

Cálculo Numérico

Integração numérica

Aula 02

Regra de Simpson

Henrique Antonio Mendonça Faria

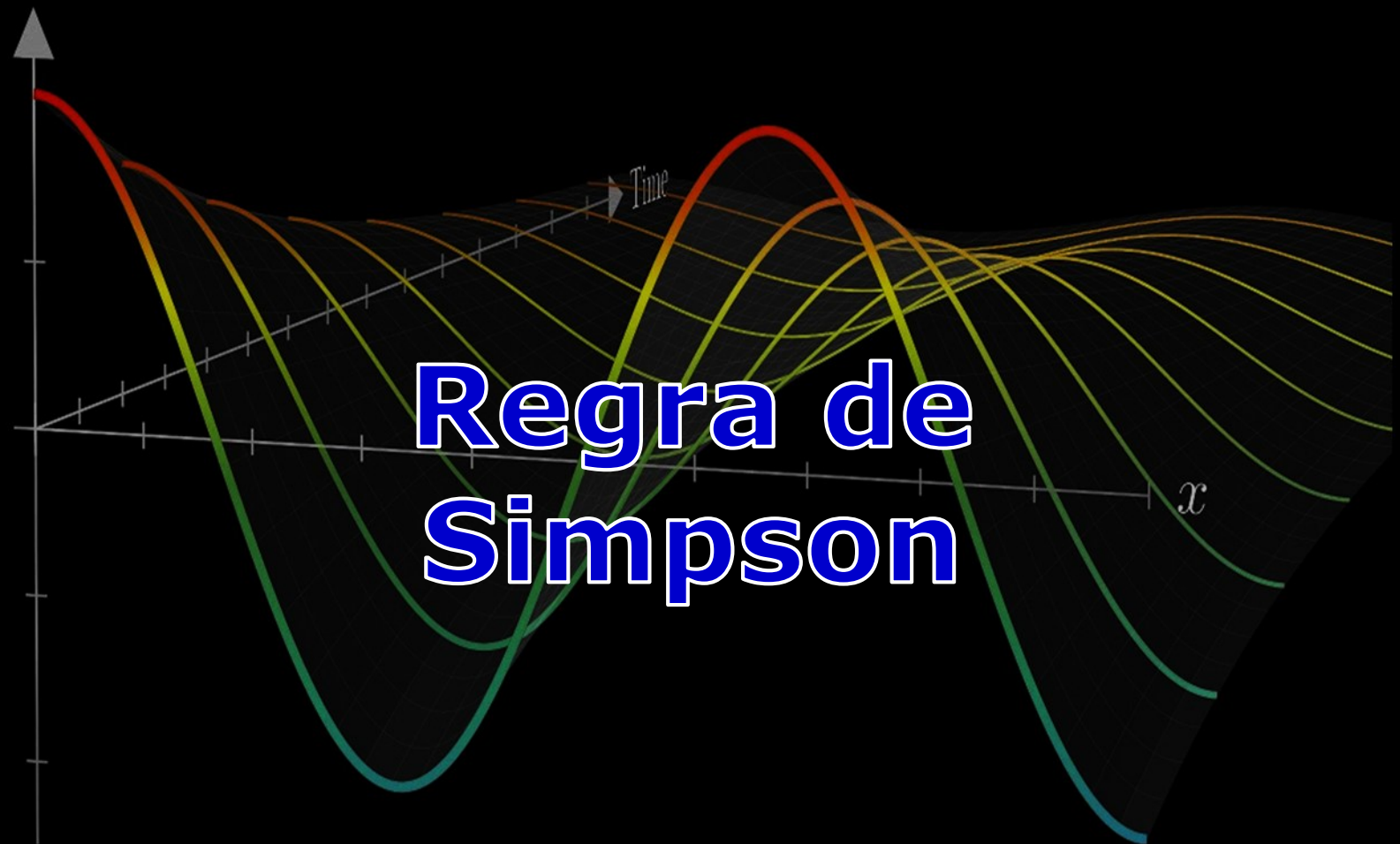
Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Regra de Simpson.
2. Exemplos.
3. Exercícios.

Pré-requisitos

Cálculo I: diferenciação e integração.



Regra de Simpson

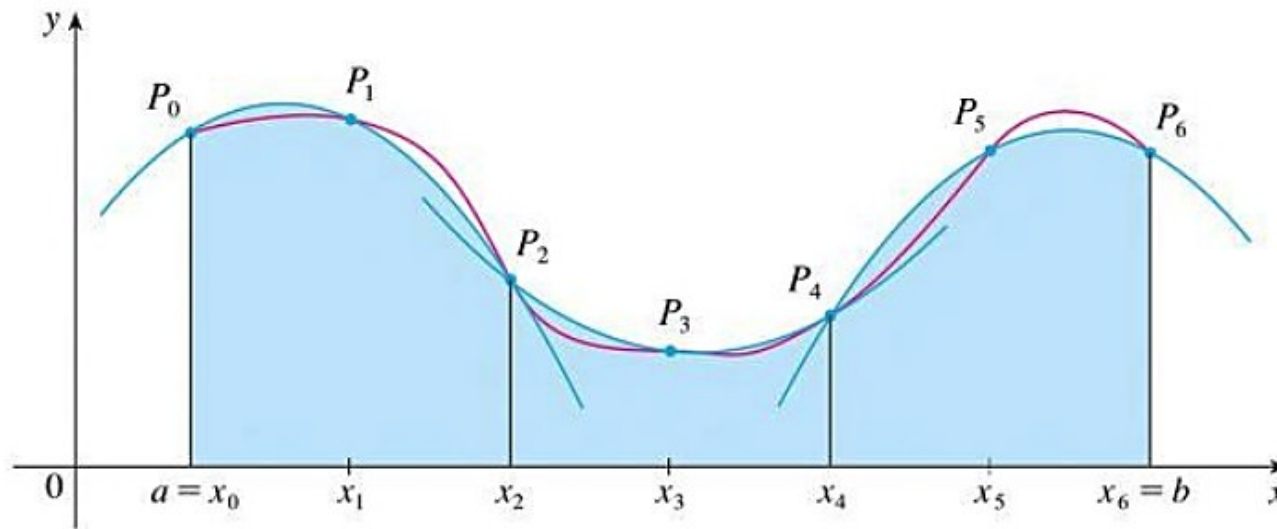
- A regra de Simpson consiste no uso de parábolas para aproximar uma curva.

Regra de Simpson

- A regra de Simpson consiste no uso de parábolas para aproximar uma curva.
- Assumimos que o número n de intervalos é par.

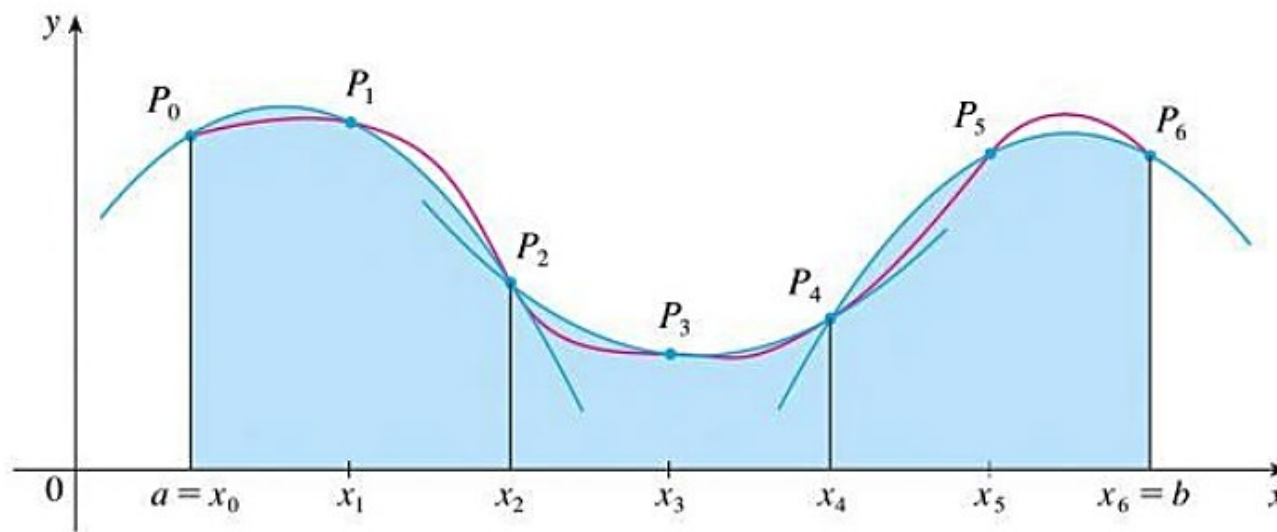
Regra de Simpson

- A regra de Simpson consiste no uso de parábolas para aproximar uma curva.
- Assumimos que o número n de intervalos é **par**.
- Em cada par consecutivo de intervalo aproximamos a curva $y = f(x) \geq 0$ por uma **parábola**.



Regra de Simpson

- A regra de Simpson consiste no uso de parábolas para aproximar uma curva.
- Assumimos que o número n de intervalos é **par**.
- Em cada par consecutivo de intervalo aproximamos a curva $y = f(x) \geq 0$ por uma **parábola**.

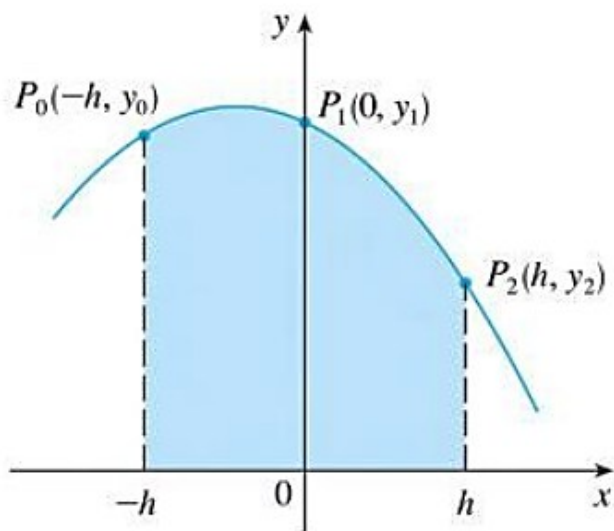


Curva
vermelha:
 $y = f(x)$

Curvas azuis:
parábolas

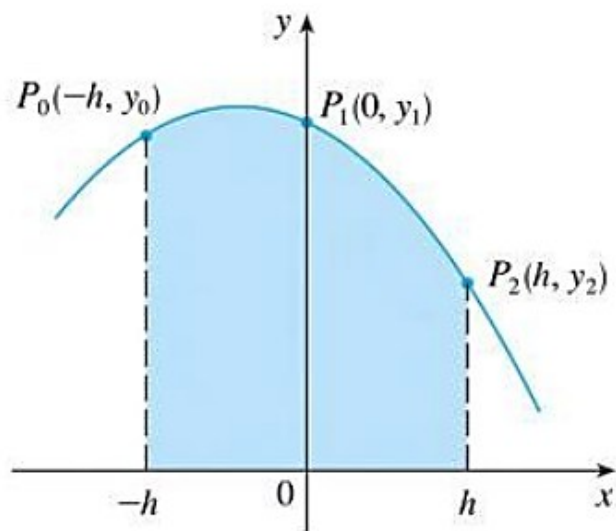
Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.



Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.

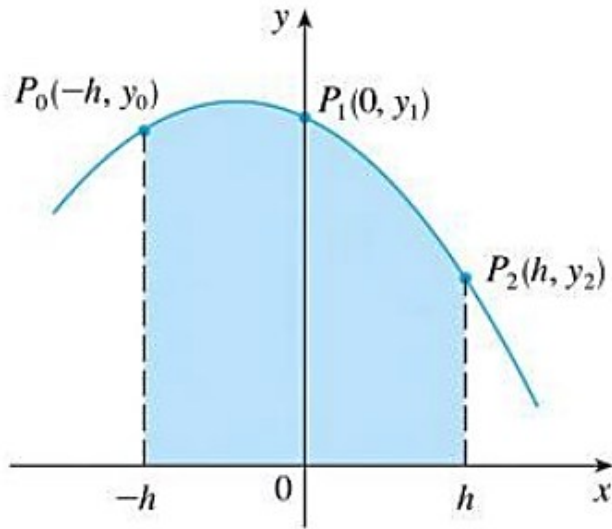


- A equação da parábola é:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.



- A equação da parábola é:

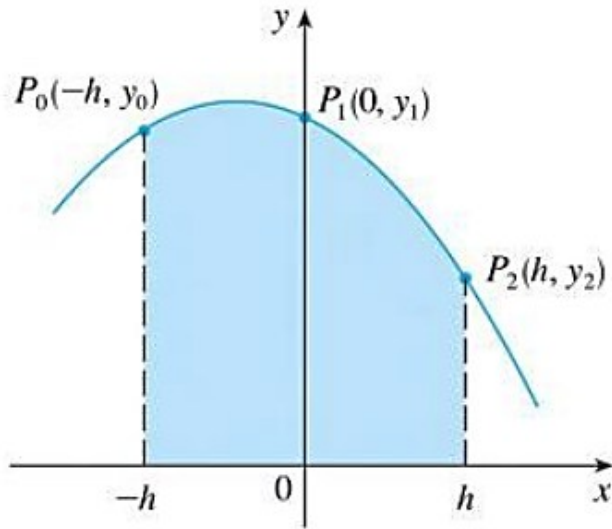
$$y = Ax^2 + Bx + C$$

- A área sob a parábola é:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx$$

Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.



- A equação da parábola é:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

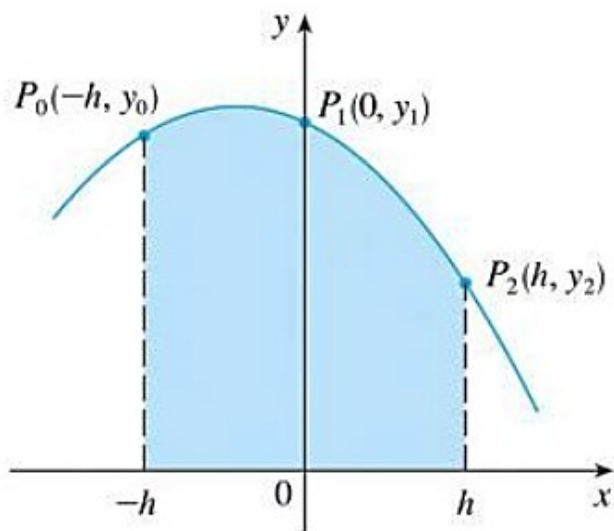
- A área sob a parábola é:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx$$

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx$$

Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.



- A equação da parábola é:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

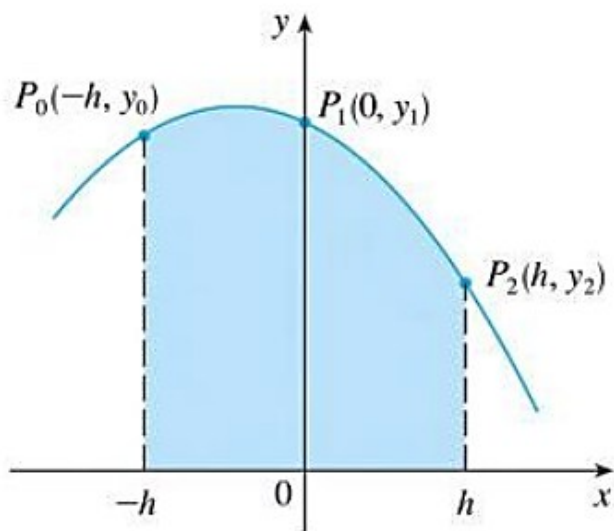
- A área sob a parábola é:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx$$

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h$$

Regra de Simpson

- Primeiro vamos considerar o caso onde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.



- A equação da parábola é:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

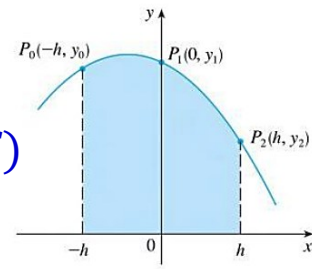
- A área sob a parábola é:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx$$

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

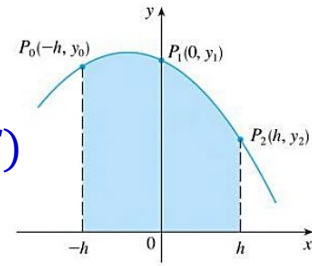
Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

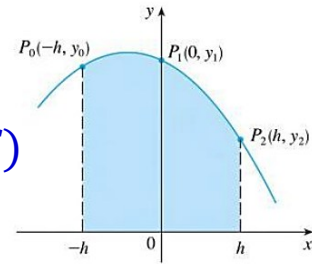


➤ Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



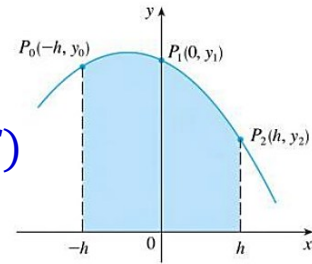
- Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

- Avaliando a parábola em cada ponto:

Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



- Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

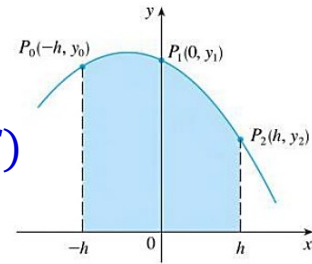
$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

- Avaliando a parábola em cada ponto:

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = \mathbf{Ah^2 - Bh + C}$$

Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



- Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

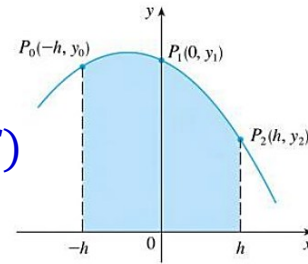
- Avaliando a parábola em cada ponto:

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = \mathbf{Ah^2 - Bh + C}$$

$$y_1 = C \quad \rightarrow \quad \mathbf{4y_1 = 4C}$$

Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



- Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

- Avaliando a parábola em cada ponto:

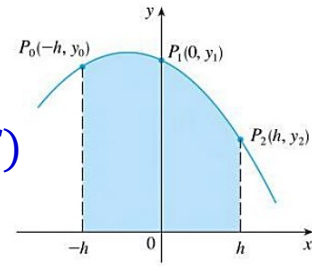
$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = \mathbf{Ah^2 - Bh + C}$$

$$y_1 = C \quad \rightarrow \quad \mathbf{4y_1 = 4C}$$

$$y_2 = A(h)^2 + B(h) + C = \mathbf{Ah^2 + Bh + C}$$

Regra de Simpson

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$



- Por outro lado, a parábola passa pelos pontos:

$$P_0(-h, y_0); \quad P_1(0, y_1); \quad P_2(h, y_2);$$

- Avaliando a parábola em cada ponto:

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = \mathbf{Ah^2 - Bh + C}$$

$$y_1 = C \quad \rightarrow \quad \mathbf{4y_1 = 4C}$$

$$y_2 = A(h)^2 + B(h) + C = \mathbf{Ah^2 + Bh + C}$$

- Somando as três últimas equações:

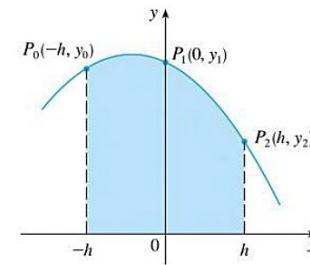
$$y_0 + 4y_1 + y_2 = \mathbf{2Ah^2 + 6C}$$

Regra de Simpson

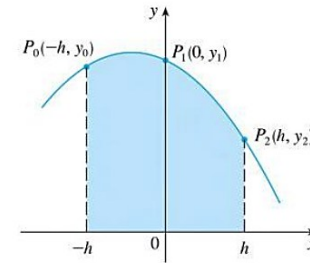
➤ Agrupando os resultados:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$



Regra de Simpson



- Agrupando os resultados:

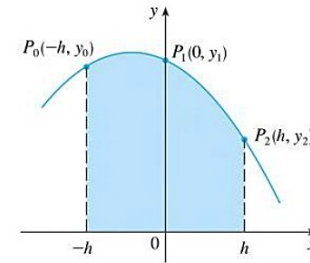
$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

- A área abaixo da parábola e acima do eixo x será:

$$A = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Regra de Simpson



- Agrupando os resultados:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

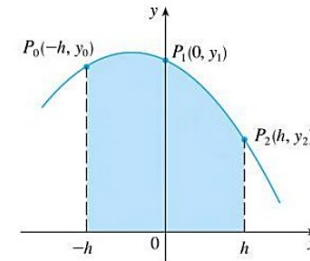
- A área abaixo da parábola e acima do eixo x será:

$$A = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

- O cálculo das área de todas as parábolas será:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Regra de Simpson



- Agrupando os resultados:

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

- A área abaixo da parábola e acima do eixo x será:

$$A = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

- O cálculo das área de todas as parábolas será:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde n é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

Regra de Simpson

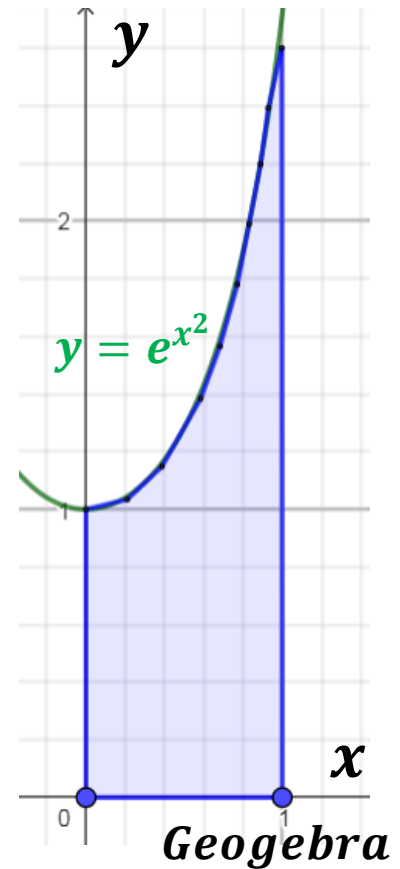
$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde n é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

Limitante de Erro para a Regra de Simpson Suponha que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Se E_s é o erro envolvido no uso da Regra de Simpson, então

$$|E_s| \leq \frac{K(b - a)^5}{180n^4}$$

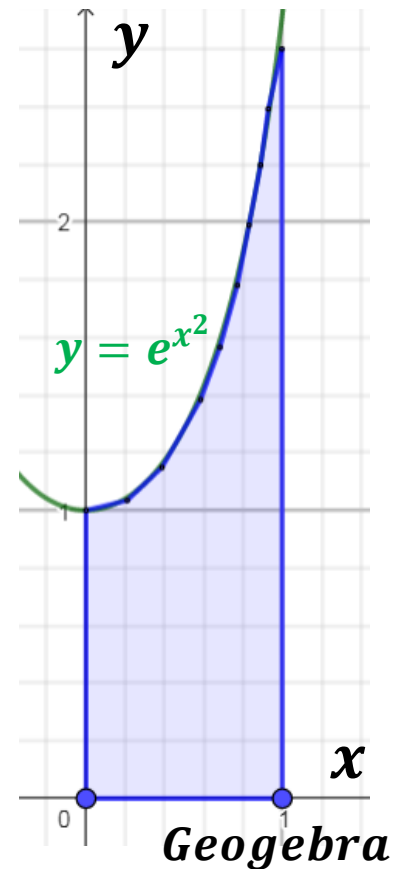
Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.



Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

Regra de Simpson resulta em

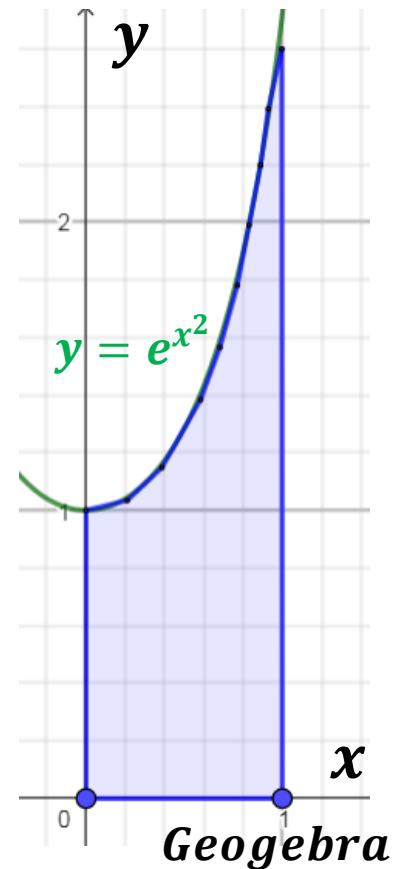


Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) +$$

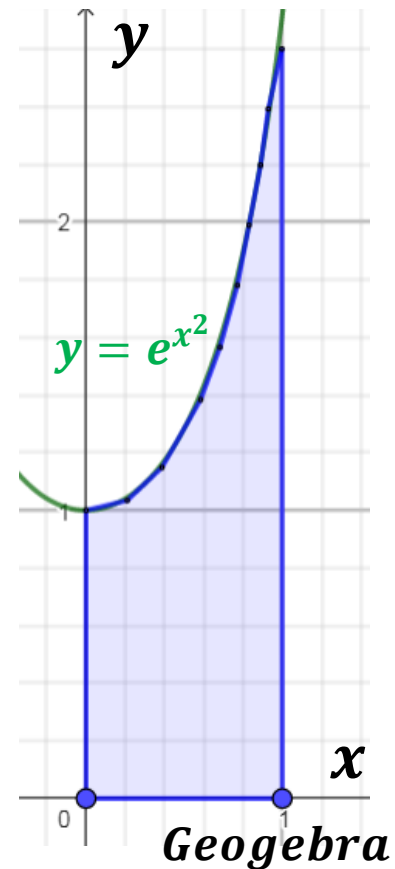


Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)]$$



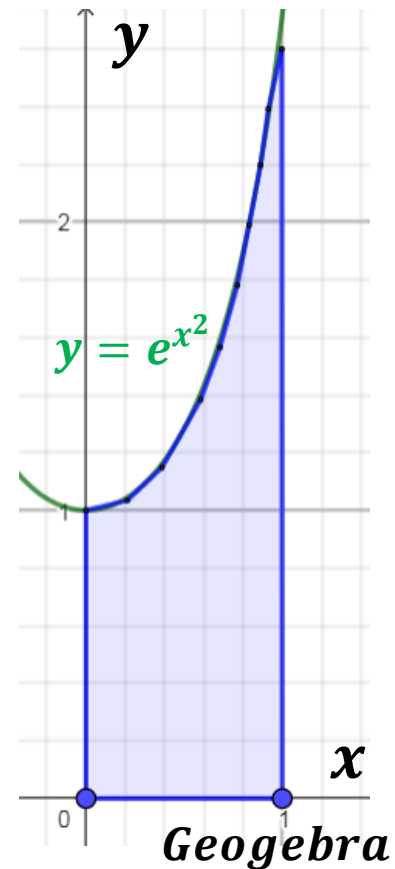
Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)]$$

$$= \frac{0,1}{3} [e^0 + 4e^{0,01} + 2e^{0,04} + 4e^{0,09} + 2e^{0,16} + \dots + 4e^{0,81} + 2e^{0,64} + 4e^{0,49} + 2e^{0,36} + 4e^{0,25} + 2e^{0,16} + 4e^{0,09} + 2e^{0,04} + 4e^{0,01} + e^1]$$



Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

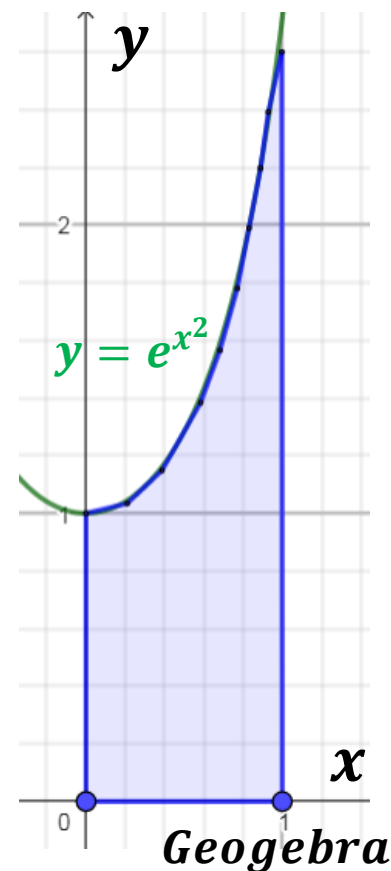
Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)]$$

$$= \frac{0,1}{3} [e^0 + 4e^{0,01} + 2e^{0,04} + 4e^{0,09} + 2e^{0,16}$$

$$+ 4e^{0,25} + 2e^{0,36} + 4e^{0,49} + 2e^{0,64} + 4e^{0,81} + e^1]$$



Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

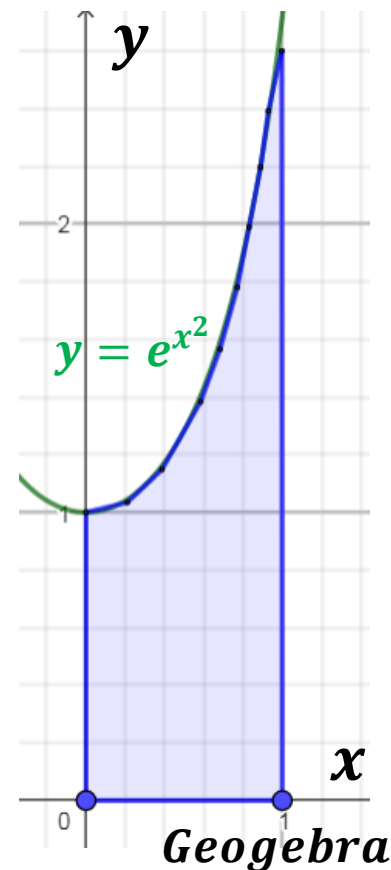
Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)]$$

$$= \frac{0,1}{3} [e^0 + 4e^{0,01} + 2e^{0,04} + 4e^{0,09} + 2e^{0,16}$$

$$+ 4e^{0,25} + 2e^{0,36} + 4e^{0,49} + 2e^{0,64} + 4e^{0,81} + e^1]$$

$$\approx 1,462681$$



Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leq x \leq 1$, temos

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leq x \leq 1$, temos

$$0 \leq f^{(4)}(x) \leq (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leq x \leq 1$, temos

$$0 \leq f^{(4)}(x) \leq (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leq x \leq 1$, temos

$$0 \leq f^{(4)}(x) \leq (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$

o erro é no máximo

$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0,000115 \quad \int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,463$$

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

A Figura 9 mostra o tráfego de dados de uma rede acadêmica de pesquisa, no dia 10 de fevereiro de 1998. $D(t)$ denota o processamento dos dados (Mb/s). Use a Regra de Simpson para estimar da quantidade total de dados transmitidos da meia-noite até meio-dia.

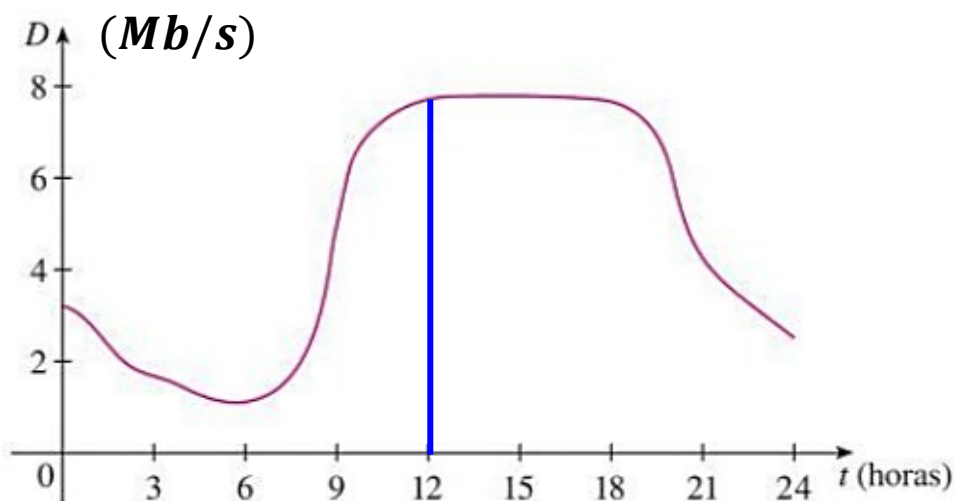


Figura 9

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

A Figura 9 mostra o tráfego de dados de uma rede acadêmica de pesquisa, no dia 10 de fevereiro de 1998. $D(t)$ denota o processamento dos dados (Mb/s). Use a Regra de Simpson para estimar da quantidade total de dados transmitidos da meia-noite até meio-dia.

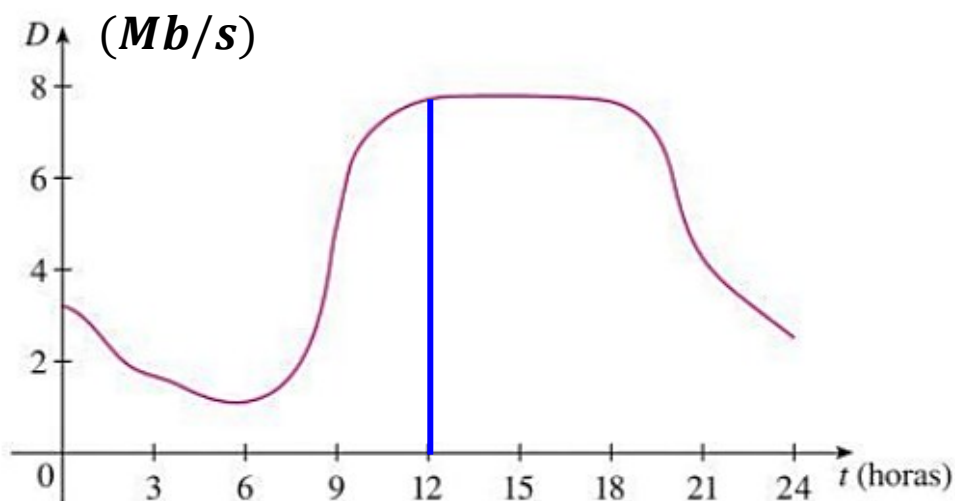


Figura 9

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3,2
1	3 600	2,7
2	7 200	1,9
3	10 800	1,7
4	14 400	1,3
5	18 000	1,0
6	21 600	1,1
7	25 200	1,3
8	28 800	2,8
9	32 400	5,7
10	36 000	7,1
11	39 600	7,7
12	43 200	7,9

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

A Figura 9 mostra o tráfego de dados de uma rede acadêmica de pesquisa, no dia 10 de fevereiro de 1998. $D(t)$ denota o processamento dos dados (Mb/s). Use a Regra de Simpson para estimar da quantidade total de dados transmitidos da meia-noite até meio-dia.

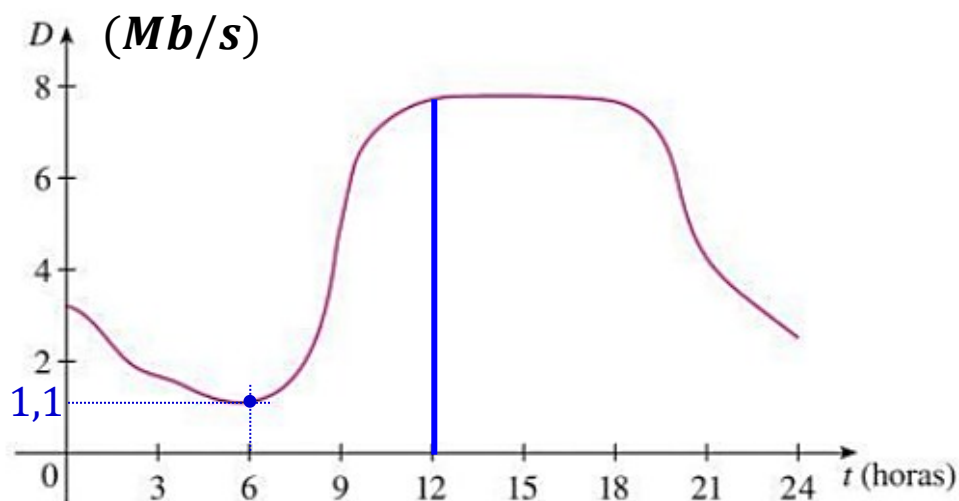


Figura 9

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3,2
1	3 600	2,7
2	7 200	1,9
3	10 800	1,7
4	14 400	1,3
5	18 000	1,0
6	21 600	1,1
7	25 200	1,3
8	28 800	2,8
9	32 400	5,7
10	36 000	7,1
11	39 600	7,7
12	43 200	7,9

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\int_0^{43\,200} A(t) dt \approx \frac{\Delta t}{3} [D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)]$$

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t) \, dt &\approx \frac{\Delta t}{3} [D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots \\ &\quad + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3\,600}{3} [3,2 + 4(2,7) + 2(1,9) + 4(1,7) + 2(1,3) + 4(1,0)]\end{aligned}$$

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t) \, dt &\approx \frac{\Delta t}{3} [D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots \\ &\quad + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3\,600}{3} [3,2 + 4(2,7) + 2(1,9) + 4(1,7) + 2(1,3) + 4(1,0) \\ &\quad + 2(1,1) + 4(1,3) + 2(2,8) + 4(5,7) + 2(7,1)]\end{aligned}$$

Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t) \, dt &\approx \frac{\Delta t}{3} [D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots \\ &\quad + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3\,600}{3} [3,2 + 4(2,7) + 2(1,9) + 4(1,7) + 2(1,3) + 4(1,0) \\ &\quad + 2(1,1) + 4(1,3) + 2(2,8) + 4(5,7) + 2(7,1) \\ &\quad + 4(7,7) + 7,9]\end{aligned}$$

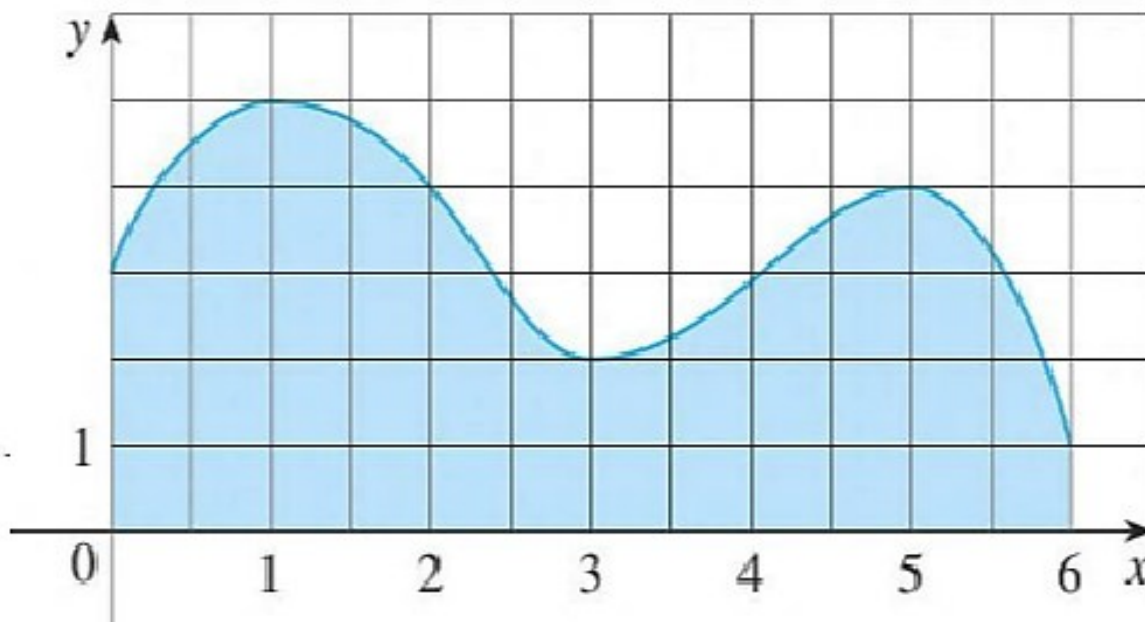
Exemplo 2 Quantidade total de dados D .

Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t) \, dt &\approx \frac{\Delta t}{3} [D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots \\ &\quad + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3\,600}{3} [3,2 + 4(2,7) + 2(1,9) + 4(1,7) + 2(1,3) + 4(1,0) \\ &\quad + 2(1,1) + 4(1,3) + 2(2,8) + 4(5,7) + 2(7,1) \\ &\quad + 4(7,7) + 7,9] \\ &= 143\,880 = 144\,000 \text{ megabits, ou } 144 \text{ gigabites.}\end{aligned}$$

Exercícios propostos (Stewart, vol 1, 7 ed. P. 467)

20. (a) Encontre as aproximações T_{10} para $\int_1^2 e^{1/x} dx$.
(b) Estime os erros envolvidos nas aproximações da parte (a).
(c) Quão grande temos que escolher n para que as aproximações T_n para a integral na parte (a) tenham a precisão de 0,0001?
29. Estime a área sob o gráfico na figura usando (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra de Simpson, cada uma com $n = 6$.



Respostas

20a – 2,020

29a – 19,80

29b – 20,53

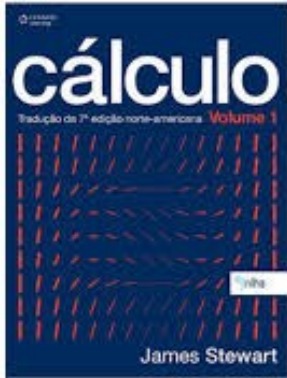
Para depois desta aula:

- Estudar seções 7.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 7.7 do Stewart.

Próxima aula:

- Sequências e séries.

Bibliografia



1. STEWART, James Cálculo - volume 1. 7 ed. São Paulo: Cengage, 2013.

2. FRANCO, Neide Bertold, Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson, 2006.

