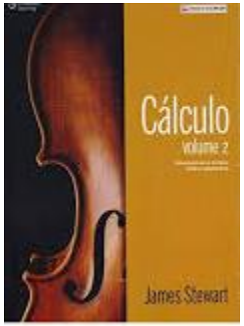
- Teorema de Green.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br