Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 14 - Aula 1
Teorema de Green

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Teorema de Green

- O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma **curva fechada simples C** e **uma integral dupla sobre a região do plano D** delimitada por C.

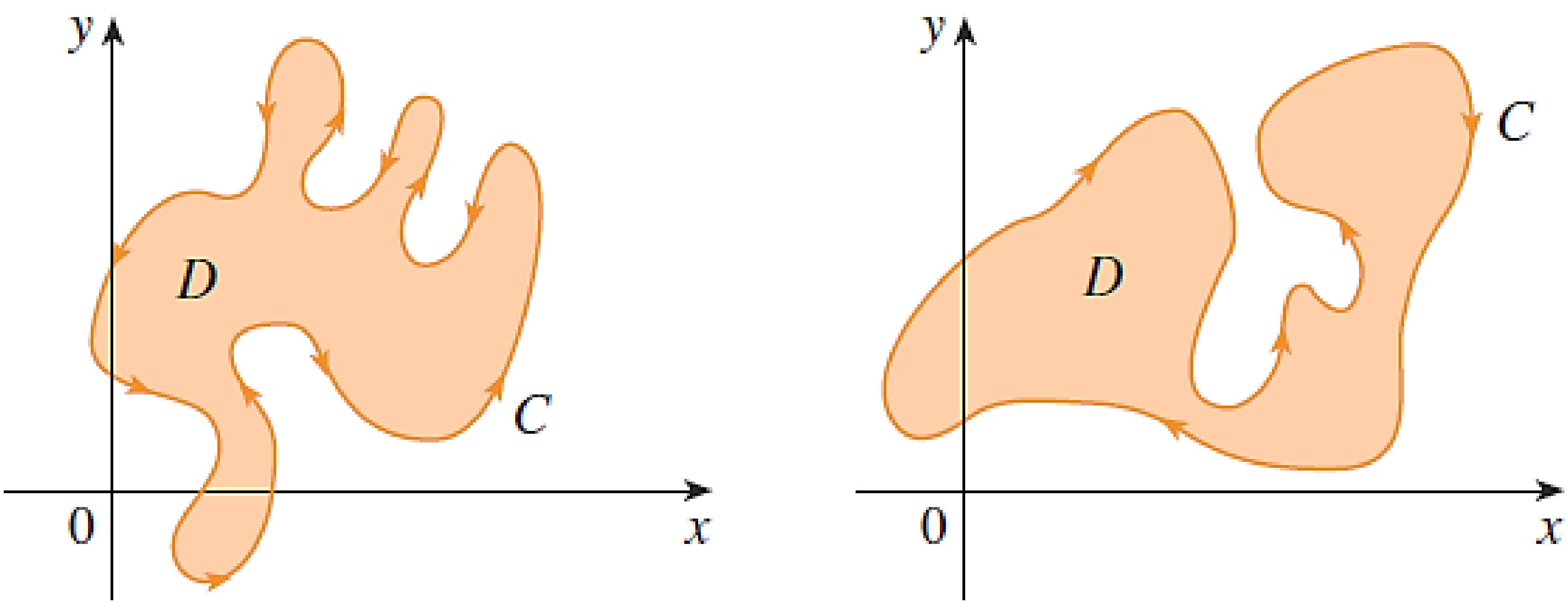
Teorema de Green

- O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma **curva fechada simples C** e **uma integral dupla sobre a região do plano D** delimitada por C.
- Convencionamos que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao sentido anti-horário de C, percorrido uma só vez.

Teorema de Green

- O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma **curva fechada simples C** e **uma integral dupla sobre a região do plano D** delimitada por C.
- Convencionamos que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao sentido anti-horário de C, percorrido uma só vez.
- Assim, se C é dada pela função vetorial **r**(t), $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando **r**(t) percorre C. (Veja a Figura 2.)

Teorema de Green



(a) Orientação positiva   (b) Orientação negativa

FIGURA 2

Teorema de Green

Enunciado do teorema

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C.

Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

Teorema de Green

Enunciado do teorema

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C.

Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Teorema de Green

Enunciado do teorema

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C.

Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Outras notações

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1), e de (0, 1) a (0, 0).

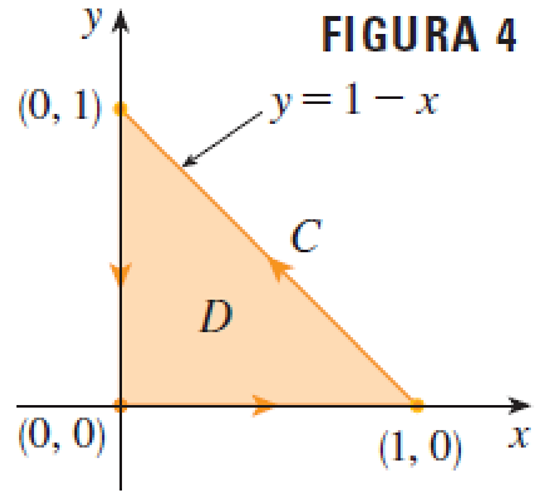


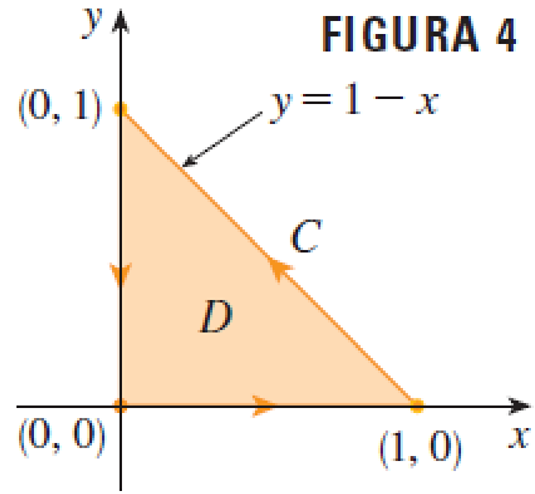
FIGURA 4

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

FIGURA 4



Solução:

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1), e de (0, 1) a (0, 0).

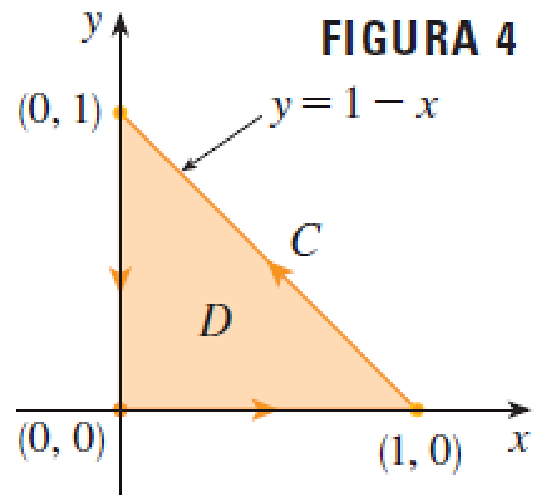


FIGURA 4

Solução:

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

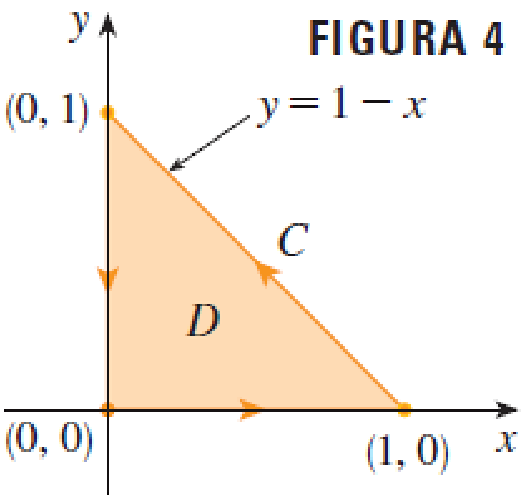


FIGURA 4

Solução:

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

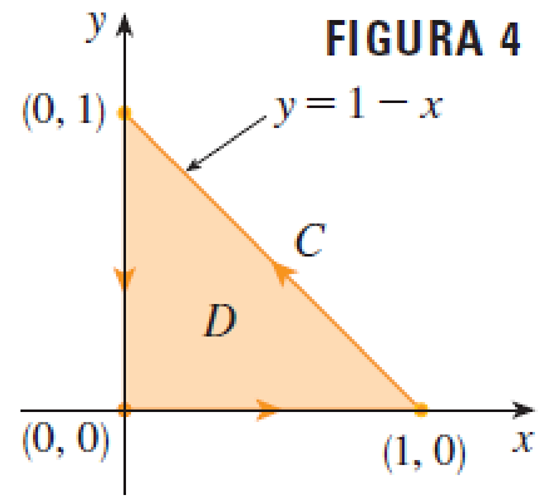
$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

FIGURA 4



Solução:

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

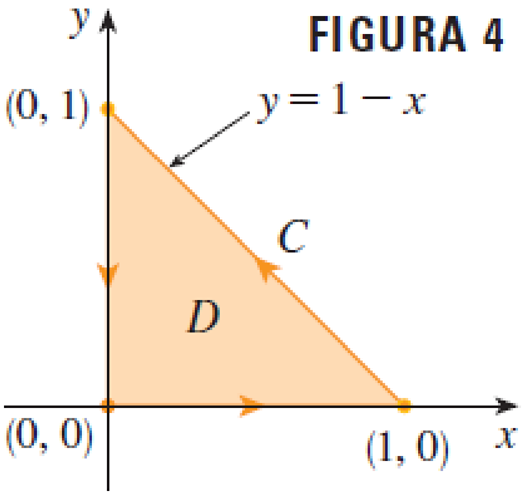
$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

Teorema de Green

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

FIGURA 4



Solução:

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

Teorema de Green

- Outra aplicação do teorema de Green é o cálculo de áreas.
- Como a área de uma região é: $\iint_D 1\, dA$

Teorema de Green

- Outra aplicação do teorema de Green é o cálculo de áreas.
- Como a área de uma região é: $\iint_D 1\, dA$
- Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$

$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

Teorema de Green

- Outra aplicação do teorema de Green é o cálculo de áreas.
- Como a área de uma região é: $\iint_D 1\, dA$
- Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$

$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

- Assim, o Teorema fornece as seguintes expressões:

$$A = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$$

Teorema de Green

Exemplo 2

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Teorema de Green

Exemplo 2

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução:

$$A = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx$$

Teorema de Green

Exemplo 2

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução:

$$A = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)\,dt - (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t)\,dt$$

Exemplo 2

Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

Versões estendidas do Teorema de Green

- Podemos estender o teorema de Green para o caso em que D é a união finita de regiões simples.

Versões estendidas do Teorema de Green

- Podemos estender o teorema de Green para o caso em que D é a união finita de regiões simples.
- Por exemplo, a região D da Figura 6, pode ser escrita como a união de duas regiões D_1 e D_2, ambas simples.

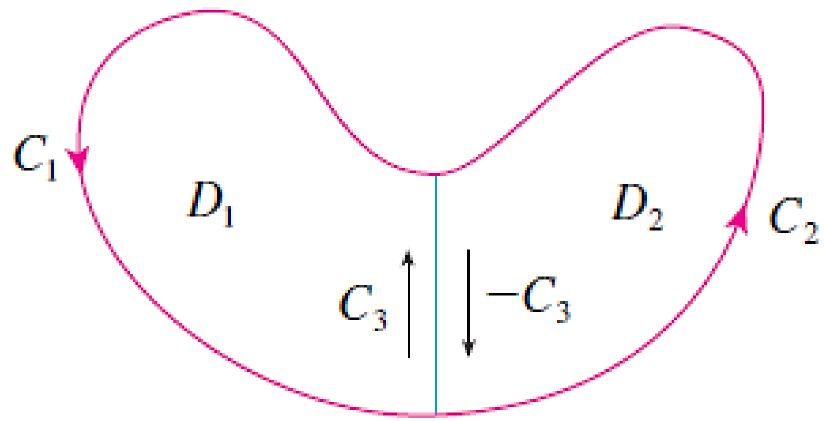


FIGURA 6

Versões estendidas do Teorema de Green

- Podemos estender o teorema de Green para o caso em que D é a união finita de regiões simples.
- Por exemplo, a região D da Figura 6, pode ser escrita como a união de duas regiões D_1 e D_2, ambas simples.
- Aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos:

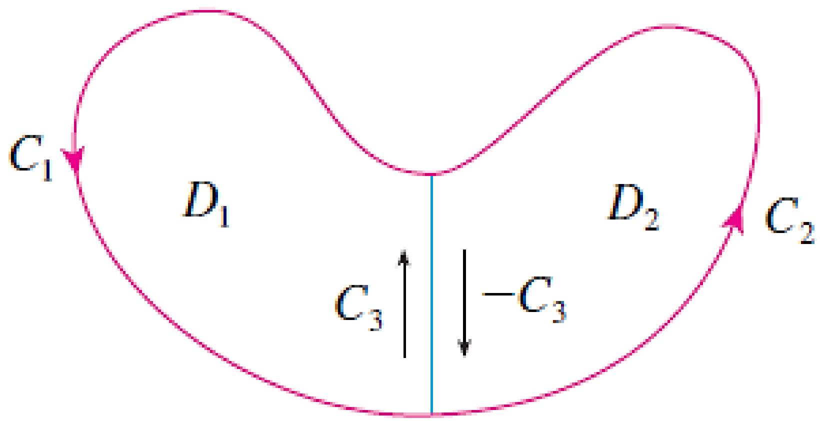


FIGURA 6

Versões estendidas do Teorema de Green

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

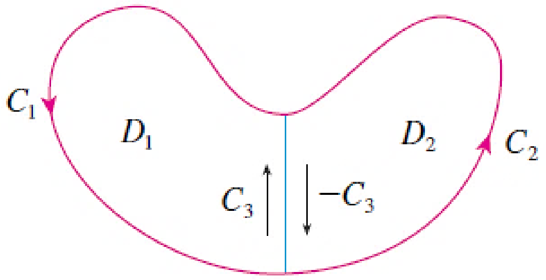


FIGURA 6

Versões estendidas do Teorema de Green

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

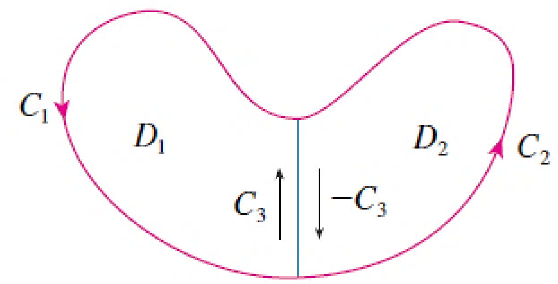


FIGURA 6

- Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos:

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Versões estendidas do Teorema de Green

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

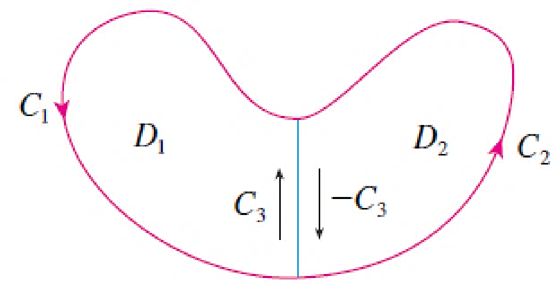


FIGURA 6

- Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos:

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

- Que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

Teorema de Green

Exemplo 3

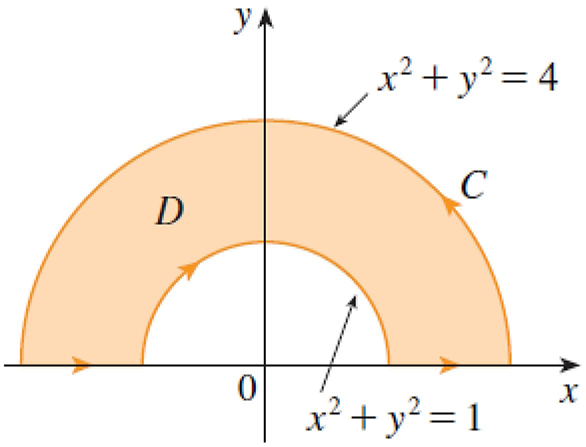
Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (veja a Figura 8).

Exemplo 3

Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (veja a Figura 8).

Solução:

FIGURA 8



Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide em duas regiões simples

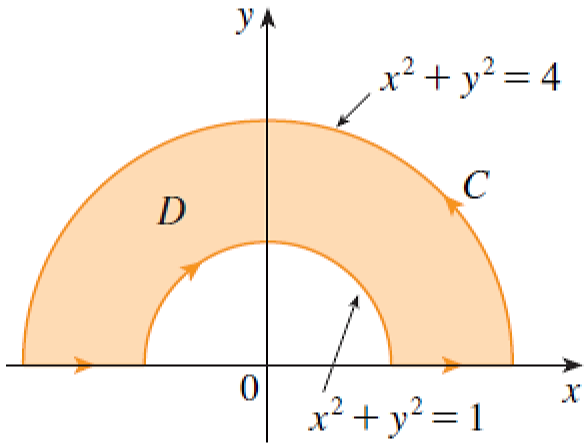
Teorema de Green

Exemplo 3

Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (veja a Figura 8).

Solução:

FIGURA 8



Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide em duas regiões simples

Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Teorema de Green

Exemplo 3 - solução

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

Teorema de Green

Exemplo 3 - solução

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r\,\text{sen}\,\theta)\; r\,dr\,d\theta$$

Teorema de Green

Exemplo 3 - solução

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\,\text{sen}\,\theta)\; r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\;d\theta\;\int_1^2 r^2\,dr$$

Exemplo 3 - solução

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)\, r\,dr\,d\theta$$

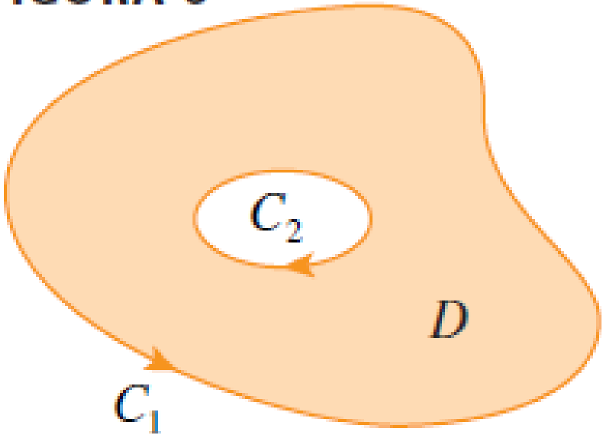
$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta \int_1^2 r^2\,dr$$

$$= \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}$$

Versões estendidas do Teorema de Green

- O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas, como na Figura 9.

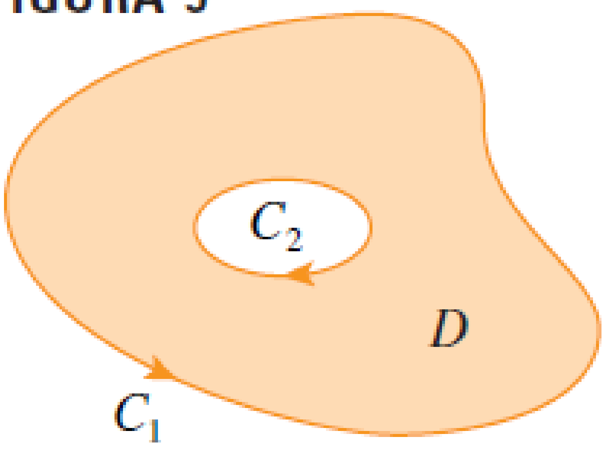
FIGURA 9



Versões estendidas do Teorema de Green

- O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas, como na Figura 9.

FIGURA 9

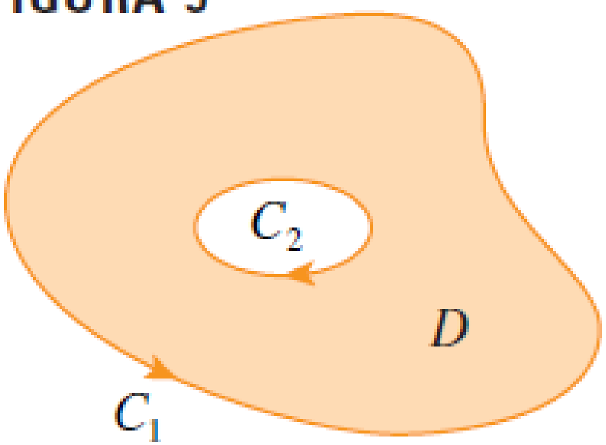


- A região D é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2.

Versões estendidas do Teorema de Green

- O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas, como na Figura 9.

FIGURA 9

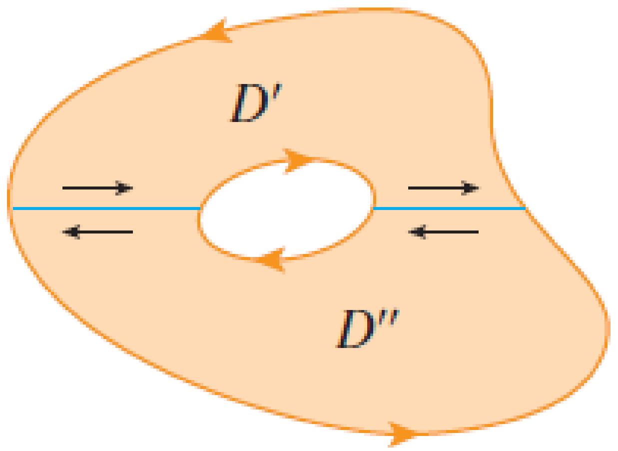


- A região D é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2.
- O sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1, mas no sentido horário para o interior da curva C_2.

Versões estendidas do Teorema de Green

- Se dividirmos D em duas regiões D' e D'', pela introdução das retas (Figura 10) e aplicarmos o Teorema de Green a cada uma dessas regiões temos:

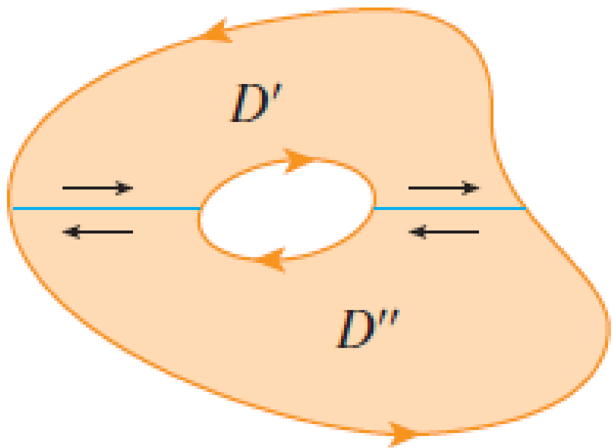
FIGURA 10



Versões estendidas do Teorema de Green

- Se dividirmos D em duas regiões D’ e D”, pela introdução das retas (Figura 10) e aplicarmos o Teorema de Green a cada uma dessas regiões temos:

FIGURA 10



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Versões estendidas do Teorema de Green

- Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Versões estendidas do Teorema de Green

- Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_C P\,dx + Q\,dy$$

- Que é o Teorema de Green para a região *D*.

Teorema de Green

Exemplo 4

Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Teorema de Green

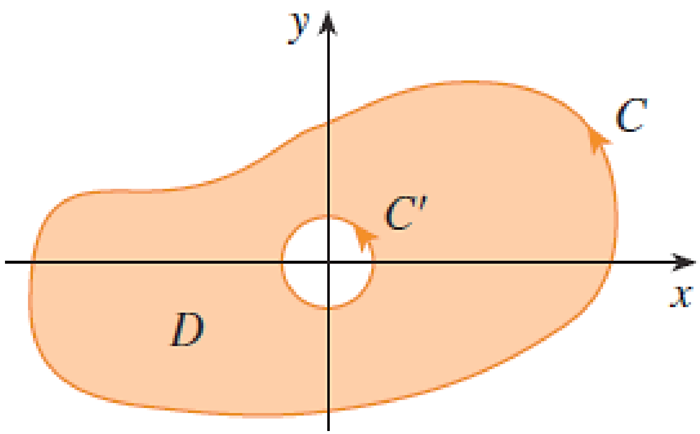
Exemplo 4

Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Solução:

Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente.

FIGURA 11



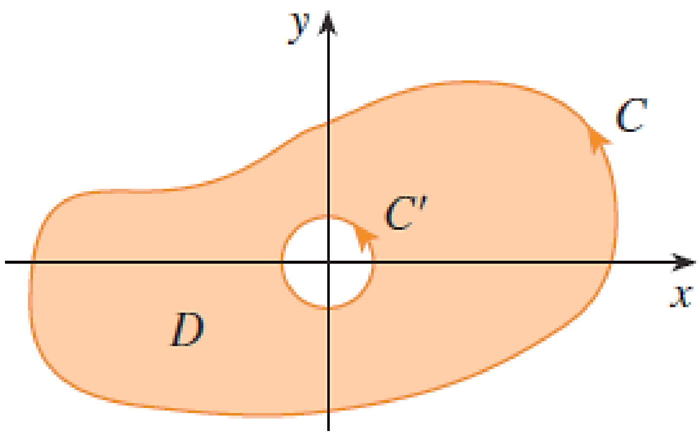
Teorema de Green

Exemplo 4

Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Solução:

FIGURA 11



Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente.

Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a,

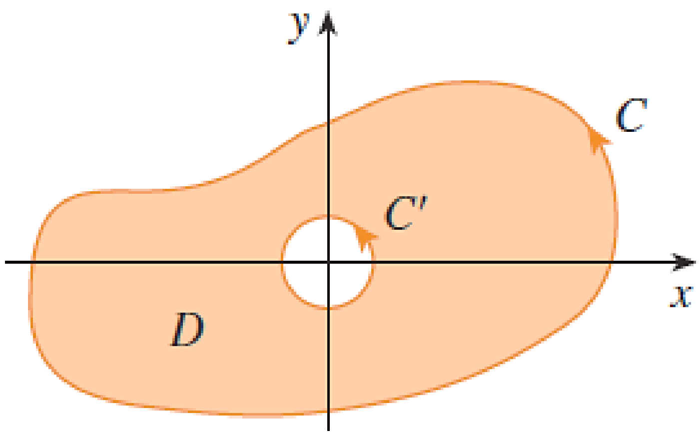
Teorema de Green

Exemplo 4

Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

Solução:

FIGURA 11



Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente.

Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a,

Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva do limite é $C \cup (-C')$ e, aplicando o Teorema de Green, temos

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Logo, $\displaystyle \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Logo, $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Logo, $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Agora podemos calcular essa última integral usando a parametrização

$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$ Logo,

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Logo, $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy \Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Agora podemos calcular essa última integral usando a parametrização

$\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$ Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Teorema de Green

Exemplo 4 - solução

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t) + (a\cos t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\,\mathrm{sen}^2 t}\,dt$$

Exemplo 4 - solução

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.4 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

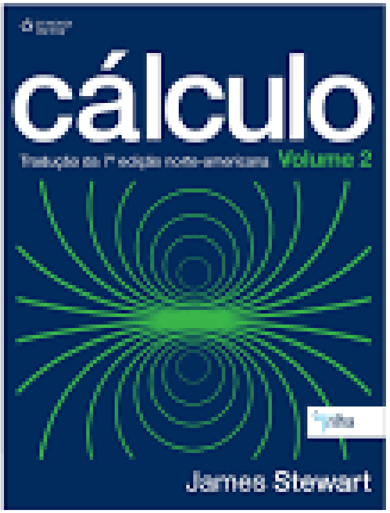
Próxima aula:

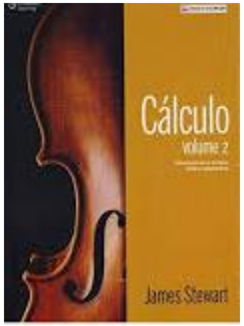
- Rotacional e divergente

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br