Equações diferenciais

Aula
Revisão para avaliação

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos para primeira avaliação

1. Definição e classificação de equações diferenciais.
2. Equações diferenciais de 1ª ordem.
3. Método da separação de variáveis.
4. Método do fator integrante.
5. Modelos matemáticos.
6. Teorema de existência e unicidade.

Definição e classificação de equações diferenciais

Equações diferenciais

- As equações diferenciais são estudadas há três séculos pelos maiores matemáticos do mundo.

- Elas continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica nos dias atuais.

- As equações diferenciais são aplicadas em diversas áreas de estudo.

  - Exemplos: reações químicas, reatores químicos, cinética química, entre outras.

Equações diferenciais

- Muitos dos princípios, ou leis, que regem o mundo físico são **relações** entre **taxas de variação**.
- As taxas de variação são as derivadas.
- Equações contendo derivadas são chamadas de equações diferenciais.
- Uma **equação diferencial** que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de um **modelo matemático** do processo.

Classificação das equações diferenciais

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária**: a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t),$$

- **Equação diferencial parcial**: as derivadas são parciais, ou seja, a função depende de duas ou mais variáveis.

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

equação de calor

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

equação de onda

B – Quanto à ordem

- A ordem da E.D. é definida pela derivada de ordem mais alta da variável incógnita.

$$ty' - y = t^2$$ (Primeira orden)

$$y'' - y = 0$$ (Segunda orden)

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$$ (Terceira orden)

C – Quanto à linearidade

- **Equações lineares**: os termos da E.D., ou seja, as funções incógnitas aparecem elevadas à primeira potência.

- A variável independente não é levada em conta nessa classificação.

$$ty' - y = t^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

$$y'' - y = 0$$

- **Equações NÃO lineares**:
  - As funções incógnitas estão elevadas à potências maiores do que a unidade ou,
  - contém produtos das funções incógnitas ou,
  - são funções trancendentes (e , $\log$, $seno$, $cosseno$, etc).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0,$$

problema do pêndulo.

$$\left(1 + y^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t + y) = \operatorname{sen} t$$

D – Sistemas de equações diferenciais

- Composto de mais de uma equação.
  - As equações seguem as classificações anteriores.

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = -x_1 - \frac{1}{8}x_2.$$

$$x_1' = 2x_2$$
$$x_2' = -2x_1$$

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.**: qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.

- **Solução de um problema de valor inicial.**: qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.

- **Existência de solução**: nem sempre uma E.D. tem solução analítica.

- Existem teoremas que, em certas condições, podem garantir a solução analítica da E.D.

Equações diferenciais de 1ª ordem

Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a forma geral:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável $y = y(t)$ que satisfaça a equação.

- Caso essa função solução exista, serão desenvolvidos métodos para encontrá-la.

- Não existe método geral, mas métodos que se aplicam a alguma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.

Método da separação de variáveis

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.

- Utilizando a variável x para variável independente, a eq. dif. geral de 1ª ordem fica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Esta equação é separável, pois os termos podem ser colocados em lados opostos na forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

Integrando ambos os lados tem-se a solução.

Exemplo 1 Encontrar a solução da equação diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = yx^2$$

Método do fator integrante

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t.
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.
- A alternativa é encontrar um fator multiplicativo que torna possível a integração.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em multiplicar cada termo da eq. dif. por uma função $\boldsymbol{\mu(t)}$.
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função $\boldsymbol{\mu(t)}$ é chamada de **fator integrante**.
- Após a aplicação desse fator multiplicativo a eq. dif. é resolvida por integração.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Na eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\boldsymbol{\mu(t)y}$, então a derivada de $\boldsymbol{\mu(t)}$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu(t) = exp\int p(t)dt}$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

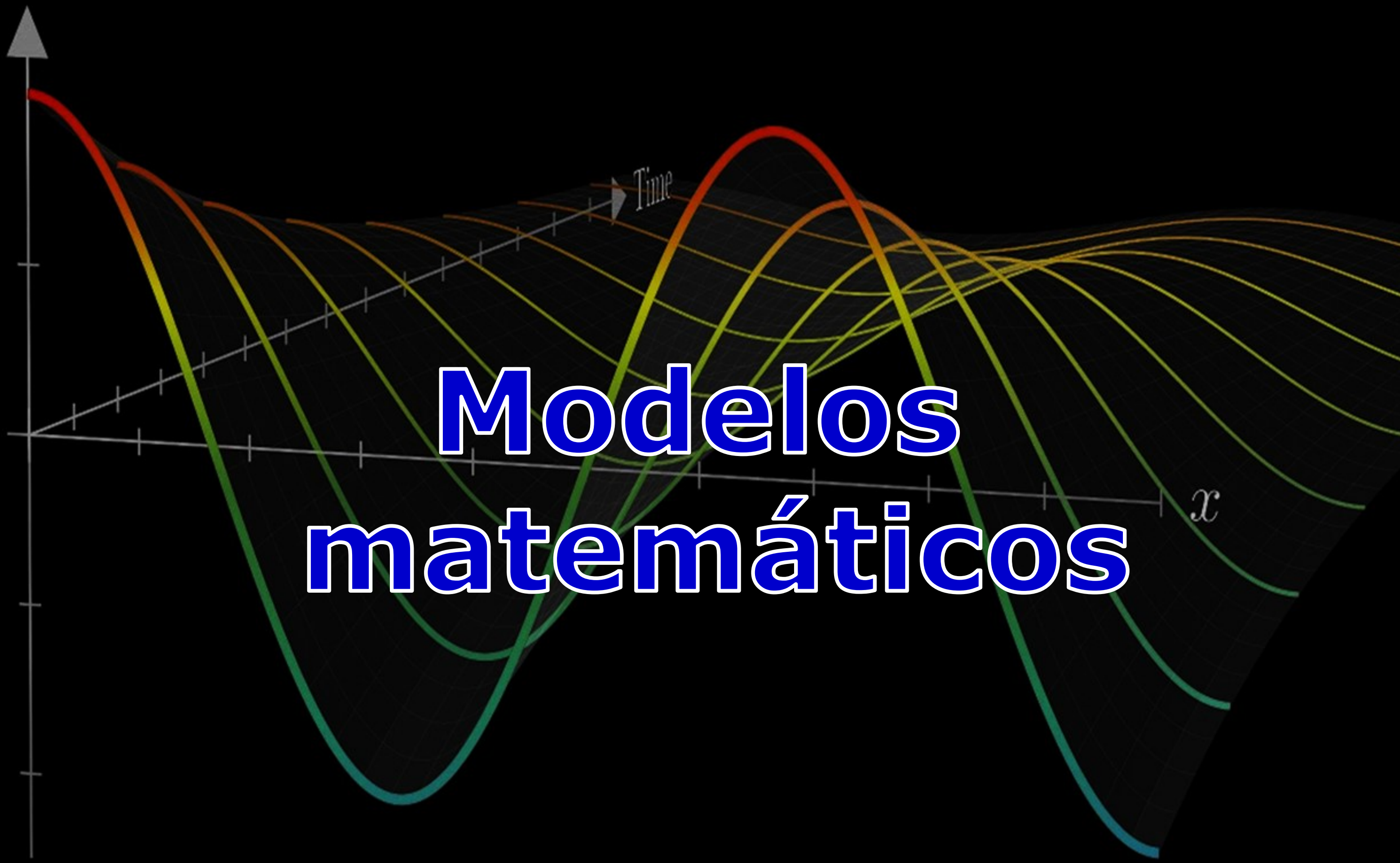
- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$\mu(t) = exp\int p(t)dt$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + \frac{4}{t}y = 6 \qquad y(1) = 2 \quad \textit{(condição inicial)}$$



Modelos matemáticos

Etapas de construção de um modelo

1. • Construção do modelo inicial
2. • Análise do modelo
3. • Comparação com a experimentação ou observação

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.
4. Algumas vezes a modelagem envolve substituir conceitualmente um processo discreto por um processo contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.
5. O jogo entre a compreensão do fenômeno e o conhecimento das limitações técnicas é característico da Matemática Aplicada.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.
5. Caso as previsões do modelo estejam inconsistentes com o fenômeno ele deve ser corrigido ou refeito.

Teoremas de existência e unicidade

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- O teorema seguinte responde estas duas perguntas.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = y(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I, contendo a condição inicial e no qual $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que $p(t)$e $g(t)$ forem descontínuas.*

Exemplo 3 Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$2y' + \frac{4}{t}y = 6 \qquad y(1) = 2 \quad \textit{(condição inicial)}$$

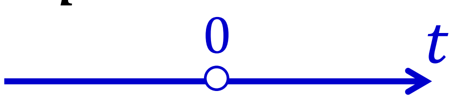
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$2y' + \frac{4}{t}y = 6 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 3, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 3$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$
- ✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma única solução no intervalo $(0, +\infty)$ para t.

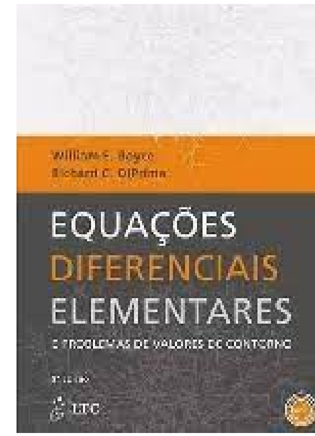
Sugestões para estudo

- Releia os slides e exemplos apresentados na revisão.
- Compreenda os conceitos e definições.
- Refaça pelo menos 2 exercícios da lista de cada tópico.
- Entenda o processo de resolução, sem decorar as operações.
- Qualquer pequena mudança no exercício pode levar a um resultado completamente diferente.

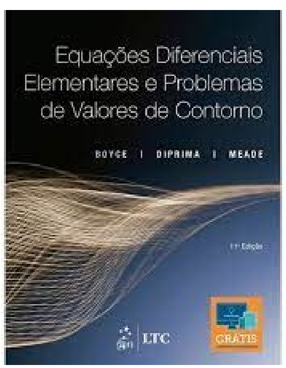
Bons estudos!

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.