Cálculo II
Bacharelado e Engenharias

Semana 14 - Aula 3
Superfícies parametrizadas e áreas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Superfícies parametrizadas

- Podemos descrever uma **superfície** $\boldsymbol{S}$ por uma função vetorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v.
- Seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

Superfícies parametrizadas

- Podemos descrever uma **superfície** $\boldsymbol{S}$ por uma função vetorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v.
- Seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

- A **equações parametrizadas** de S cujas variáveis u e v variam do domínio D são:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

Superfícies parametrizadas

- A superfície é traçada pela ponta do vetor posição $\boldsymbol{r}(u, v)$ enquanto (u, v) se move na região D.

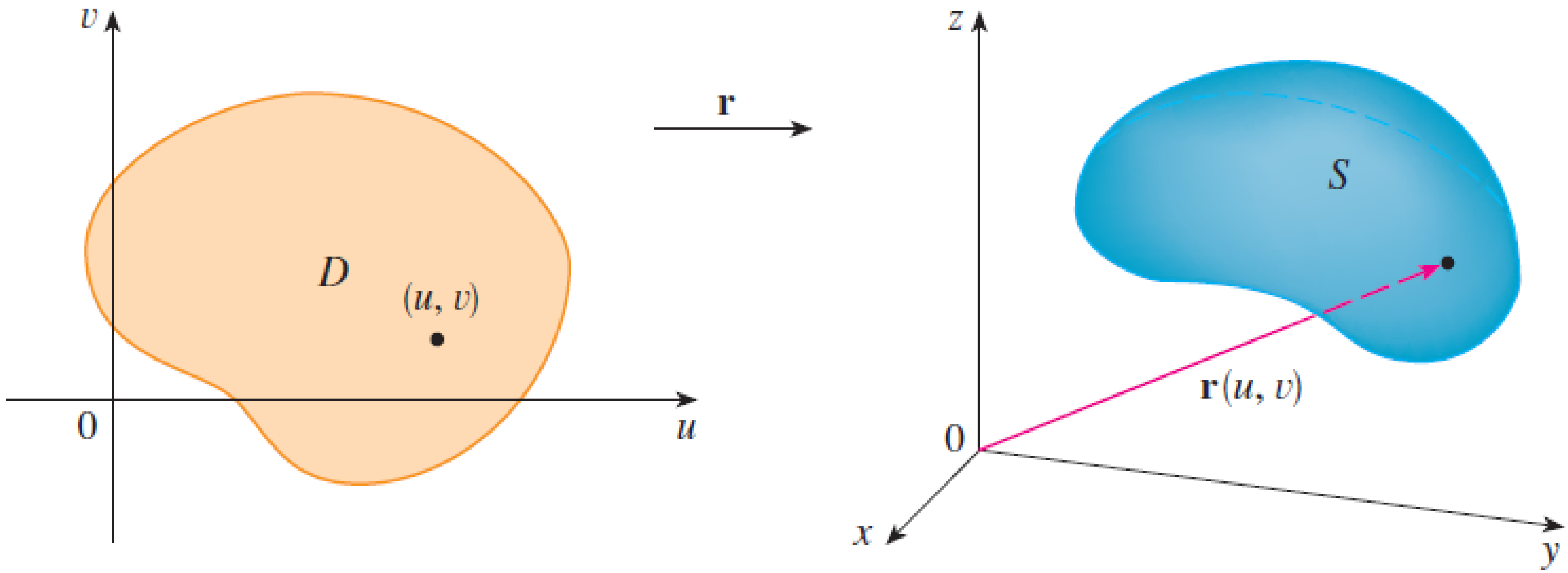


FIGURA 1

Superfícies parametrizadas

Exemplo 1

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \, \mathbf{i} + v \, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u \, \mathbf{k}$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 1

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

Solução:

As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\text{sen}\,u$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 1

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

Solução:

As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\text{sen}\,u$$

então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\,\text{sen}^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz são circunferências de raio 2.

Superfícies parametrizadas **Ex. 1** - solução

Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

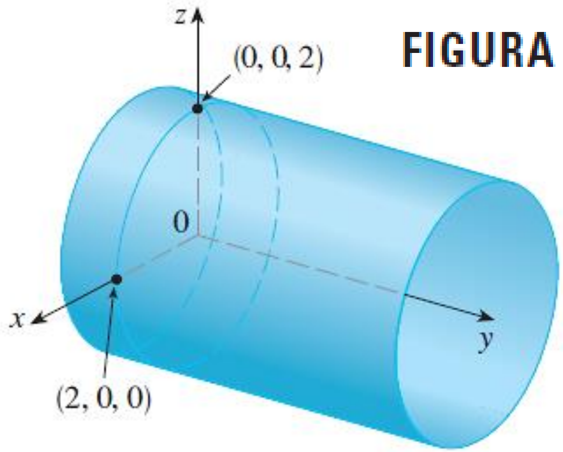


FIGURA 2

Superfícies parametrizadas

Ex. 1 - solução

Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

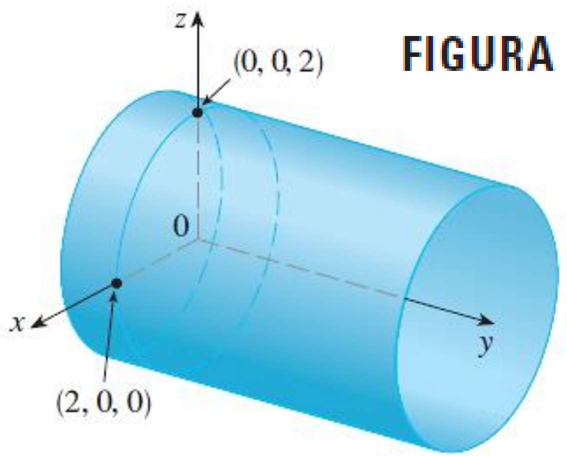


FIGURA 2

Se restringíssemos u e v, escrevendo o domínio dos parâmetros como

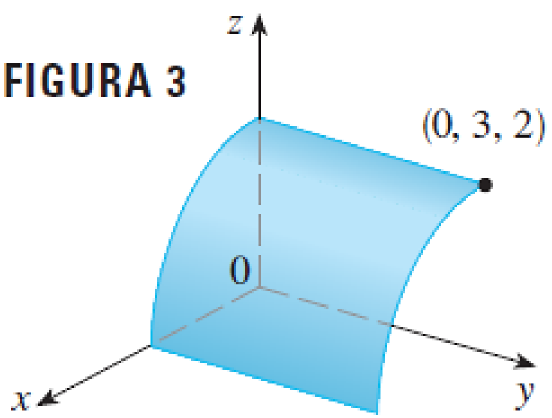
$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \quad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

Então $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$,

$0 \leqslant y \leqslant 3$ e

obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 da Figura 3.

FIGURA 3



Superfícies parametrizadas

Exemplo 2

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Superfícies parametrizadas

Exemplo 2

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Solução:

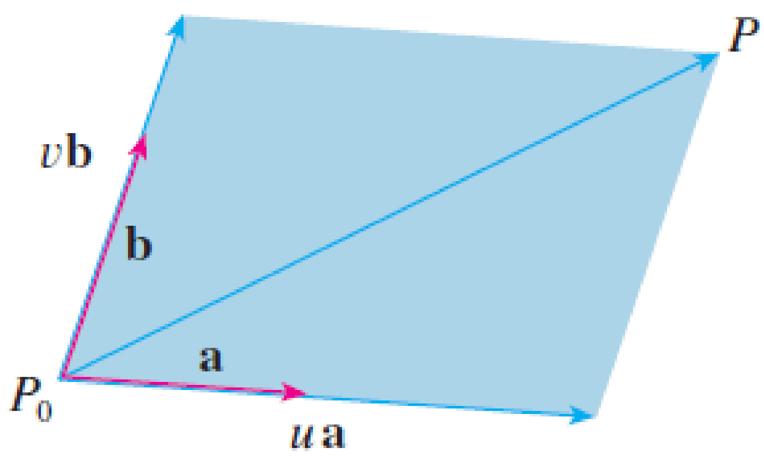
Existem escalares u e v tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

FIGURA 6



Superfícies parametrizadas

Exemplo 2

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos **a** e **b**. Solução:

Existem escalares u e v tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

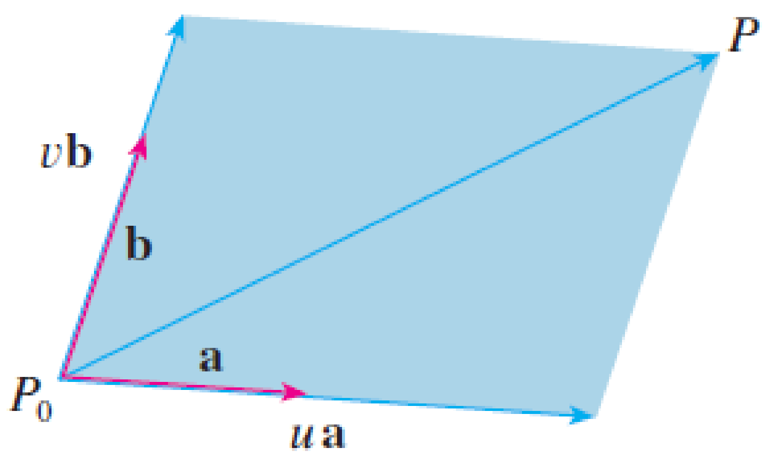
Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

FIGURA 6



Superfícies parametrizadas

Exemplo 2

Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Solução:

Existem escalares u e v tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

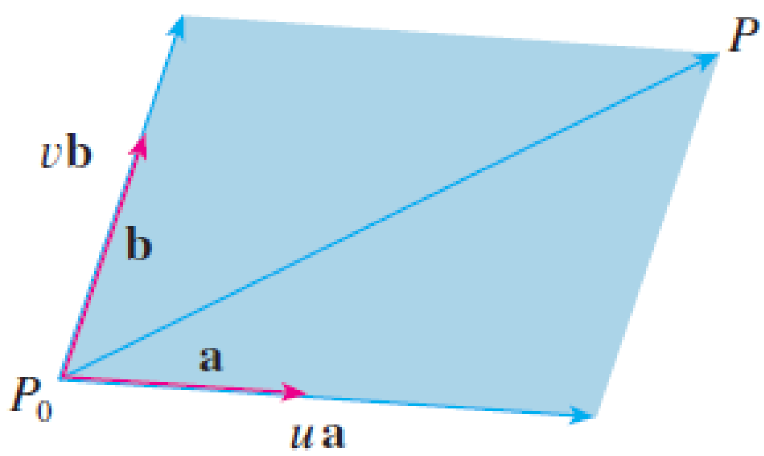
Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

FIGURA 6



Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, podemos escrever as equações paramétricas:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 3

Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 3

Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solução:

Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 3

Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solução:

Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{j} + a \cos \phi \,\mathbf{k}$$

Temos $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Superfícies parametrizadas

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Superfícies parametrizadas

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solução 1:

Uma representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solução 1:

Uma representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\;\mathbf{k}$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solução 2:

Outra representação resulta das coordenadas polares r e θ.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ e } z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r.$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solução 2:

Outra representação resulta das coordenadas polares r e θ.

$$x = r\cos\theta,\ y = r \operatorname{sen}\theta \text{ e } z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r.$$

Assim, uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\ \mathbf{i} + r \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j} + 2r\ \mathbf{k}$$

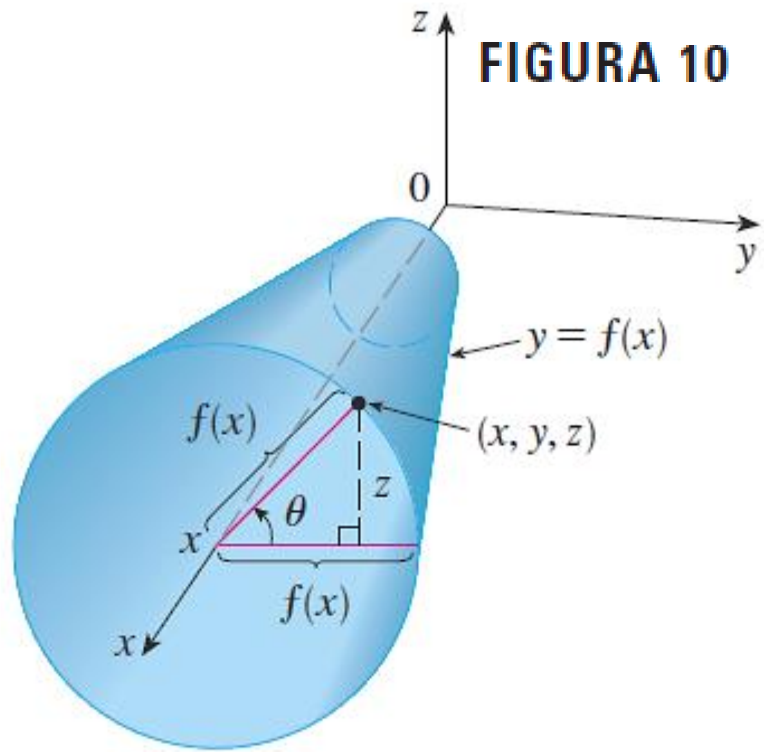
onde $r \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Superfície de revolução

Superfícies de revolução

- As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada.
- Seja a superfície **S** obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sobre o eixo x, onde $f(x) \geq 0$

FIGURA 10

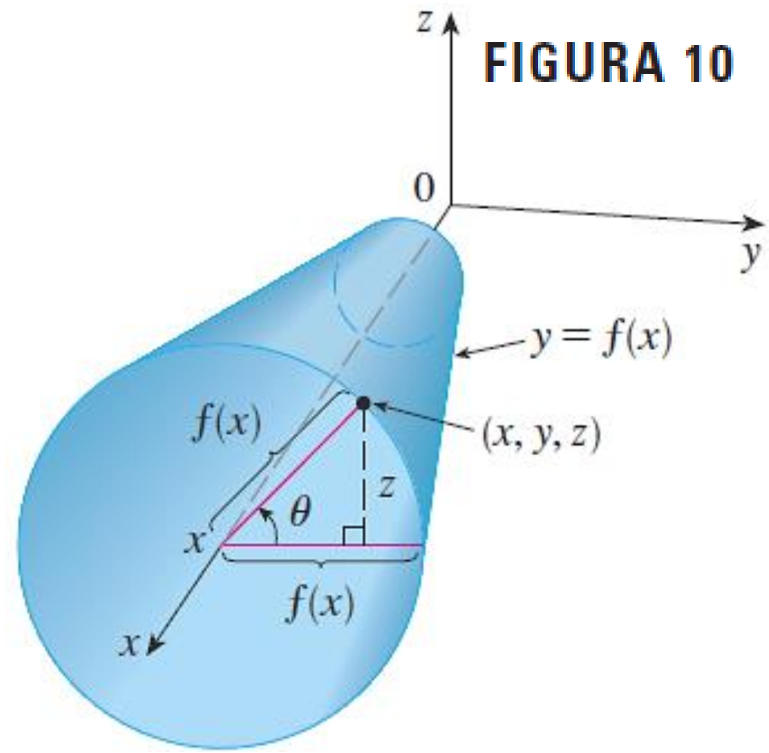


Superfícies de revolução

- As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada.
- Seja a superfície **S** obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sobre o eixo x, onde $f(x) \geq 0$
- Para ângulo de rotação θ e (x, y, z) um ponto em S a parametrização será:

$$x = x \qquad y = f(x)cos\theta$$
$$z = f(x)sen\theta$$

FIGURA 10



Planos tangentes

Planos tangentes

- Seja uma superfície parametrizada determinada pela função vetorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

Planos tangentes

- Seja uma superfície parametrizada determinada pela função vetorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

- Se mantivermos u constante, o vetor tangente a curva C_1 (Figura 12) em P_o é obtido tomando-se a derivada parcial de **r** em relação a v:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Planos tangentes

- Se mantivermos v constante, o vetor tangente a curva C_2 em P_o será:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

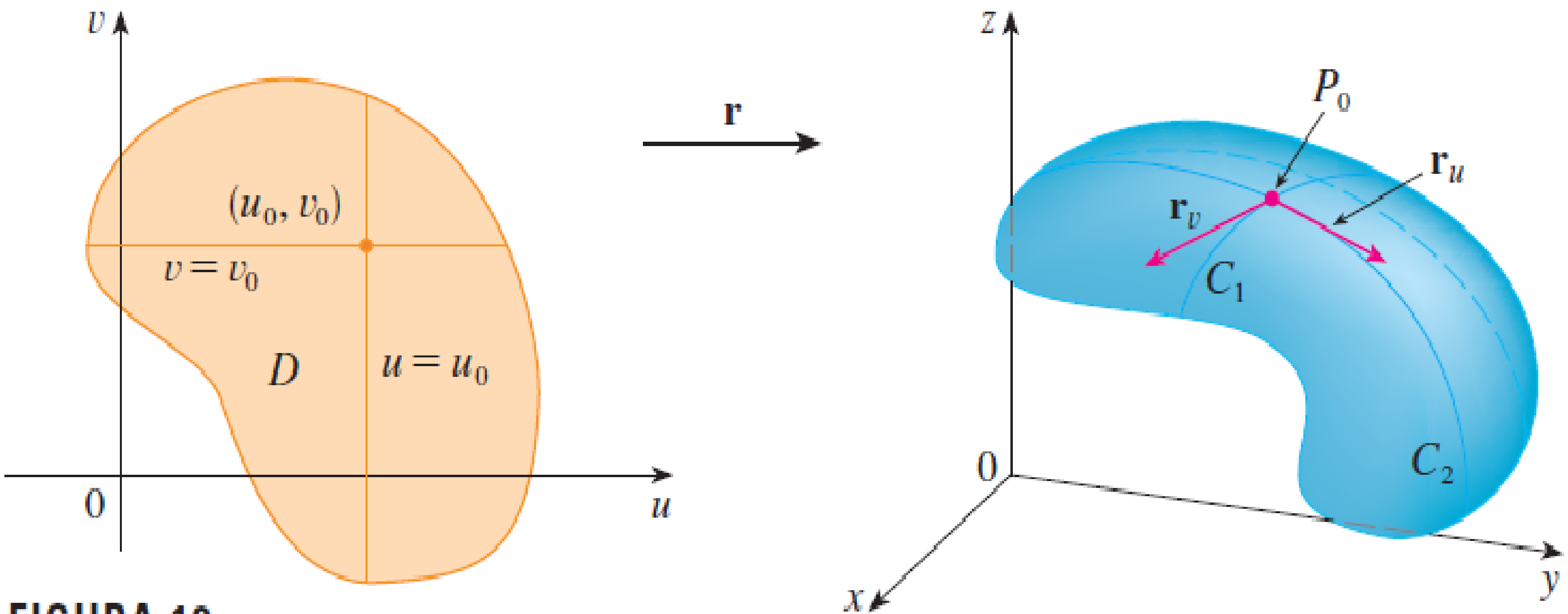


FIGURA 12

- O vetor normal ao plano será o vetor $r_u \times r_v$.

Planos tangentes

Exemplo 5

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas

$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u + 2v \quad \text{no ponto } (1, 1, 3).$$

Planos tangentes

Exemplo 5

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas

$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução:

Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Planos tangentes

Exemplo 5

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas

$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u + 2v \quad \text{no ponto } (1, 1, 3).$$

Solução:

Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Planos tangentes

Exemplo 5 - solução

O ponto (1, 1, 3) corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Exemplo 5 - solução

O ponto $(1, 1, 3)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Área de superfícies

Área de superfícies

- Vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo.
- Dividiremos o retângulo em sub-retângulos R_{ij}.

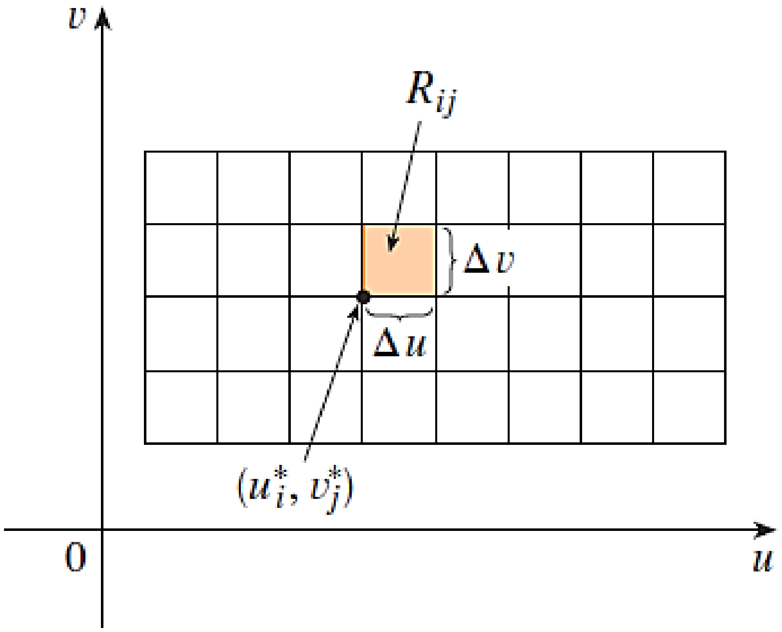


FIGURA 14

Área de superfícies

- Vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo.
- Dividiremos o retângulo em sub-retângulos R_{ij}.

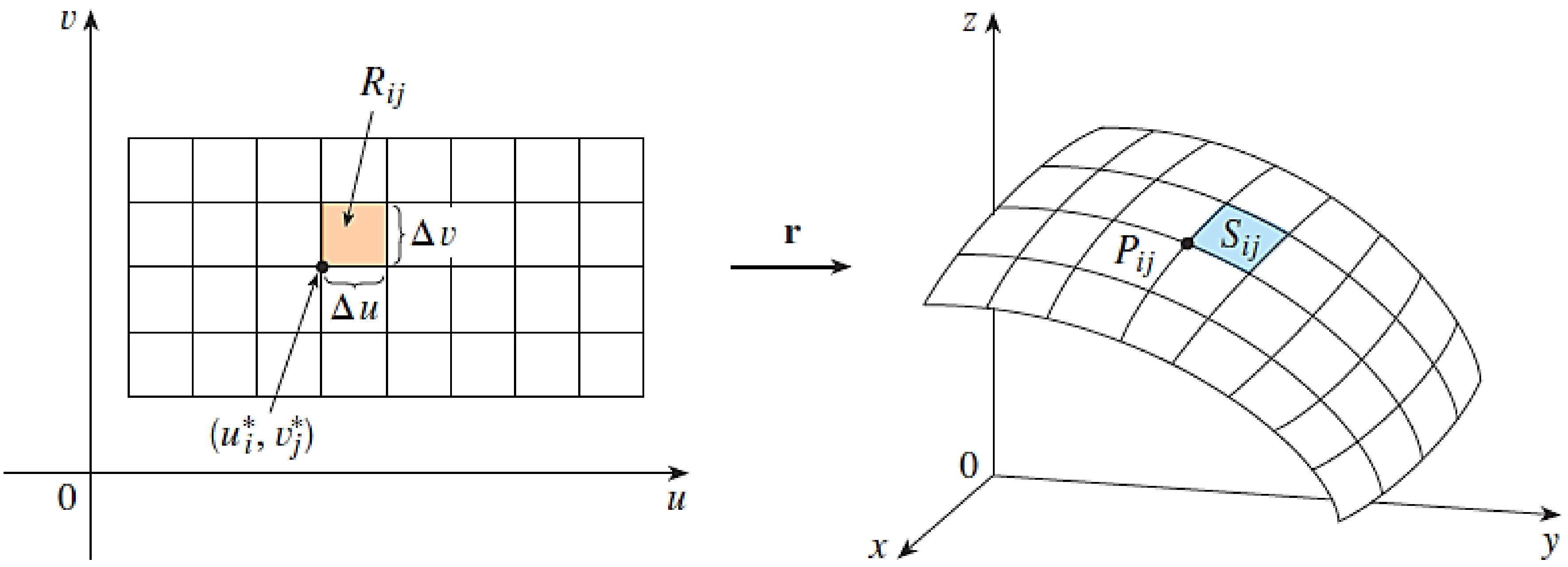


FIGURA 14 A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}

Área de superfícies

- A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de retalho e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $r({u_i}^*, {v_i}^*)$.

Área de superfícies

- A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de retalho e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $r(u_i{}^*, v_i{}^*)$.
- Sejam os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas equações definidas para o plano tangente:

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

Área de superfícies

- A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de retalho e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $r(u_i{}^*, v_i{}^*)$.
- Sejam os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas equações definidas para o plano tangente:

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

- Aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \boldsymbol{r}_u{}^*$ e $\Delta v\, \boldsymbol{r}_v{}^*$. Portanto, a área deste paralelogramo é:

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\ \Delta u\, \Delta v$$

Área de superfícies

- Então, uma aproximação da área de S é:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \, \Delta u \, \Delta v$$

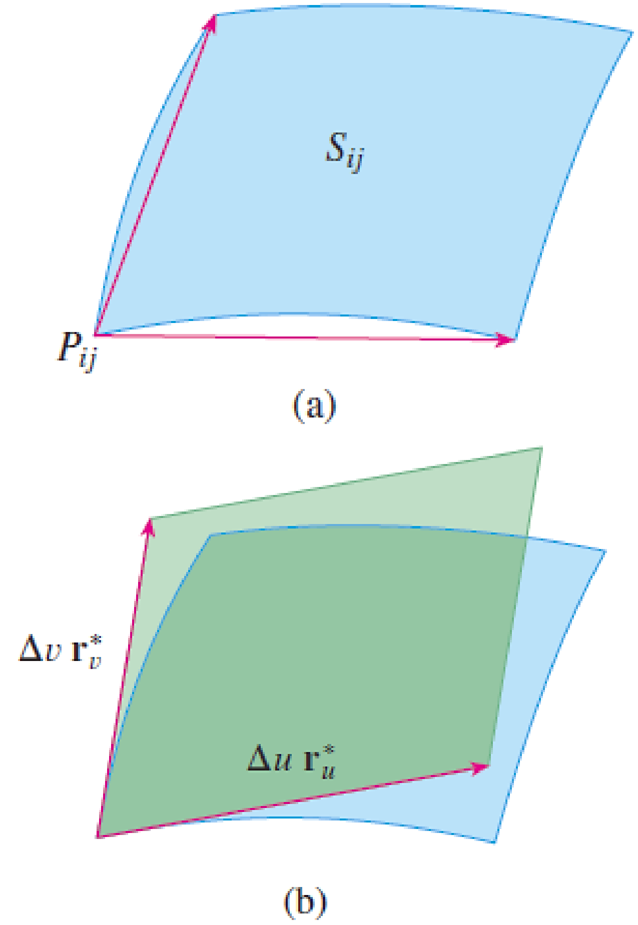


FIGURA 15 Aproximando um retalho por um paralelogramo

Área de superfícies

- Então, uma aproximação da área de S é:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \, \Delta u \, \Delta v$$

- A aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos.
- Reconhecemos a soma dupla de Riemann que implica na integral dupla.

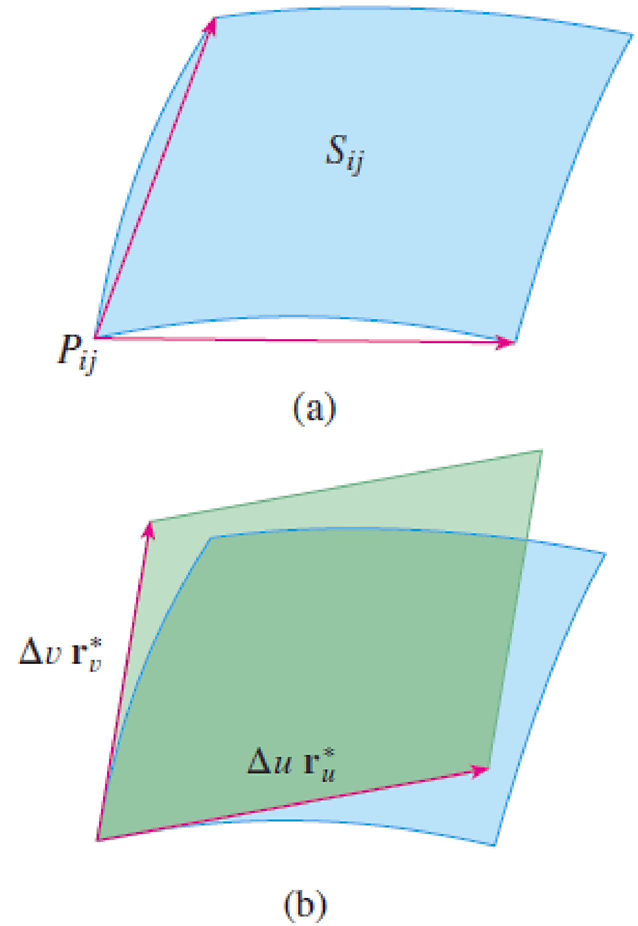


FIGURA 15 Aproximando um retalho por um paralelogramo

Área de superfícies

Definição

Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Área de superfícies

Definição

Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$

Área de superfícies

Exemplo 6

Determine a área da esfera de raio a.

Área de superfícies

Exemplo 6

Determine a área da esfera de raio a.

Solução:

No Exemplo 3 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Área de superfícies

Exemplo 6

Determine a área da esfera de raio a.

Solução:

No Exemplo 3 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \, \cos \theta & a \cos \phi \, \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \, \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \, \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \, \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Área de superfícies

Exemplo 6 - solução

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

Área de superfícies

Exemplo 6 - solução

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, uma vez que $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.
a área da esfera é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi \ d\phi \ d\theta$$

Exemplo 6 - solução

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, uma vez que $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.
a área da esfera é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi \ d\phi \ d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \ d\phi$$

$$= a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

Área de superfície do gráfico de uma função

- Seja o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D.

Área de superfície do gráfico de uma função

- Seja o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D.
- Se f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros, assim:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Área de superfície do gráfico de uma função

- Seja o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D.
- Se f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros, assim:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

- Calculando o produto vetorial temos:

Área de superfície do gráfico de uma função

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Área de superfície do gráfico de uma função

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

- A fórmula de área da superfície fica definida por:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 7

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Área de superfícies

Exemplo 7

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

Solução:

O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$.

Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3.

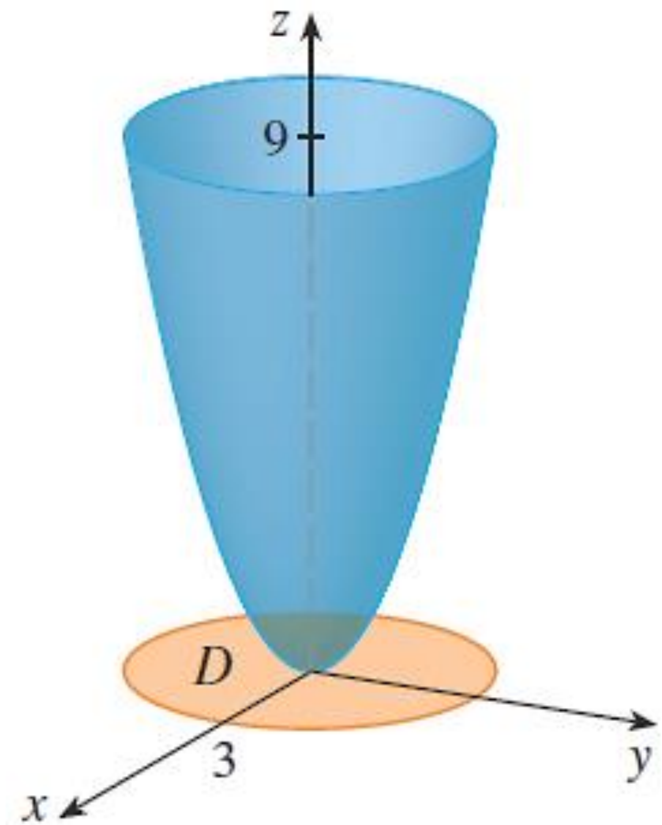


FIGURA 16

Área de superfícies

Exemplo 7 - solução

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Área de superfícies

Exemplo 7 - solução

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

Área de superfícies

Exemplo 7 - solução

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

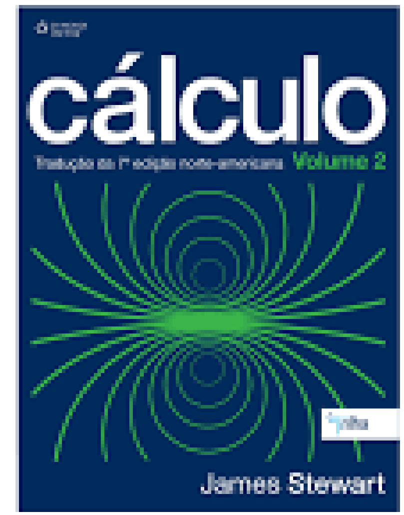
Para depois desta aula:

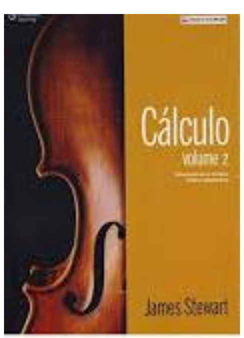
- Estudar seção 16.6 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br