

# Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

## Semana 15 - Aula 1 Teoremas de Stokes e do Divergente

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)

# Integrais de Superfície

- A integral de superfície está relacionada com área de superfície, de forma semelhante à relação entre a integral de linha e o comprimento de arco.

# Integrais de Superfície

- A integral de superfície está relacionada com área de superfície, de forma semelhante à relação entre a integral de linha e o comprimento de arco.
- Para defini-la serão utilizadas as parametrizações estudadas anteriormente.
- O foco principal será nas superfícies definidas por funções de duas variáveis.

# Integrais de Superfície

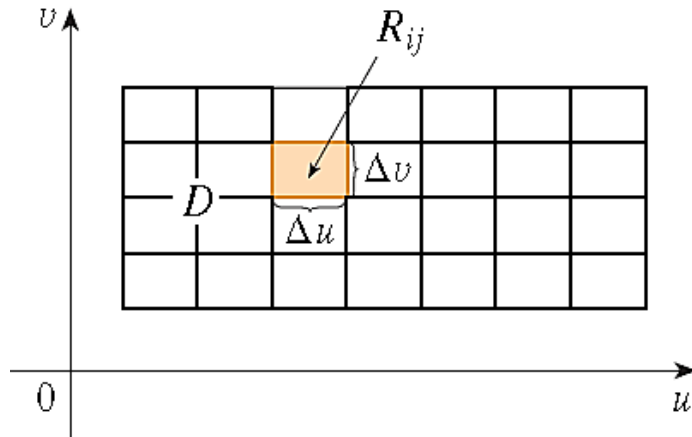
- A integral de superfície está relacionada com área de superfície, de forma semelhante à relação entre a integral de linha e o comprimento de arco.
- Para defini-la serão utilizadas as parametrizações estudadas anteriormente.
- O foco principal será nas superfícies definidas por funções de duas variáveis.
- Seja a superfície definida pela função vetorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

- O domínio  $D$  dos parâmetros  $u$  e  $v$  está no plano.

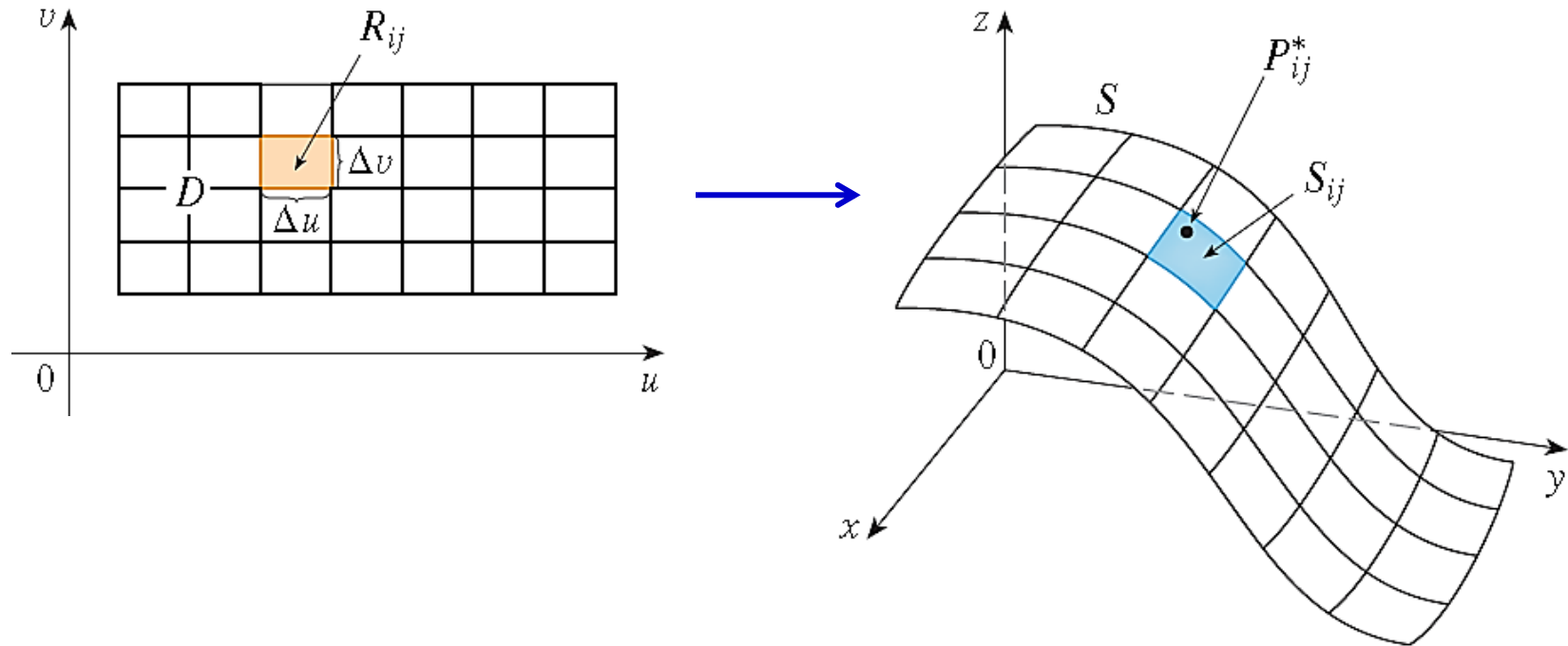
# Integrais de Superfície

- A superfície  $S$  é subdividida em retalhos  $\Delta S_{ij}$ .



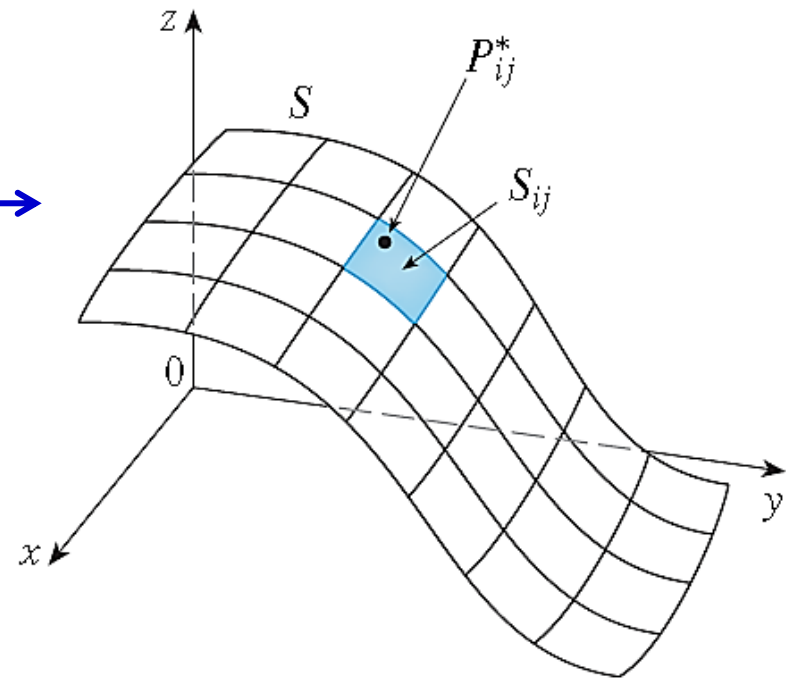
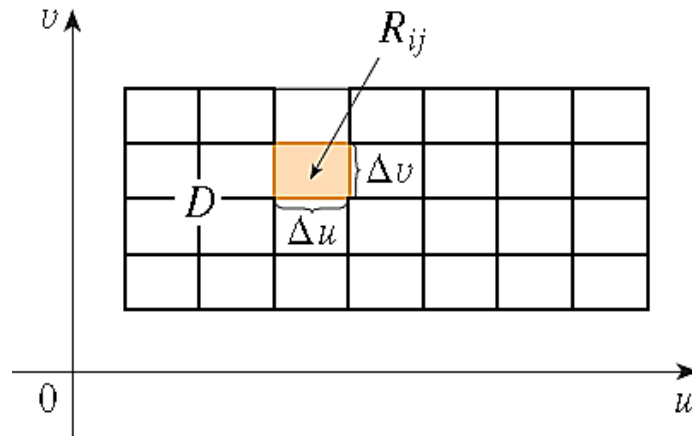
# Integrais de Superfície

- A superfície  $S$  é subdividida em retalhos  $\Delta S_{ij}$ .



# Integrais de Superfície

- A superfície  $S$  é subdividida em retalhos  $\Delta S_{ij}$ .

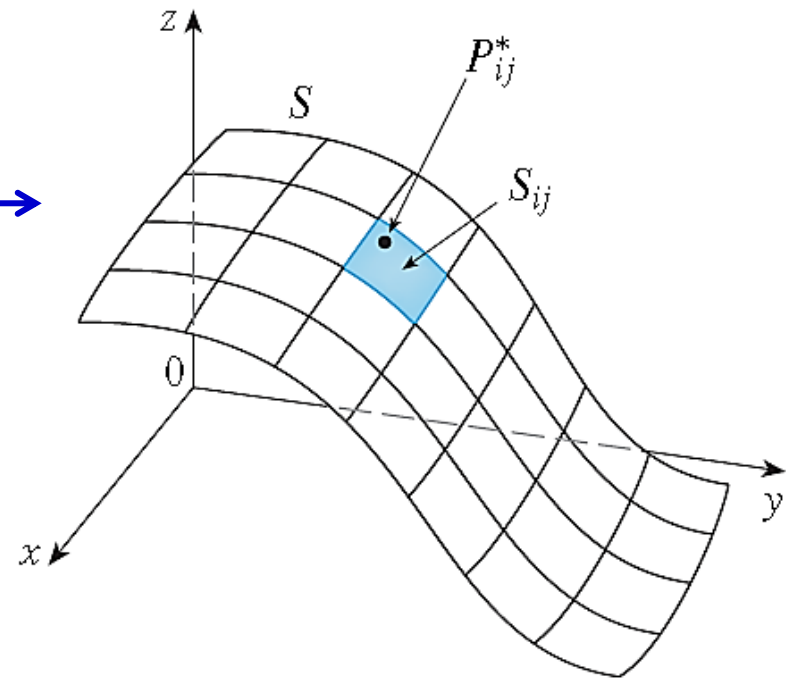
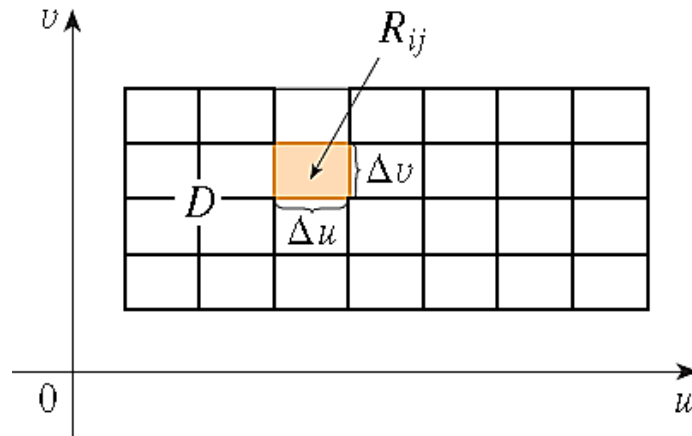


- Soma-se os retalhos.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

# Integrais de Superfície

- A superfície  $S$  é subdividida em retalhos  $\Delta S_{ij}$ .



- Soma-se os retalhos.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Integral de  
superfície



# Integrais de Superfície

- Para o cálculo da integral de superfície, a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  é aproximada pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente.

# Integrais de Superfície

- Para o cálculo da integral de superfície, a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  é aproximada pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente.
- A área desse plano é definida como no cálculo da área de superfície.

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

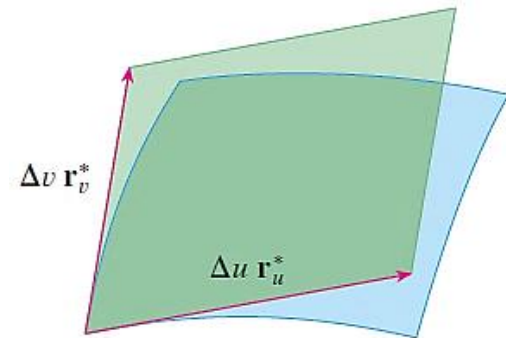
# Integrais de Superfície

- Para o cálculo da integral de superfície, a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  é aproximada pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente.
- A área desse plano é definida como no cálculo da área de superfície.

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$



(b)

FIGURA 15 Aproximando um retalho por um paralelogramo

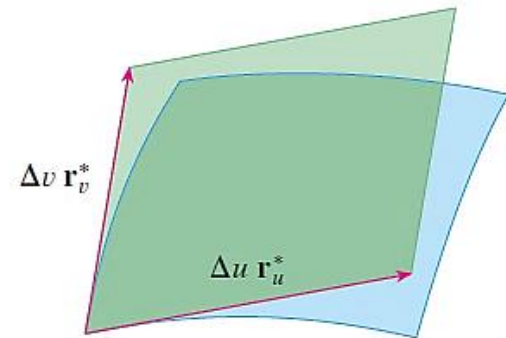
# Integrais de Superfície

- Para o cálculo da integral de superfície, a área do retalho  $\Delta S_{ij}$  é aproximada pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente.
- A área desse plano é definida como no cálculo da área de superfície.

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$



(b)

FIGURA 15 Aproximando um retalho por um paralelogramo

- $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$  são os vetores tangentes em um canto de  $S_{ij}$ .

# Integrais de Superfície

- Portanto, a **integral de superfície** é definida por:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

- A integral de superfície tem estrutura semelhante à **integral de linha**:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

# Integrais de Superfície

- Portanto, a **integral de superfície** é definida por:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

- A integral de superfície tem estrutura semelhante à **integral de linha**:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

- Quando a função no integrando é unitária a integral de superfície resulta no **cálculo da área de  $S$** .

$$\iint_S 1 dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA = A(S)$$

# Integrais de Superfície

- Uma superfície  $S$  definida pela equação  $z = g(x, y)$  pode ser parametrizada com as variáveis da função.

$$\begin{array}{l} x = x \quad y = y \\ z = g(x, y) \end{array} \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}$$

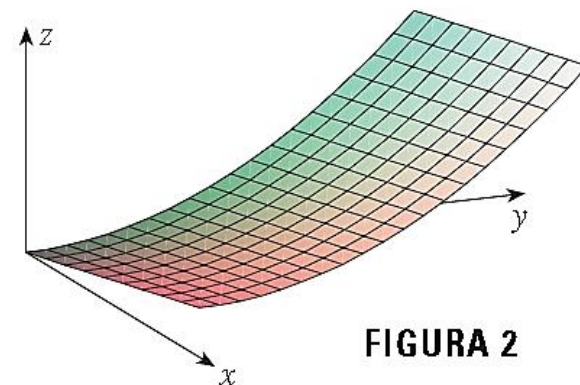
- A integral de superfície é então redefinida por:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1} dA$$

## Exemplo 1

Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície

$z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)





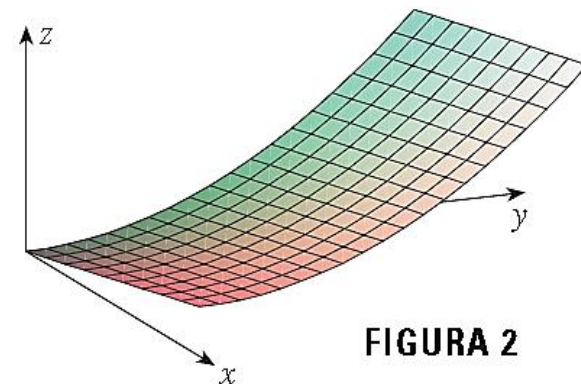
## Exemplo 1

Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície

$z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

## Solução:

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$



## Exemplo 1

Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície

$z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

## Solução:

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\iint_S y \, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

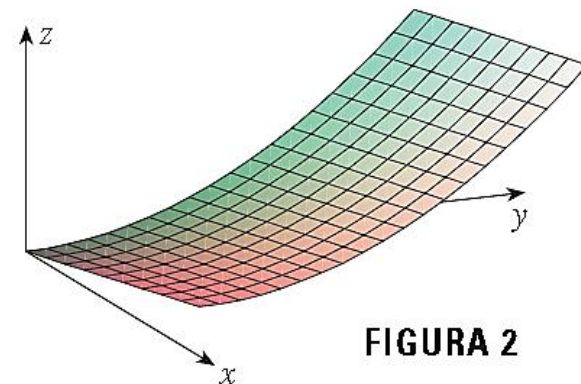


FIGURA 2

**Exemplo 1** Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície  
 $z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

**Solução:**

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\begin{aligned} \iint_S y \, dS &= \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

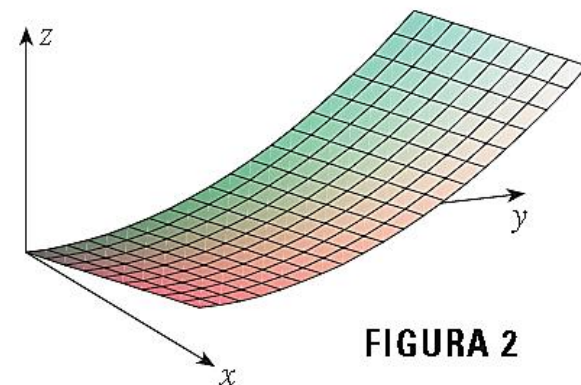


FIGURA 2

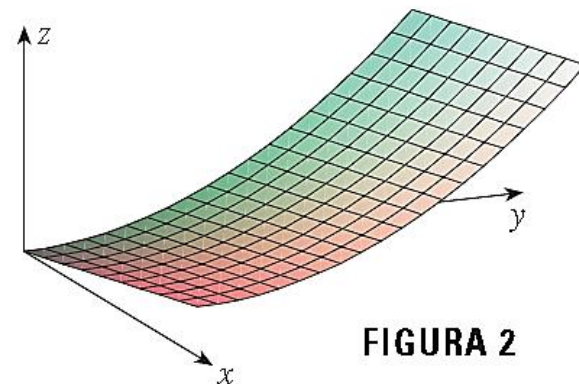
## Exemplo 1

Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície

$z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

## Solução:

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$



$$\iint_S y \, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy$$

## Exemplo 1

Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície

$z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

## Solução:

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

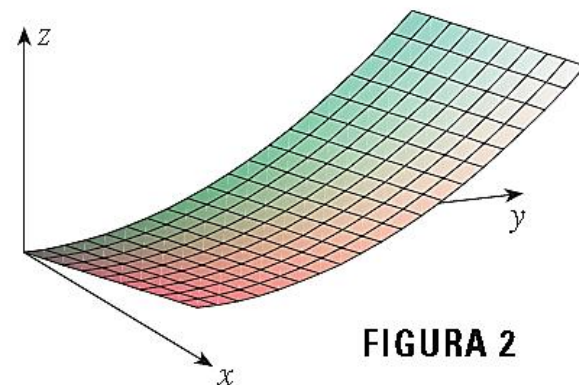


FIGURA 2

$$\iint_S y \, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left[ (2 + 4y^2)^{3/2} \right]_0^2$$

**Exemplo 1** Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície  
 $z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

**Solução:**

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

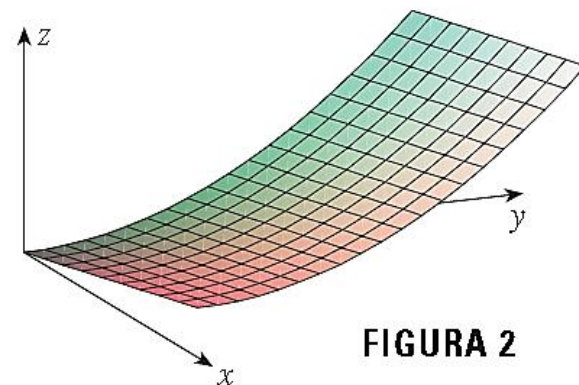


FIGURA 2

$$\iint_S y \, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

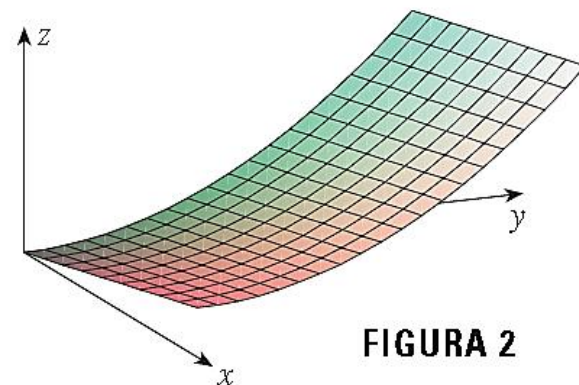
$$= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3} (2 + 4y^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{12} [(2 + 4 \cdot 2^2)^{3/2} - 2^{3/2}]$$

**Exemplo 1** Calcule  $\iint_S y \, dS$ , onde  $S$  é a superfície  
 $z = x + y^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (Figura 2.)

**Solução:**

Uma vez que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$



$$\iint_S y \, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} \, dy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3} (2 + 4y^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{12} [(2 + 4 \cdot 2^2)^{3/2} - 2^{3/2}] = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$



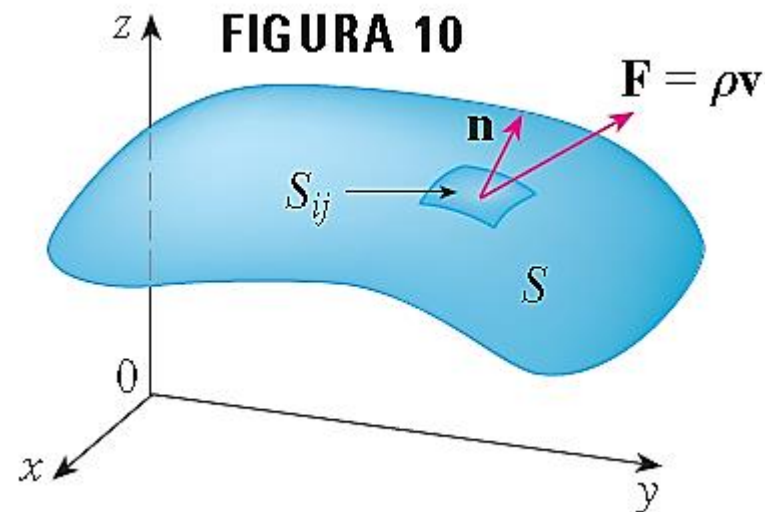
The background features a dark, semi-transparent overlay with mathematical content. At the top, there are two double integrals:  $\int_0^2 dy \int_{a/2}^a f(x,y) dx$  and  $\int_{a/\sqrt{3}}^a dy \int_{a-\sqrt{y^2}}^a f(x,y) dx$ . Below these, a diagram shows a circle with a shaded region. The circle's equation is  $y = \sqrt{1-x^2}$ . The shaded area is bounded by the circle, the x-axis, and a vertical line  $x = 1-y$ . The area is divided into vertical strips. The equation  $x = \sqrt{1-y^2}$  is also visible on the left side of the diagram.

# Integrais de superfície de campos vetoriais



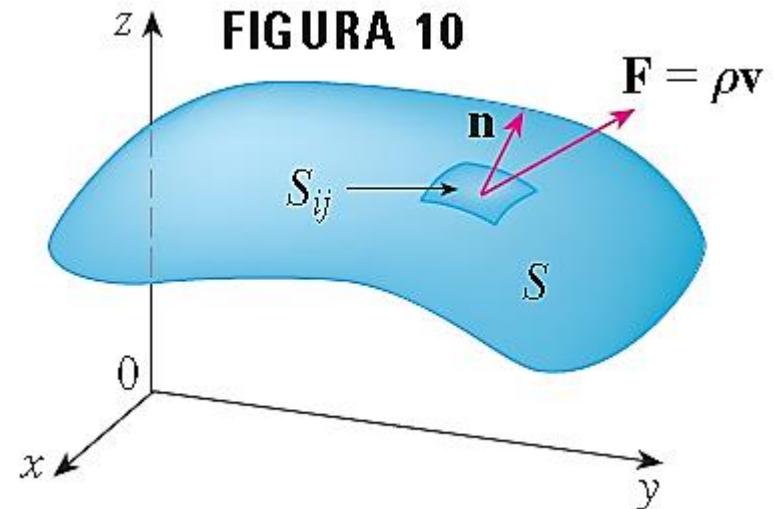
# Integrais de superfície de campos vetoriais

- Seja  $S$  a superfície orientada com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , como na Figura 10.
- Um fluido de densidade  $\rho(x, y, z)$  flui através de  $S$  segundo um campo de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z)$ .



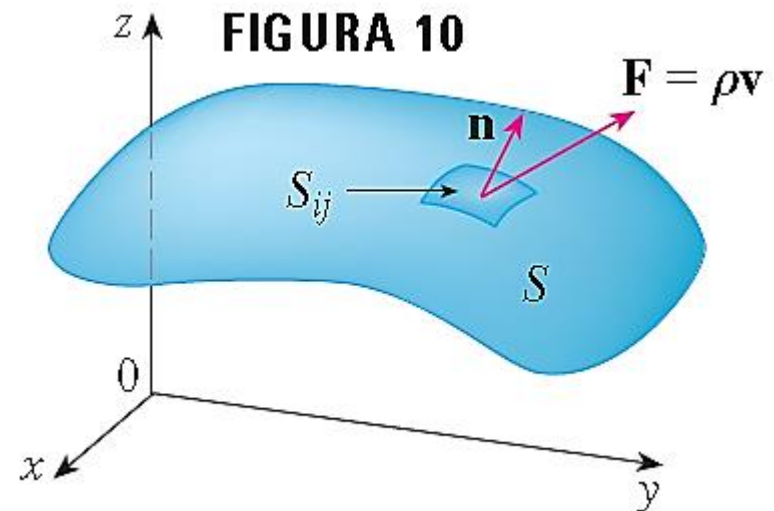
# Integrais de superfície de campos vetoriais

- Seja  $S$  a superfície orientada com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , como na Figura 10.
- Um fluido de densidade  $\rho(x, y, z)$  flui através de  $S$  segundo um campo de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z)$ .
- Considerar  $\rho\mathbf{v}$  como a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo).



# Integrais de superfície de campos vetoriais

- Seja  $S$  a superfície orientada com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , como na Figura 10.
- Um fluido de densidade  $\rho(x, y, z)$  flui através de  $S$  segundo um campo de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z)$ .
- Considerar  $\rho\mathbf{v}$  como a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo).
- A massa de fluido que passa por um retalho  $S_{ij}$  na direção normal por unidade de tempo será:  $(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$



# Integrais de superfície de campos vetoriais

- Soma-se a **massa de fluido** que passa por toda a **superfície** nos retalhos infinitesimais.
- O **resultado** é a **integral de superfície** da função  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  sobre  $S$ .

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

# Integrais de superfície de campos vetoriais

- Soma-se a **massa de fluido** que passa por toda a **superfície** nos retalhos infinitesimais.
- O **resultado** é a **integral de superfície** da função  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  sobre  $S$ .

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

- Esta integral é interpretada como a **vazão sobre  $S$** .
- Se escrevermos  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ , uma função vetorial a integral fica:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Integral de superfície  
ou Integral de fluxo

# Integrais de superfície de campos vetoriais

Se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada  $S$  com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , então a **superfície integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$**  é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de  $\mathbf{F}$  através de  $S$ .

# Integrais de superfície de campos vetoriais

Se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada  $S$  com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , então a **superfície integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$**  é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de  $\mathbf{F}$  através de  $S$ .

Se  $S$  é uma superfície dada por  $\mathbf{r}(u, v)$ , então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA$$

## Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



## Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Solução:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

## Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Solução:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{k}$$

## Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Solução:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{k}$$

Portanto,

## Exemplo 2

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Solução:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{k}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) &= \cos \phi \sin^2 \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta \\ &\quad + \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta \end{aligned}$$

## Exemplo 2

o fluxo é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA$$

## Exemplo 2

o fluxo é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) d\phi d\theta\end{aligned}$$

## Exemplo 2

o fluxo é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) d\phi d\theta$$

$$= 2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cancel{\cos \theta} d\theta + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

**= 0**

## Exemplo 2

o fluxo é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cancel{\cos \theta} d\theta + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\ &= 0 + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$



# Integrais de Superfície

- Na dedução da integral de superfície foi utilizada a analogia com a mecânica dos fluidos.
- Uma aplicação relevante desta integral ocorre no **eletromagnetismo**.

# Integrais de Superfície

- Na dedução da integral de superfície foi utilizada a analogia com a mecânica dos fluidos.
- Uma aplicação relevante desta integral ocorre no **eletromagnetismo**.
- Se  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico, então a integral representa o fluxo elétrico sobre a superfície  $S$ .

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

# Integrais de Superfície

- Na dedução da integral de superfície foi utilizada a analogia com a mecânica dos fluidos.
- Uma aplicação relevante desta integral ocorre no **eletromagnetismo**.
- Se  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico, então a integral representa o fluxo elétrico sobre a superfície  $S$ .

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

- A **Lei de Gauss**, a carga total  $Q$  englobada por uma superfície  $S$  é proporcional ao fluxo do campo  $\mathbf{E}$ :

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{a}{2}}^a f(x, y) dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^a dy \int_{a-\sqrt{3}y}^a f(x, y)$$

# Teorema de Stokes



# Teorema de Stokes

- O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão do Teorema de Green em três dimensões.
- o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana  $D$  com uma integral de linha em torno da curva limite dessa região  $D$ .

# Teorema de Stokes

- O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão do Teorema de Green em três dimensões.
- o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana  $D$  com uma integral de linha em torno da curva limite dessa região  $D$ .
- O Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície com uma integral em torno da curva da fronteira  $S$  (que é uma curva no espaço).

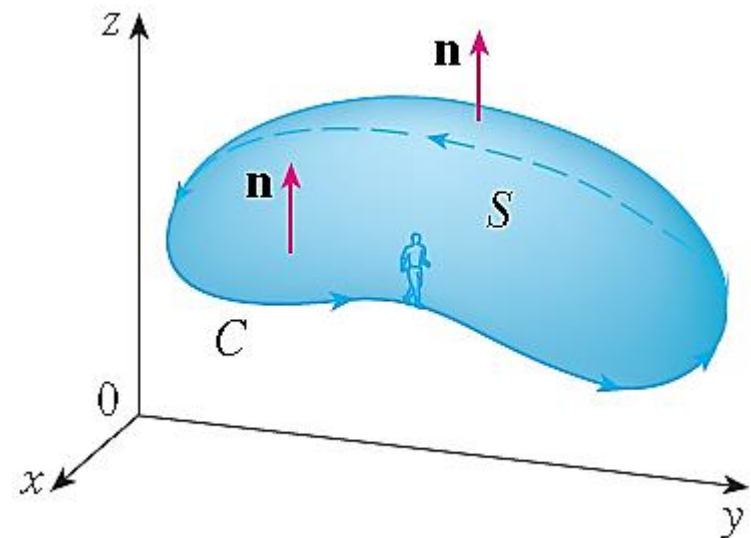


FIGURA 1

# Teorema de Stokes

Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva.

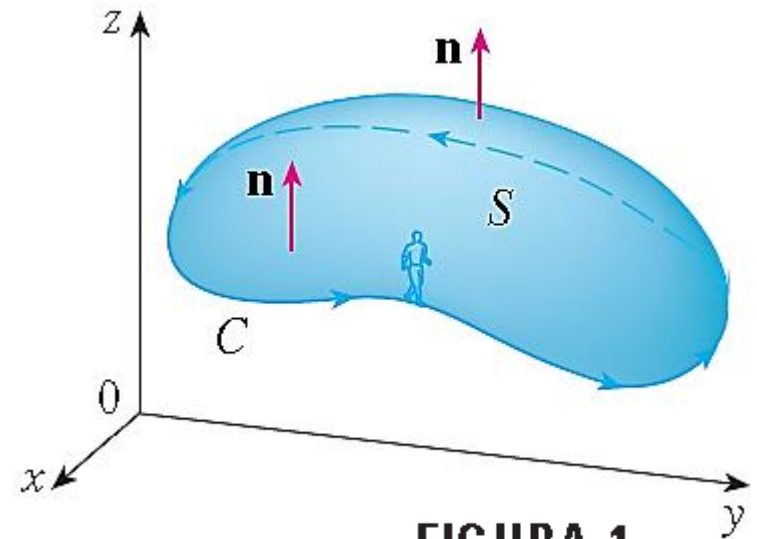


FIGURA 1

# Teorema de Stokes

Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva.

Seja  $F$  um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ .

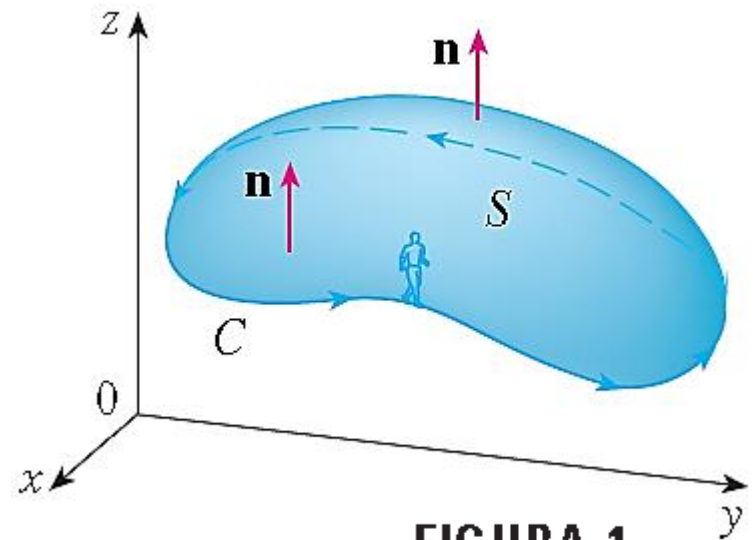


FIGURA 1

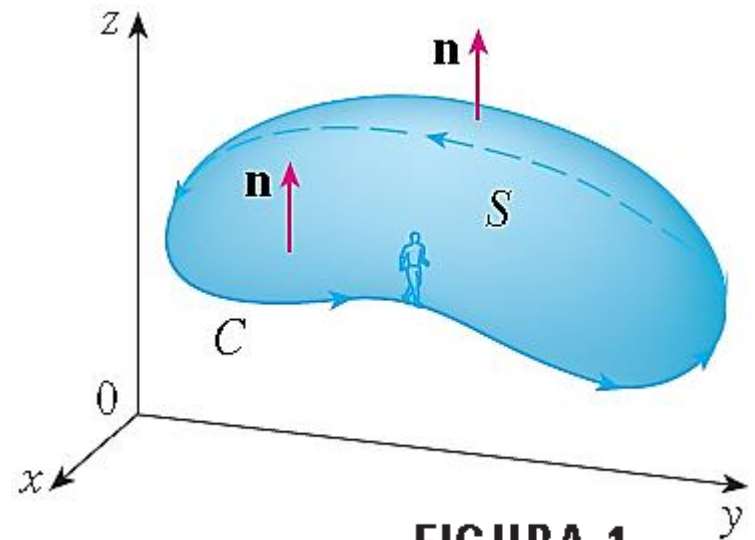


# Teorema de Stokes

Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva.

Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



# Teorema de Stokes

Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva.

Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

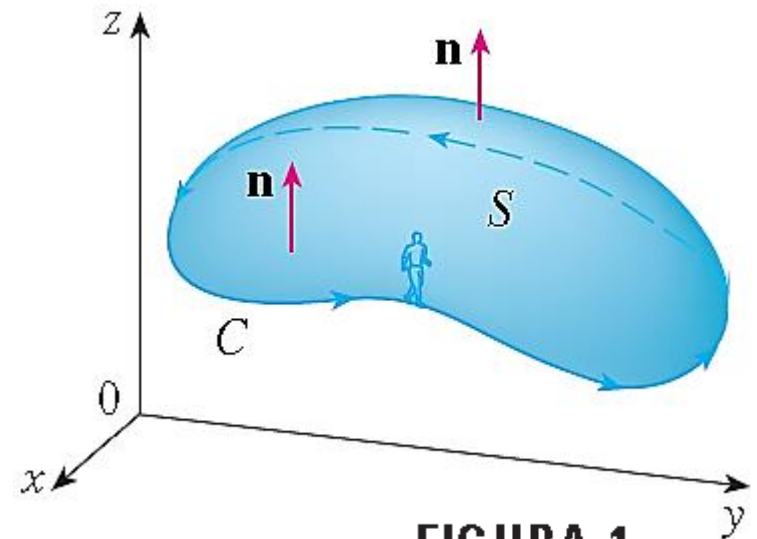


FIGURA 1

### Exemplo 3

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $xy$ . (Figura 4)

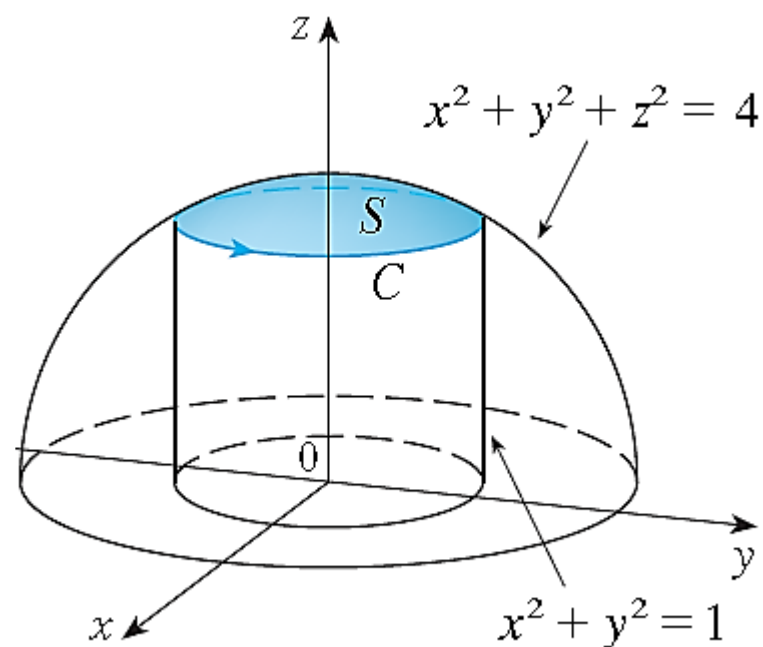


FIGURA 4

## Exemplo 3

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $xy$ . (Figura 4)

### Solução:

Subtraindo, as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 1$$

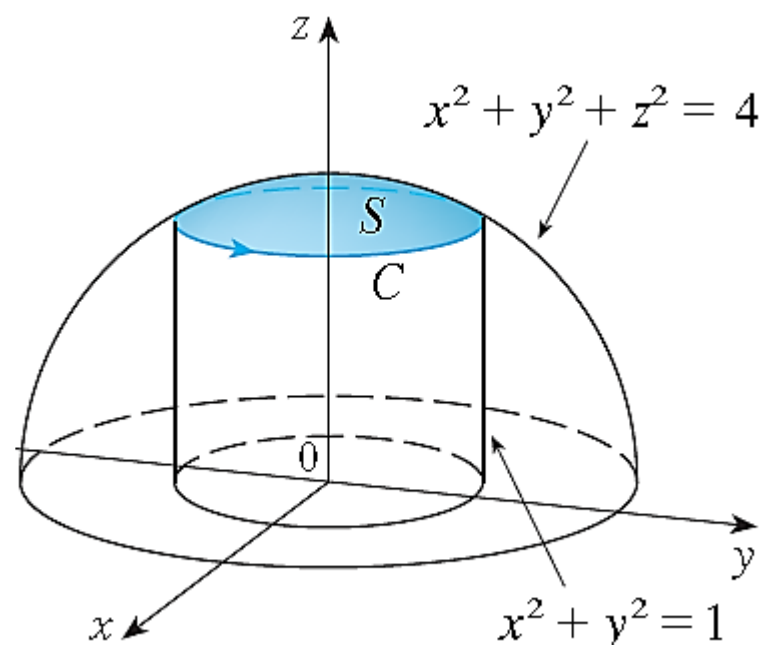


FIGURA 4

## Exemplo 3

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $xy$ . (Figura 4)

### Solução:

Subtraindo, as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 1$$

obtemos  $z^2 = 3$  e, portanto,

$$z = \sqrt{3} \quad (z > 0)$$

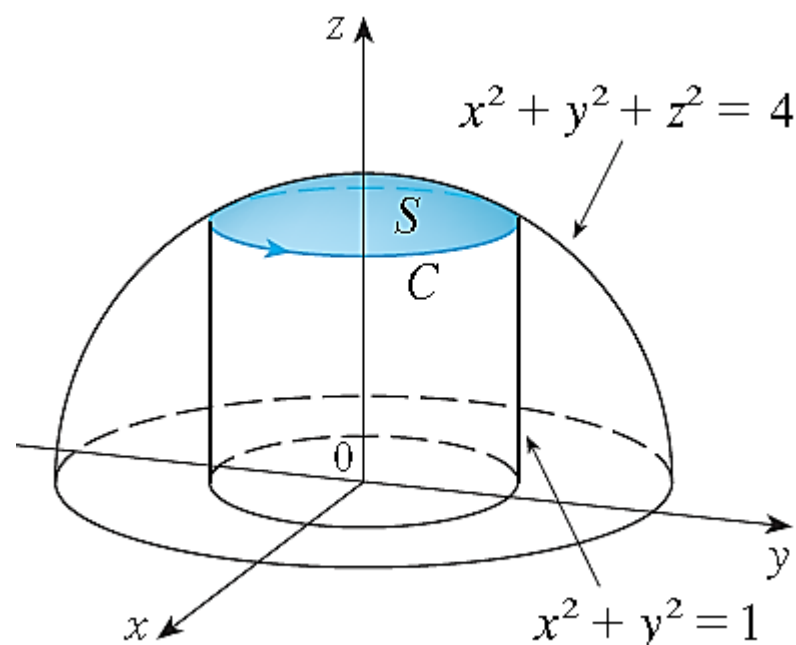


FIGURA 4

## Exemplo 3

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $xy$ . (Figura 4)

### Solução:

Subtraindo, as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 1$$

obtemos  $z^2 = 3$  e, portanto,

$$z = \sqrt{3} \quad (z > 0)$$

Então  $C$  é a circunferência dada

pelas equações  $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$

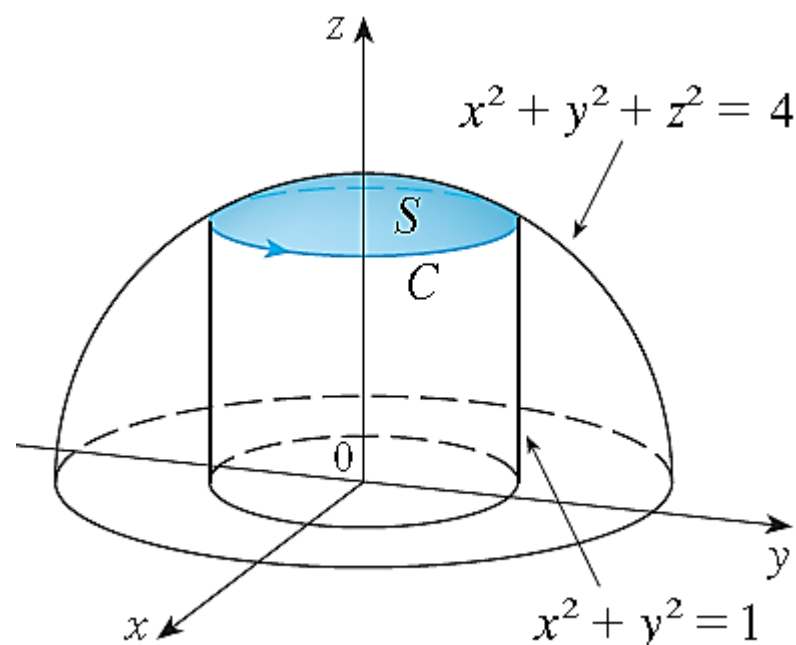


FIGURA 4

## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$



## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt \end{aligned}$$

## Exemplo 3

A equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t \mathbf{i} + \sqrt{3} \sin t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{a}{2}}^a f(x, y) dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^a dy \int_{a-\sqrt{3}y}^a f(x, y)$$

# Teorema do divergente



# Teorema do divergente (Teorema de Gauss)

Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora).

# Teorema do divergente (Teorema de Gauss)

Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora).

Seja  $F$  um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então

# Teorema do divergente (Teorema de Gauss)

Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora).

Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$



# Teorema do divergente (Teorema de Gauss)

Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora).

Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

o Teorema do Divergente afirma que o fluxo de  $\mathbf{F}$  pela fronteira de  $E$  é igual à integral tripla da divergência de  $\mathbf{F}$  em  $E$ .

## Exemplo 4

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  sobre a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

## Exemplo 4

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  sobre a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### Solução:

Primeiro calcular o divergente de  $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (z) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (x) = 1$$

## Exemplo 4

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  sobre a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### Solução:

Primeiro calcular o divergente de  $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (z) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (x) = 1$$

A esfera unitária  $S$  é a fronteira de  $B$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

## Exemplo 4

Determine o fluxo do campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = z \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  sobre a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### Solução:

Primeiro calcular o divergente de  $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (z) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (x) = 1$$

A esfera unitária  $S$  é a fronteira de  $B$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_B 1 \, dV = V(B) = \frac{4}{3} \pi (1)^3 = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

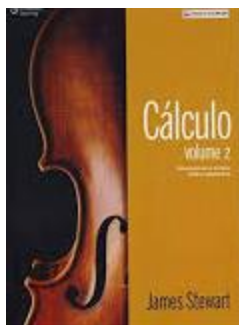
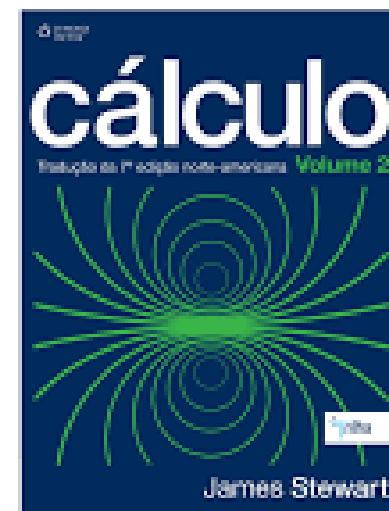
# Para depois desta aula:

- Estudar seção 16.8 e 16.9 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

# Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios  
com base na 7ª ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.**  
São Paulo: Cengage, 2016.

# Contatos

[profhenriquefaria.com](http://profhenriquefaria.com)



[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)