

# TÓPICOS PARA FORMULÁRIO

---

Segunda Avaliação de Cálculo III

## Semana 12 - Aula 1 Funções vetoriais

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$$

- A função vetorial define uma curva no espaço.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad \text{Hélice de raio 1.}$$

- Valem as mesmas regras de domínio, limites e continuidade de funções reais, mas aplicadas em cada componente.

## Semana 12 - Aula 2 Derivadas e integrais de funções vetoriais

- Valem as mesmas regras de derivadas para as funções reais.

$$\text{Se } \mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

$$= f'(t) \mathbf{i} + g'(t) \mathbf{j} + h'(t) \mathbf{k}$$

vetor tangente unitário

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

# Semana 12 - Aula 2 Derivadas e integrais de funções vetoriais

- Valem as mesmas regras de integração para as funções reais.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left( \int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}$$

# Semana 12 - Aula 3 Comprimento de arco e curvatura

- Comprimento de arco para curva  $C$  percorrida uma única vez.

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

- Curvatura.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

- Curvatura de uma curva plana.

$$\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + f(x) \mathbf{j}.$$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

# Semana 13 - Aula 1 Campos vetoriais

- Campo vetorial no plano.

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

- Gradiente de uma função (campo vetorial)

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

# Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Integral de linha sobre uma curva  $C$ .

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

- Circunferência de raio 1 e parametrização.

$$x^2 + y^2 = 1. \quad x = \cos t \quad y = \sin t$$

- Integrais de linha em relação a  $x$  e  $y$ .

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

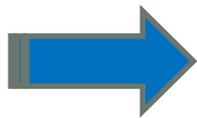
# Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Parametrização de um segmento de reta.

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Escrita compacta da integral de linha.

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$



$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

- Caso  $f = 1$  a integral de linha é o comprimento da curva C.

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

## Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Cálculo do trabalho  $W$  de um campo de força  $F$ .

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

## Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

- Teorema das integrais de linha.

Seja  $C$  uma curva suave dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .  
Seja  $f$  uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente  $\nabla f$  é contínuo em  $C$ . Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo simplesmente sabendo o valor de  $f$  nos pontos finais de  $C$ .

## Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

➤ Teorema do campo conservativo.

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em  $D$  se e somente se

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{para todo caminho fechado } C \text{ em } D.$$

A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

# Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

## Teorema 5

Se  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$  é um campo vetorial conservativo, onde  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio  $D$ , então em todos os pontos de  $D$  temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

## Teorema 6

Seja  $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$  um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa  $D$ . Suponha que  $P$  e  $Q$  tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Então  $\mathbf{F}$  é conservativo.

## Semana 14 - Aula 1 Teorema de Green

Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ .

Se  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha  $D$ , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Outras  
notações

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P dx + Q dy$$

## Semana 14 - Aula 2 divergente e rotacional

➤ **Rotacional** de um campo vetorial  $F$ .

Se  $F = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  existem, então o **rotacional** de  $F$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Outro modo de exprimir  $\text{rot } F = \nabla \times F$

$$\text{rot } (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Se  $\text{rot } F = \mathbf{0}$  o campo vetorial  $F$  é conservativo.

# Semana 14 - Aula 2 divergente e rotacional

- Forma vetorial do Teorema de Green.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

## Semana 14 - Aula 3 superfícies parametrizadas

- Parametrização da esfera.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$   
 $\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$   
 $0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,

Plano tangente.

Vetor normal ao plano:  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ .

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} (u_0, v_0) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} (u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} (u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} (u_0, v_0) \mathbf{k}$$

$$\text{Equação: } a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

## Semana 14 - Aula 3 superfícies parametrizadas

### ➤ Área de superfícies.

Se uma superfície parametrizada suave  $S$  é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

e  $S$  é coberta uma única vez quando  $(u, v)$  abrange todo o domínio  $D$ , então a área da superfície de  $S$  é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

onde  $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$        $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$

## Semana 14 - Aula 3 superfícies parametrizadas

- Área de superfícies do gráfico de uma função.

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$