Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 14 - Aula 2
Divergente e rotacional

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Rotacional e divergente

- Nesta aula, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais.
- Estas operações são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletromagnetismo.

Rotacional e divergente

- Nesta aula, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais.
- Estas operações são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletromagnetismo.
- Cada operação lembra uma derivação, mas uma delas produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.
- Iniciaremos com a definição de rotacional.

Rotacional

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.
- Vamos reescrever as derivadas usando a notação de operadores.

Rotacional

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.
- Vamos reescrever as derivadas usando a notação de operadores.
- Introduziremos o **operador diferencial vetorial** $\boldsymbol{\nabla}$ ("del") como:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Rotacional

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.
- Vamos reescrever as derivadas usando a notação de operadores.
- Introduziremos o **operador diferencial vetorial** $\boldsymbol{\nabla}$ ("del") como:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Quando ∇ opera em uma função escalar produz:

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Rotacional

- Se pensarmos ∇ como um vetor de componentes ∂/∂x, ∂/∂y e ∂/∂z, podemos também considerar o produto vetorial:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotacional

- Se pensarmos ∇ como um vetor de componentes ∂/∂x, ∂/∂y e ∂/∂z, podemos também considerar o produto vetorial:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Rotacional

- Se pensarmos ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

- O resultado é chamado de rotacional (rot **F**).

Rotacional

Definição

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Rotacional

Definição

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Outro modo de exprimir

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

Rotacional

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Rotacional

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Solução:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Solução:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \mathbf{j}$$

Rotacional

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Solução:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}$$

Rotacional

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Solução:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

Rotacional

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

Solução:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Rotacional – Teorema 3

- Sabemos que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre R^3.
- Então, podemos calcular seu rotacional cujo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é nulo.

Rotacional – Teorema 3

- Sabemos que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre R^3.
- Então, podemos calcular seu rotacional cujo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é nulo.

Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

Rotacional

Demonstração do teorema do rot do gradiente

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Rotacional

Demonstração do teorema do rot do gradiente

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \right) \mathbf{k}$$

Rotacional

Demonstração do teorema do rot do gradiente

$$\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \right) \mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0} \qquad \text{pelo Teorema de Clairaut.}$$

Rotacional

Demonstração do teorema do rot do gradiente

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \right) \mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0} \qquad \text{pelo Teorema de Clairaut.}$$

Como um campo vetorial conservativo é da forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema pode ser reescrito como segue:

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Rotacional

Exemplo 2

Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

Rotacional

Exemplo 2

Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

Solução:

No Exemplo 1, mostramos que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Rotacional

Exemplo 2

Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

Solução:

No Exemplo 1, mostramos que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, $\mathbf{F}$ não é conservativo.

Rotacional

Exemplo 2

Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

Solução:

No Exemplo 1, mostramos que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, $\mathbf{F}$ não é conservativo.

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se $\mathbf{F}$ for definido em todo o espaço, a recíproca vale.

Rotacional – Teorema 4

Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ será um campo vetorial conservativo.

Rotacional – Teorema 4

Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ será um campo vetorial conservativo.

O teorema 4 vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".

Divergente

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.

Divergente

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.
- Então o divergente de **F** é a função de três variáveis definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergente

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.

- Então o divergente de **F** é a função de três variáveis definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- O divergente (div **F**) pode ser escrito como um produto escalar:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Divergente

- Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.

- Então o divergente de **F** é a função de três variáveis definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- O divergente (div **F**) pode ser escrito como um produto escalar:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

- O div **F** é um campo escalar, enquanto o rot **F** é um campo vetorial.

Divergente

Exemplo 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div $\mathbf{F}$.

Divergente

Exemplo 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div $\mathbf{F}$.

Solução:

Pela definição de divergente temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Divergente

Exemplo 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div $\mathbf{F}$.

Solução:

Pela definição de divergente temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)$$

Divergente

Exemplo 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div $\mathbf{F}$.

Solução:

Pela definição de divergente temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) \\ &= z + xz\end{aligned}$$

Divergente – Teorema

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

Divergente – Teorema

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$$

Demonstração

Usando as definições de divergente e rotacional, temos

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

Divergente – Teorema

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

Demonstração

Usando as definições de divergente e rotacional, temos

$$\begin{aligned}\text{div rot } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Divergente – Teorema

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

Demonstração

Usando as definições de divergente e rotacional, temos

$$\begin{aligned}
\text{div rot } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}
\end{aligned}$$

Divergente – Teorema

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$$

Demonstração

Usando as definições de divergente e rotacional, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} \\
&= 0 \qquad \text{pois os termos se cancelam}
\end{aligned}$$

Laplaciano

- Outro operador diferencial aparece ao se calcular o divergente do gradiente de um campo vetorial. Se *f* é uma função de três variáveis, temos:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplaciano

- Outro operador diferencial aparece ao se calcular o divergente do gradiente de um campo vetorial. Se f é uma função de três variáveis, temos:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Esta expressão é chamada de operador de Laplace e abreviada por: $\nabla^2 f$

Laplaciano

- Outro operador diferencial aparece ao se calcular o divergente do gradiente de um campo vetorial. Se *f* é uma função de três variáveis, temos:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Esta expressão é chamada de operador de Laplace e abreviada por: $\nabla^2 f$

- Sendo:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad \text{laplaciano}$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- Os operadores divergente e rotacional permitem escrever o Teorema de Green na forma vetorial.

Forma vetorial do Teorema de Green

- Os operadores divergente e rotacional permitem escrever o Teorema de Green na forma vetorial.
- Seja o campo vetorial $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$. A sua integral de linha é:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- Os operadores divergente e rotacional permitem escrever o Teorema de Green na forma vetorial.
- Seja o campo vetorial $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$. A sua integral de linha é:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

- Considerando **F**(x, y) um campo vetorial de R^3 com a terceira componente nula temos:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix}$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- Os operadores divergente e rotacional permitem escrever o Teorema de Green na forma vetorial.
- Seja o campo vetorial $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$. A sua integral de linha é:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

- Considerando **F**(x, y) um campo vetorial de R^3 com a terceira componente nula temos:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- Portanto:

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- Portanto:

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

- Então podemos escrever:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Teorema de Green
na forma vetorial

Forma vetorial do Teorema de Green

- A dedução da segunda forma pode ser feita considerando uma equação vetorial **r**(t) que descreve uma curva C.

Forma vetorial do Teorema de Green

- A dedução da segunda forma pode ser feita considerando uma equação vetorial **r**(t) que descreve uma curva C.
- Calculando o vetor tangente e normal chega-se em:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Forma vetorial do Teorema de Green

- A dedução da segunda forma pode ser feita considerando uma equação vetorial **r**(t) que descreve uma curva C.
- Calculando o vetor tangente e normal chega-se em:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

- Desenvolvendo a integral encontramos:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Segunda forma vetorial do Teorema de Green

Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.5 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

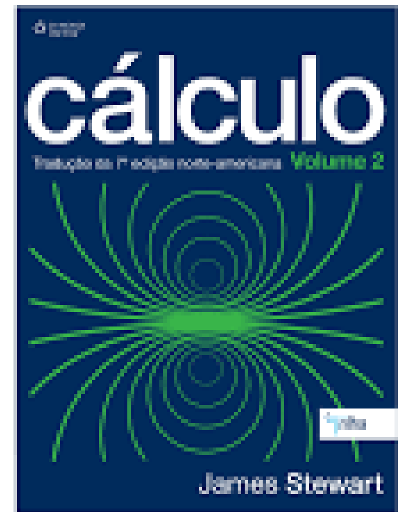
Próxima aula:

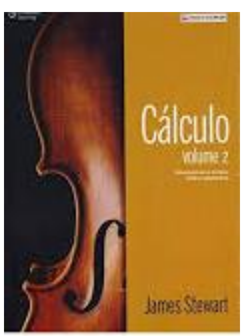
- Superfícies parametrizadas e suas áreas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br