

# Equações diferenciais



## Equações diferenciais ordinárias

### Aula 19

## Sistemas lineares a coeficientes constantes

Henrique Antonio Mendonça Faria

[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)

# Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Autovalores distintos.
3. Autovalores complexos.
4. Autovalores repetidos.

## Pré-requisitos

- Autovalores e autovetores de uma matriz.



# Introdução

- Para resolução dos sistemas lineares de eq. dif. os **autovalores** da matriz dos coeficientes assumem papel preponderante.
- Para **sistemas com duas variáveis** a equação **quadrática** é utilizada para determinação desses autovalores.

# Introdução

- Para resolução dos sistemas lineares de eq. dif. os **autovalores** da matriz dos coeficientes assumem papel preponderante.
- Para **sistemas com duas variáveis** a equação **quadrática** é utilizada para determinação desses autovalores.
- Portanto, podem ocorrer autovalores **distintos, complexos ou repetidos**.
- A análise para esses três casos fornece o entendimento fundamental para o comportamento de sistemas com mais variáveis.



**Autovalores  
distintos**

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow \text{Proposta de sol.: } \vec{X} = Be^{rt}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow \text{Proposta de sol.: } \vec{X} = Be^{rt}$$

$$\det(A - rI) = 0 \quad (\text{solução de equilíbrio})$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow \text{Proposta de sol.: } \vec{X} = Be^{rt}$$

$$\det(A - rI) = 0 \quad (\text{solução de equilíbrio})$$

- Determinação dos autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow \text{Proposta de sol.: } \vec{X} = Be^{rt}$$

$$\det(A - rI) = 0 \quad (\text{solução de equilíbrio})$$

- Determinação dos autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-r)^2 - 4 = 0$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0$$



## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 4x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 4x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1 - r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r + 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

➤ **Autovetor** associado ao autovalor  $r_1 = 3$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 - 3 & 1 \\ 4 & 1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 4x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Autovetor**  
de  $r_1 = 3$



## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Autovetor associado ao autovalor  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ Autovetor associado ao autovalor  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤ **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Autovetor} \\ \text{de } r_1 = -1 \end{matrix}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

- **Autovetor** associado ao **autovalor**  $r_2 = -1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 \\ 4 & 1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Autovetor} \\ \text{de } r_1 = -1 \end{matrix}$$

- Soluções do sistema de equações diferenciais.

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$



# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- O gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- O gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução  $\vec{X}^{(1)}$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- O gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução  $\vec{X}^{(1)}$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{3t} \quad \text{e} \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- O gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução  $\vec{X}^{(1)}$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{3t} \quad \text{e} \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}$$

- Eliminando o termo em  $t$  das equações resulta em:

$$x_2 = 2x_1 \quad (\text{Equação de uma reta no plano } x_2 x_1)$$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤  $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

## Autovalores distintos (sinais opostos)

$$\blacktriangleright \vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_2 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = -2c_2 e^{-t}$$



## Autovalores distintos (sinais opostos)

➤  $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_2 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = -2c_2 e^{-t}$

➤ Eliminando o termo em  $t$ :  $x_2 = -2x_1$

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤  $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_2 e^{-t} \text{ e } x_2 = -2c_2 e^{-t}$

➤ Eliminando o termo em  $t$ :  $x_2 = -2x_1$

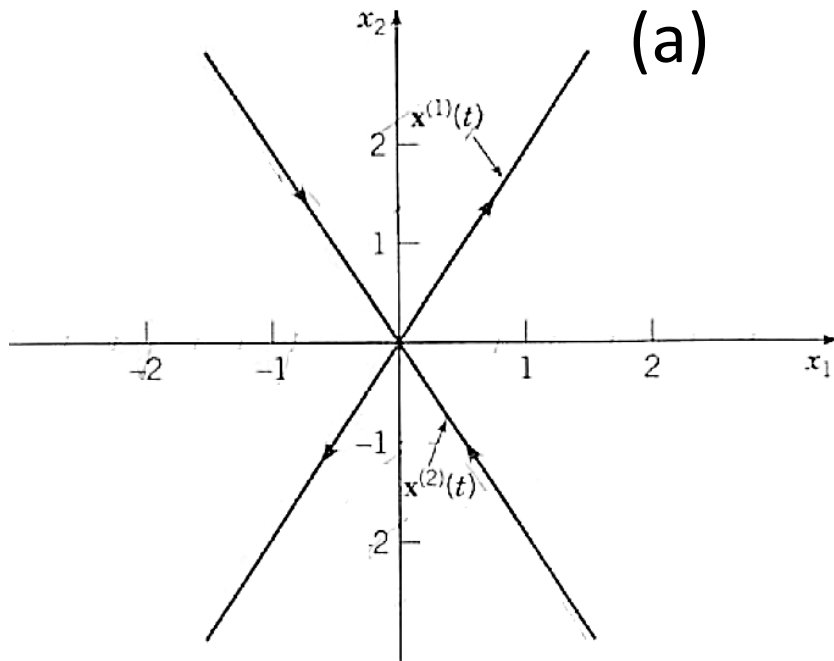
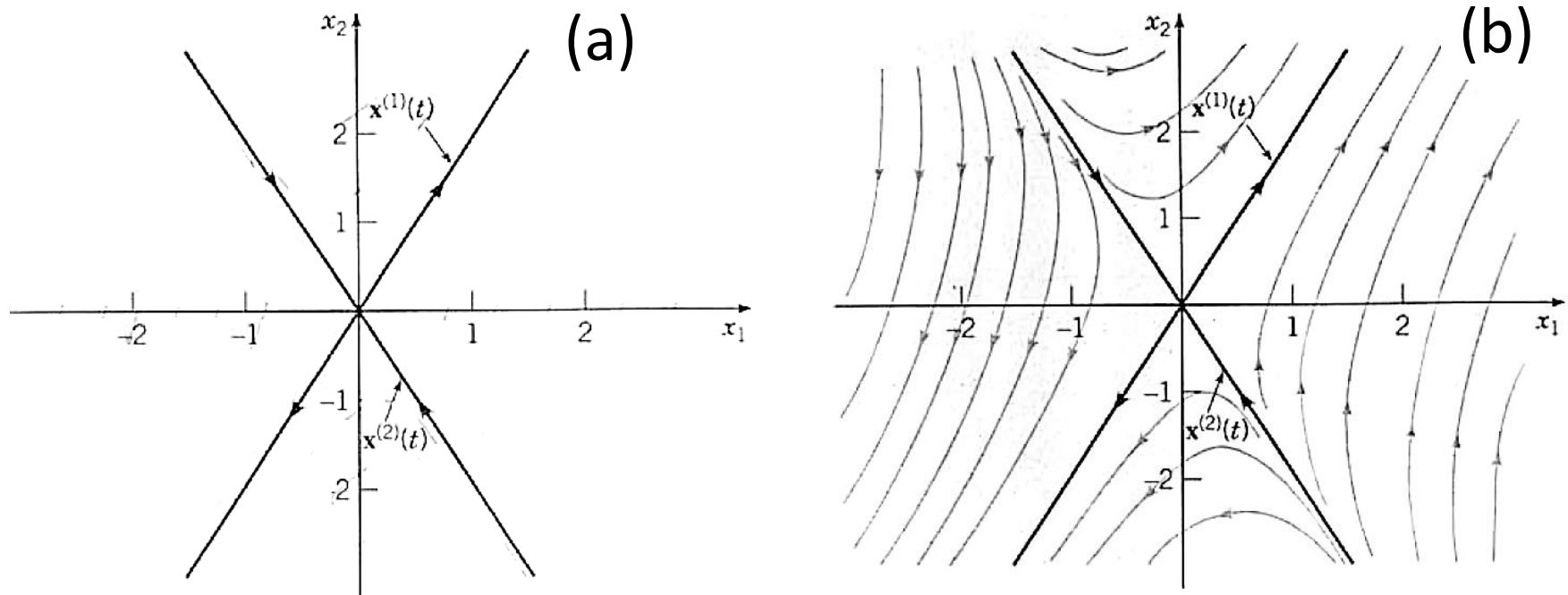


FIGURA 7.5.2: (a) Retas formadas para o sistema;

# Autovalores distintos (sinais opostos)

➤  $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_2 e^{-t} \text{ e } x_2 = -2c_2 e^{-t}$

➤ Eliminando o termo em  $t$ :  $x_2 = -2x_1$



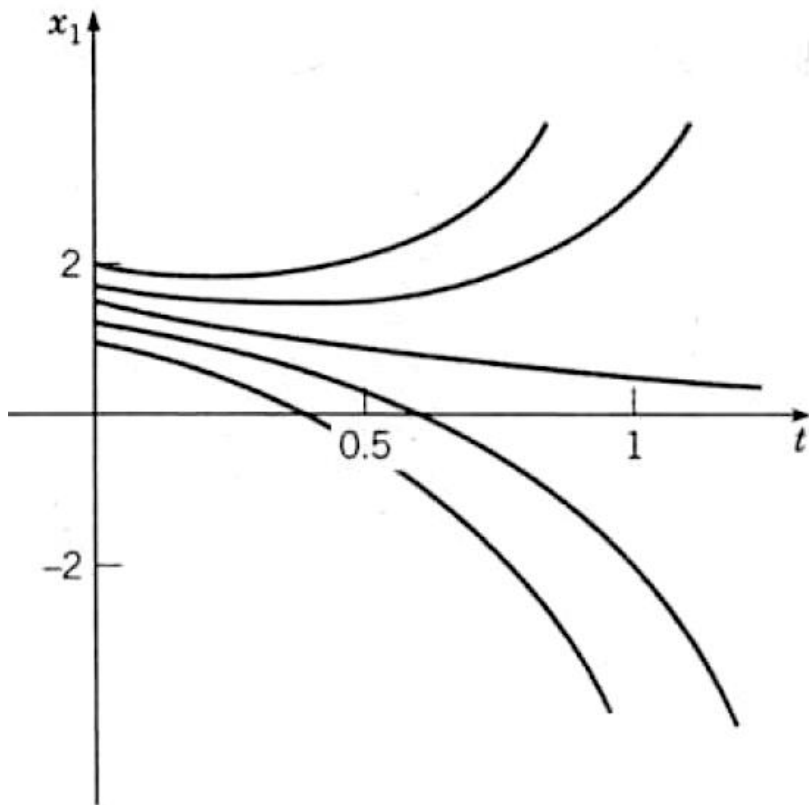
**FIGURA 7.5.2:** (a) Retas formadas para o sistema; (b) Trajetórias do sistema.

A origem é um ponto de sela (as soluções se afastam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores de sinais opostos. 43

# Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema:  $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

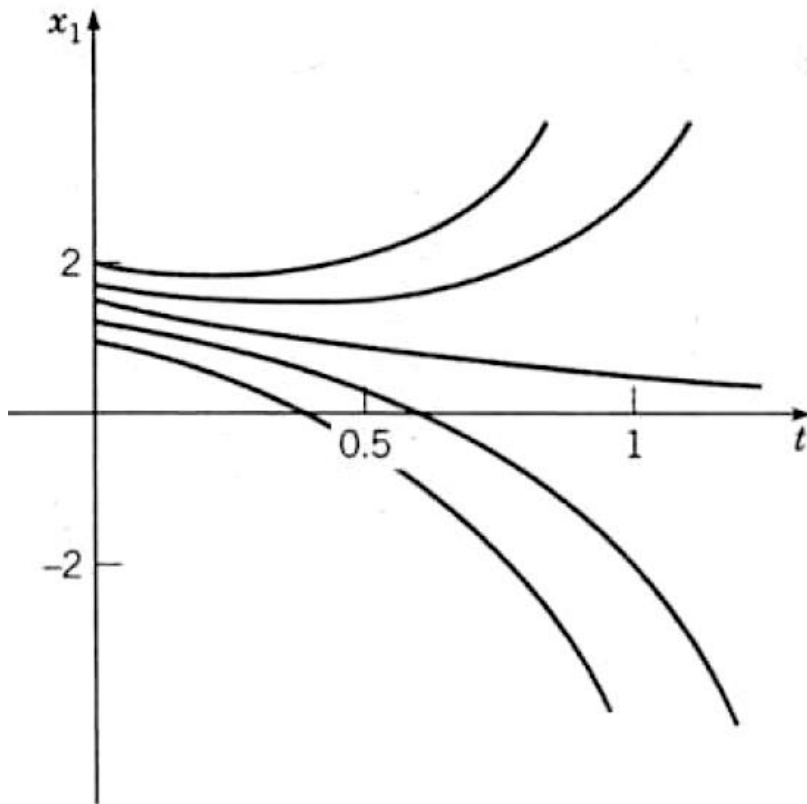


**FIGURA 7.5.2** Variável  $x_1$  versus  $t$  para valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

# Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema:  $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$



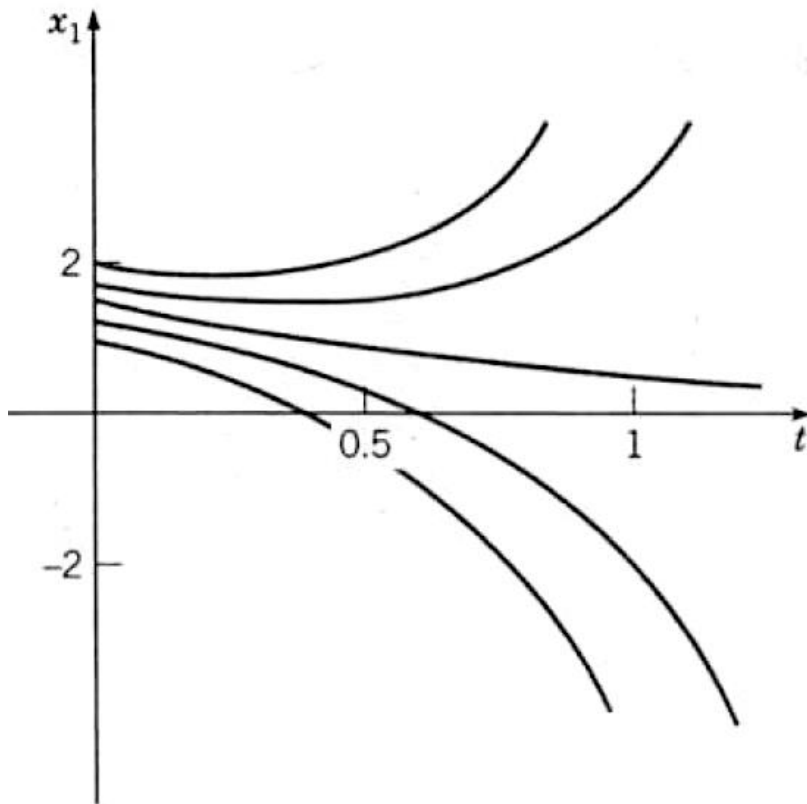
**FIGURA 7.5.2** Variável  $x_1$  versus  $t$  para valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

# Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema:  $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

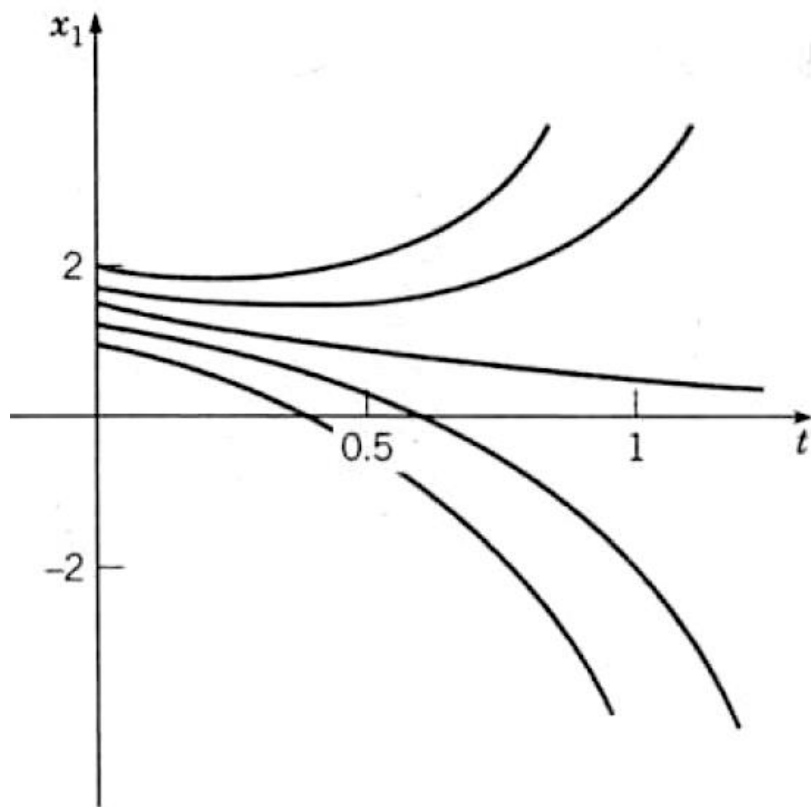
➤ Para  $c_1 \gg c_2$ :  $e^{3t}$  prevalece e  $x_1$  cresce.



**FIGURA 7.5.2** Variável  $x_1$  versus  $t$  para valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

# Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema:  $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$



$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

- Para  $c_1 \gg c_2$ :  $e^{3t}$  prevalece e  $x_1$  cresce.
- Para  $c_1 \ll c_2$ :  $e^{-t}$  prevalece e  $x_1$  decresce.

FIGURA 7.5.2 Variável  $x_1$  versus  $t$  para valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3 - r)(-2 - r) - 2 = 0$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3 - r)(-2 - r) - 2 = 0$$
$$(r + 1)(r + 4) = 0$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3 - r)(-2 - r) - 2 = 0$$

$$(r + 1)(r + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -4$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3 - r)(-2 - r) - 2 = 0$$

$$(r + 1)(r + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -4$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ Autovetor de } r_1 = -1$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3 - r)(-2 - r) - 2 = 0$$

$$(r + 1)(r + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -4$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ Autovetor de } r_1 = -1$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Autovetor de } r_2 = -4$$

# Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)}$$



# Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções  $\vec{X}$  no gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções  $\vec{X}$  no gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

# Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções  $\vec{X}$  no gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções  $\vec{X}$  no gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -c_2 \sqrt{2} e^{-4t} \quad \text{e} \quad x_2 = c_2 e^{-4t}$$

## Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções  $\vec{X}$  no gráfico  $x_2$  versus  $x_1$  tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -c_2 \sqrt{2} e^{-4t} \quad \text{e} \quad x_2 = c_2 e^{-4t}$$

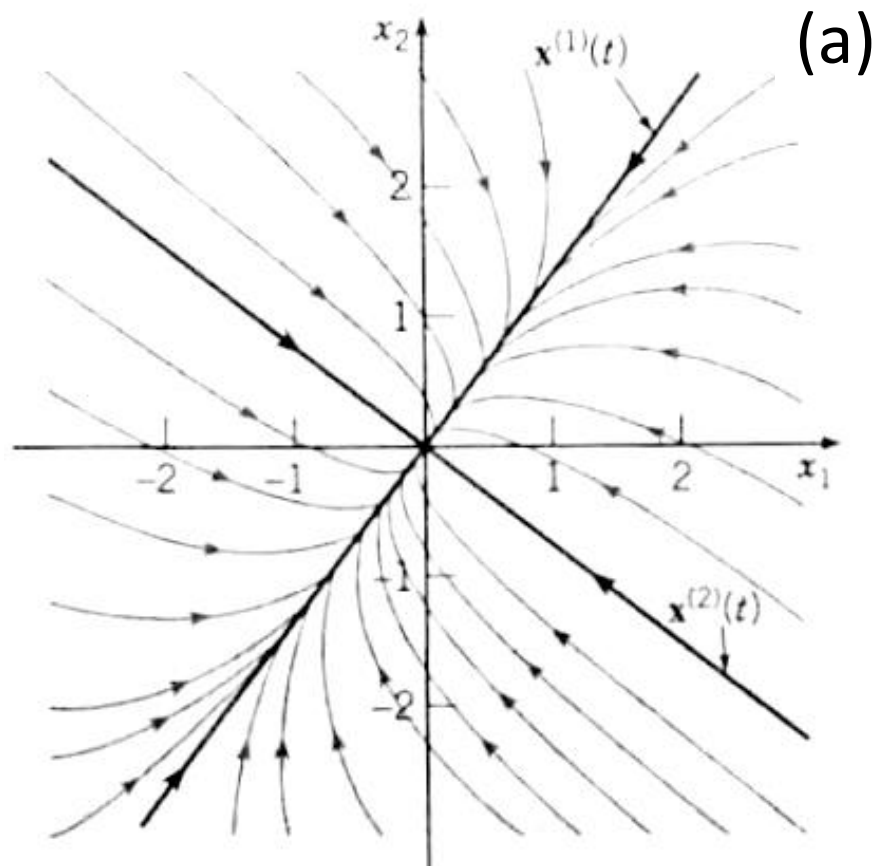
- Eliminando o termo em  $t$  das equações fica:

$$x_2 = \sqrt{2} x_1$$

$$x_2 = -\sqrt{2} x_1$$

(Equações de reta no plano  $x_2 x_1$ )

# Autovalores distintos (sinais iguais)

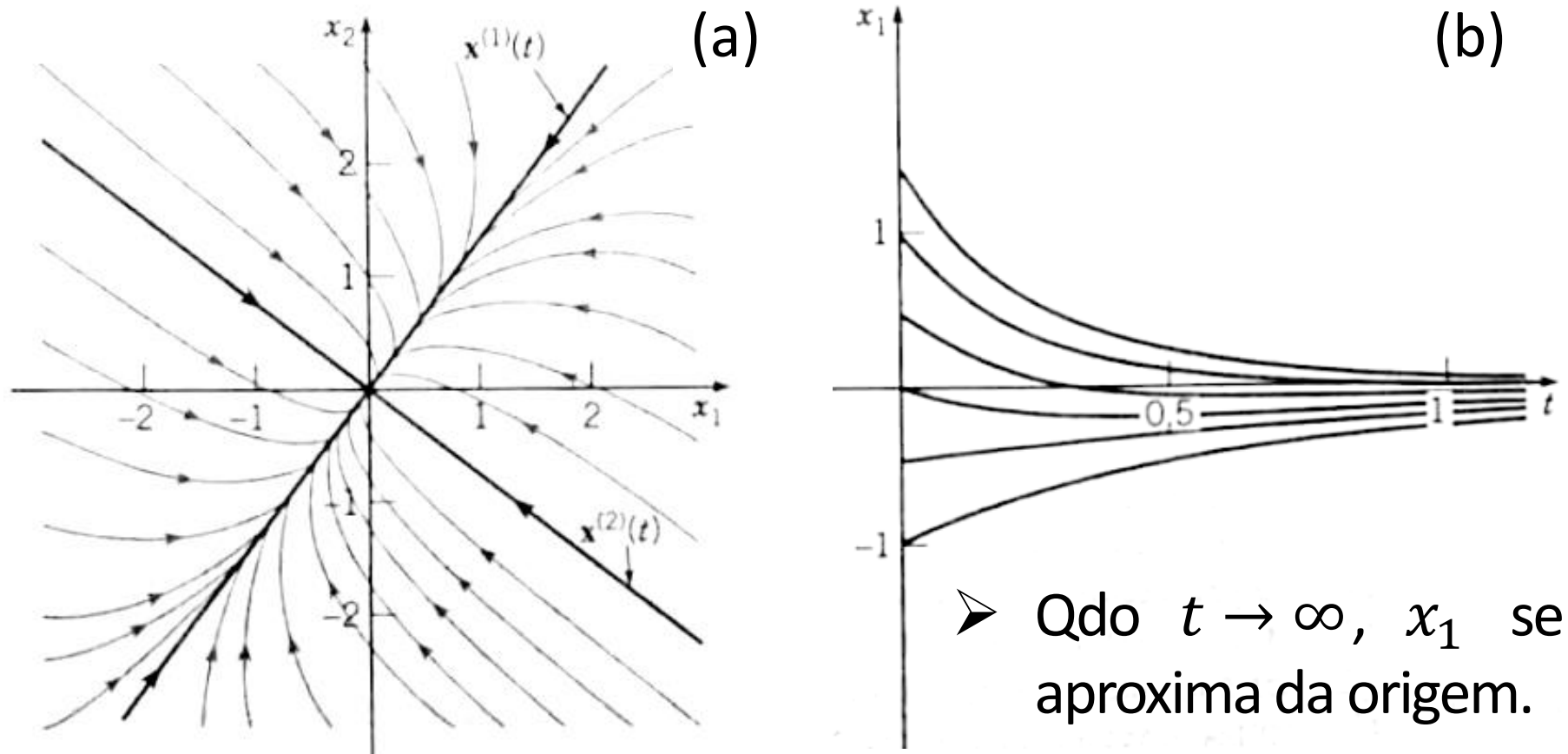


**FIGURA 7.5.4:** (a) Trajetórias do sistema;

A origem é um nó (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores de **sinais iguais**.

# Autovalores distintos (sinais iguais)



**FIGURA 7.5.4:** (a) Trajetórias do sistema; (b) Gráfico  $x_1$  versus  $t$ .

A origem é um nó (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores de **sinais iguais**.



# Autovalores complexos



# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0$$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Autovetor  
de  $r_1$

# Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Autovetor  
de  $r_1$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Autovetor  
de  $r_2$



# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)}$$

# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (\cos t + i \sin t)$$

$$e^{-it} = (\cos t - i \sin t)$$

# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (\cos t + i \sin t)$$

$$e^{-it} = (\cos t - i \sin t)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (\cos t + i \sin t)$$

$$e^{-it} = (\cos t - i \sin t)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} (\cos t + i \sin t)$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}^{(1)} + c_2 \vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (\cos t + i \sin t)$$

$$e^{-it} = (\cos t - i \sin t)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} (\cos t + i \sin t)$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} (\cos t - i \sin t)$$

# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$



# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t)$$

# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

- Duas soluções **linearmente independentes** (LI) são:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad v(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

# Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

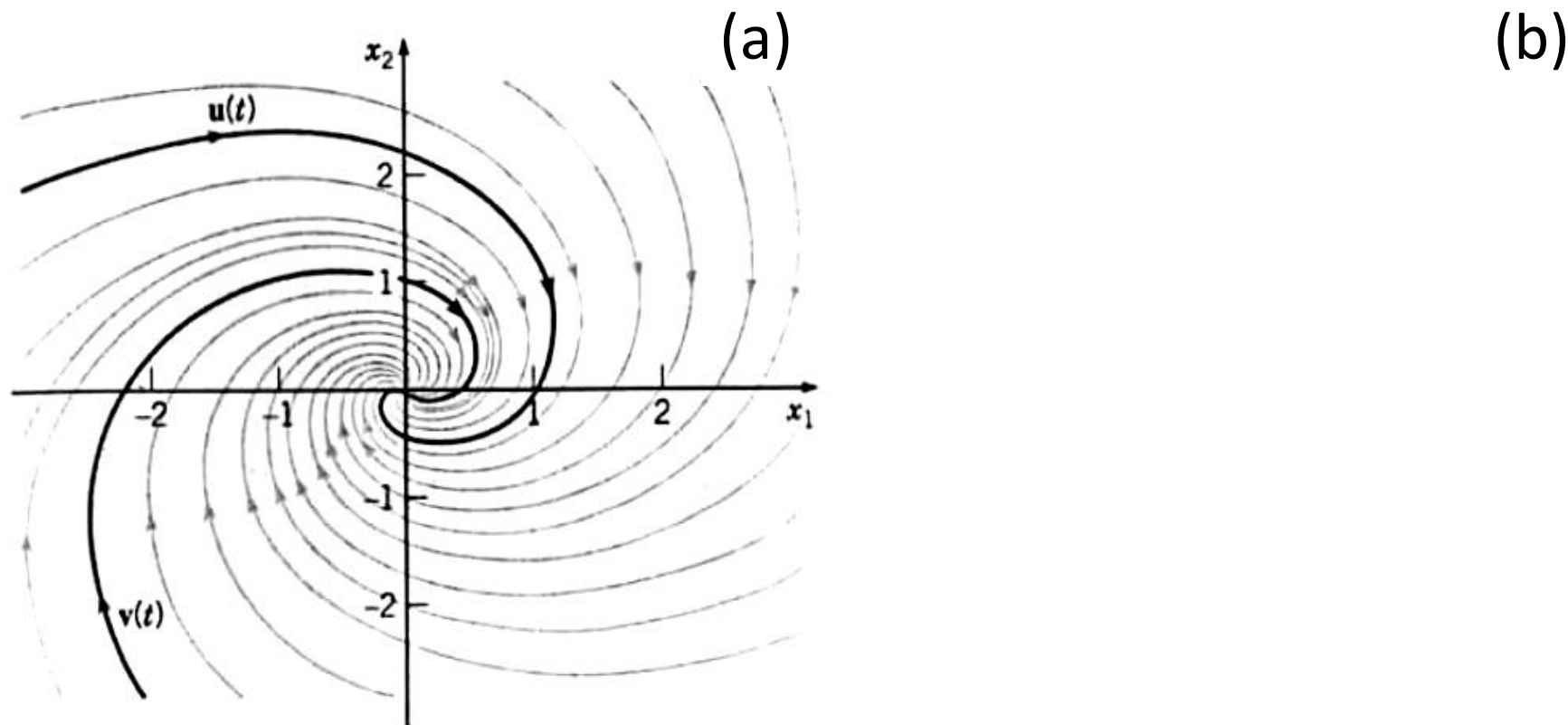
$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

- Duas soluções **linearmente independentes** (LI) são:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad v(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

- O gráfico de fase de  $x_2$  versus  $x_1$  mostra trajetórias espirais que se aproximam da origem.

# Autovalores complexos

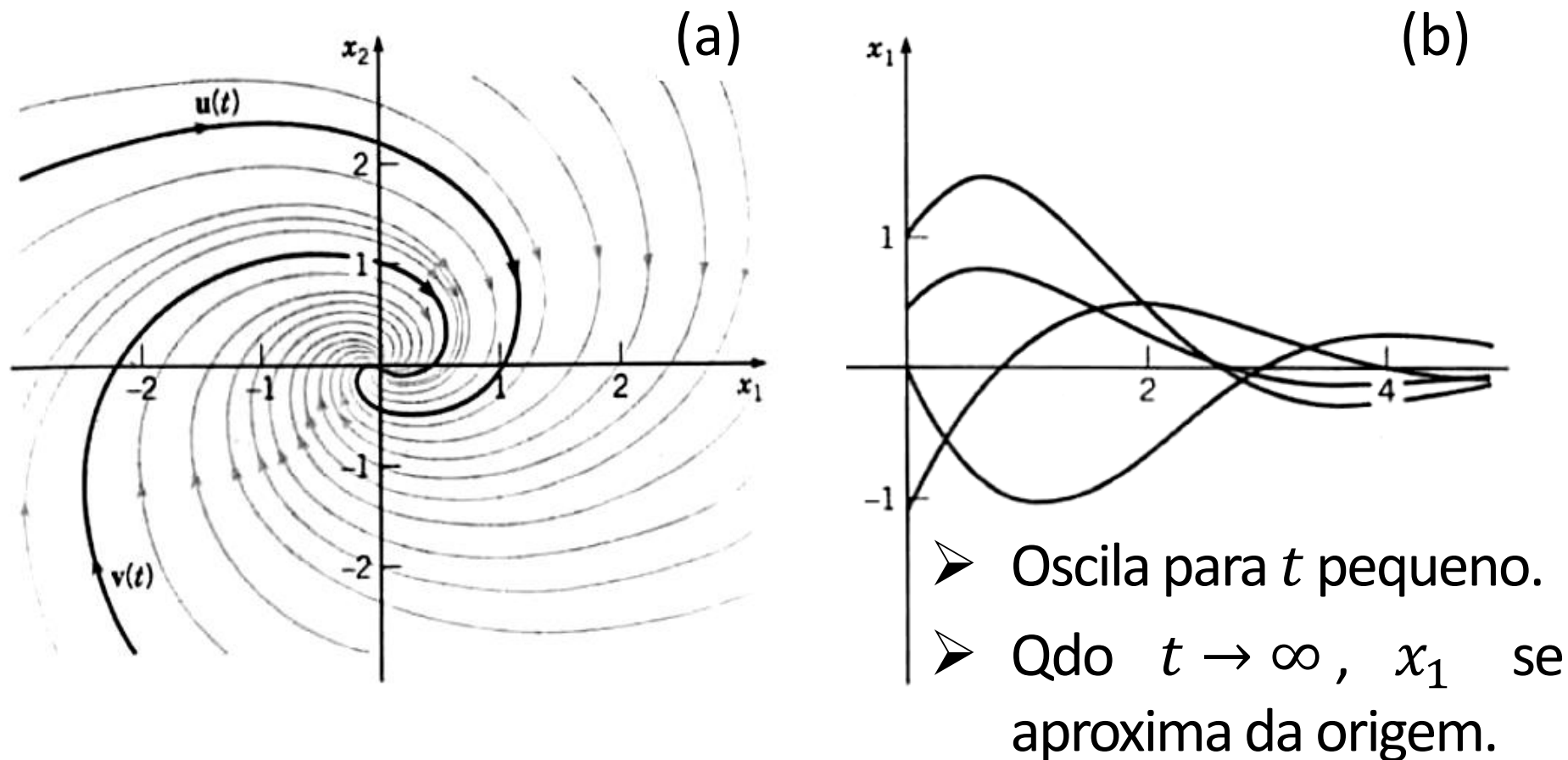


**FIGURA 7.6.2:** (a) Trajetórias do sistema; (b) Gráfico  $x_1$  versus  $t$ .

A origem é um ponto espiral (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores complexos.

# Autovalores complexos



**FIGURA 7.6.2:** (a) Trajetórias do sistema; (b) Gráfico  $x_1$  versus  $t$ .

A origem é um ponto espiral (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores complexos.



**Autovalores  
repetidos**

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1 - r & -1 \\ 1 & 3 - r \end{vmatrix} = 0$$

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$$

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$$

- Autovetor associado ao autovalor 2.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Autovetor de } r_1$$

# Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a  $A$ .

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$$

- Autovetor associado ao autovalor 2.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Autovetor  
de  $r_1$

$\Rightarrow$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

*1ª Solução*

# Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro **autovetor**.

# Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro **autovetor**.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de  $\vec{X}^{(1)}$ :  
$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad C \text{ e } D: \text{autovetores constantes}$$



# Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro **autovetor**.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de  $\vec{X}^{(1)}$ :

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad C \text{ e } D: \text{autovetores constantes}$$

- Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

# Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro **autovetor**.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de  $\vec{X}^{(1)}$ :

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad C \text{ e } D: \text{autovetores constantes}$$

- Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

$$(2C)te^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = (AC)te^{2t} + (AD)e^{2t}$$

# Autovalores repetidos

➤ Para construir a solução geral é necessário encontrar outro **autovetor**.

➤ Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de  $\vec{X}^{(1)}$ :

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad C \text{ e } D: \text{autovetores constantes}$$

➤ Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Rightarrow 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

$$(2C)te^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = (AC)te^{2t} + (AD)e^{2t}$$

➤ Igualando os coeficientes de  $te^{2t}$  e  $e^{2t}$ .

$$2C = AC \quad C + 2D = AD$$

# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC$$

$$C + 2D = AD$$

# Autovalores repetidos

➤ Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se **C** for um **autovetor** de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se **C** for um **autovetor** de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se **C** for um **autovetor** de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 & -1 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$



# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se **C** for um **autovetor** de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 & -1 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

# Autovalores repetidos

- Condições para o segundo **autovetor**:

$$2C = AC \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)C = 0 \quad (1)$$

$$C + 2D = AD \quad (A - 2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se **C** for um **autovetor** de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Autovetor**

## Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

## Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases}$$

## Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

# Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor  $D$  de  $A$  associado ao autovalor  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array} \Rightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Substituindo os **autovetores**  $C$  e  $D$  na proposta  $\vec{X}^{(2)}$ :

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \Rightarrow \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$



# Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \quad (2)$$

- Para equação (2) o **autovetor**  $D$  de  $A$  associado ao **autovalor**  $r = 2$  depende de  $C$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

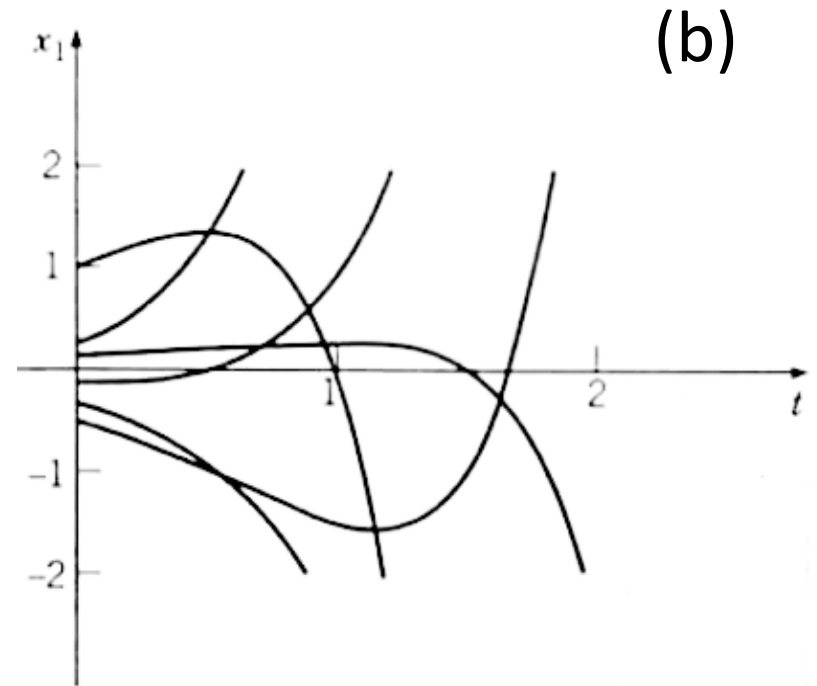
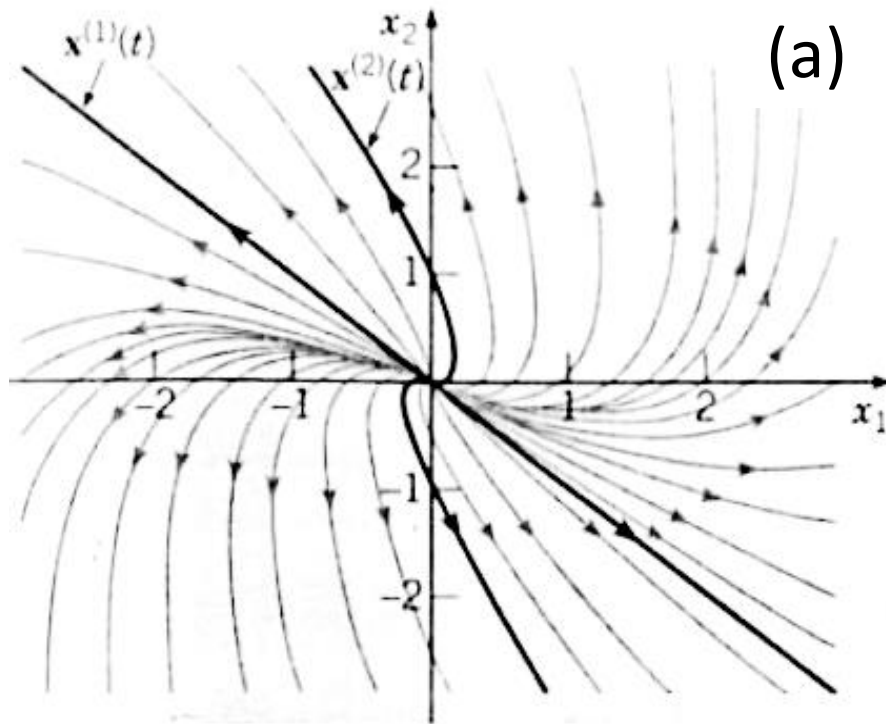
$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Substituindo os **autovetores**  $C$  e  $D$  na proposta  $\vec{X}^{(2)}$ :

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \Rightarrow \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right] \quad \text{Solução geral}$$

# Autovalores repetidos



**FIGURA 7.8.2:** (a) Trajetórias do sistema; (b) Gráfico  $x_1$  versus  $t$ .

A origem é nó impróprio (as soluções se afastam dela).

Padrão típico de um sistema  $2 \times 2$  com autovalores repetidos.







**Resumo**

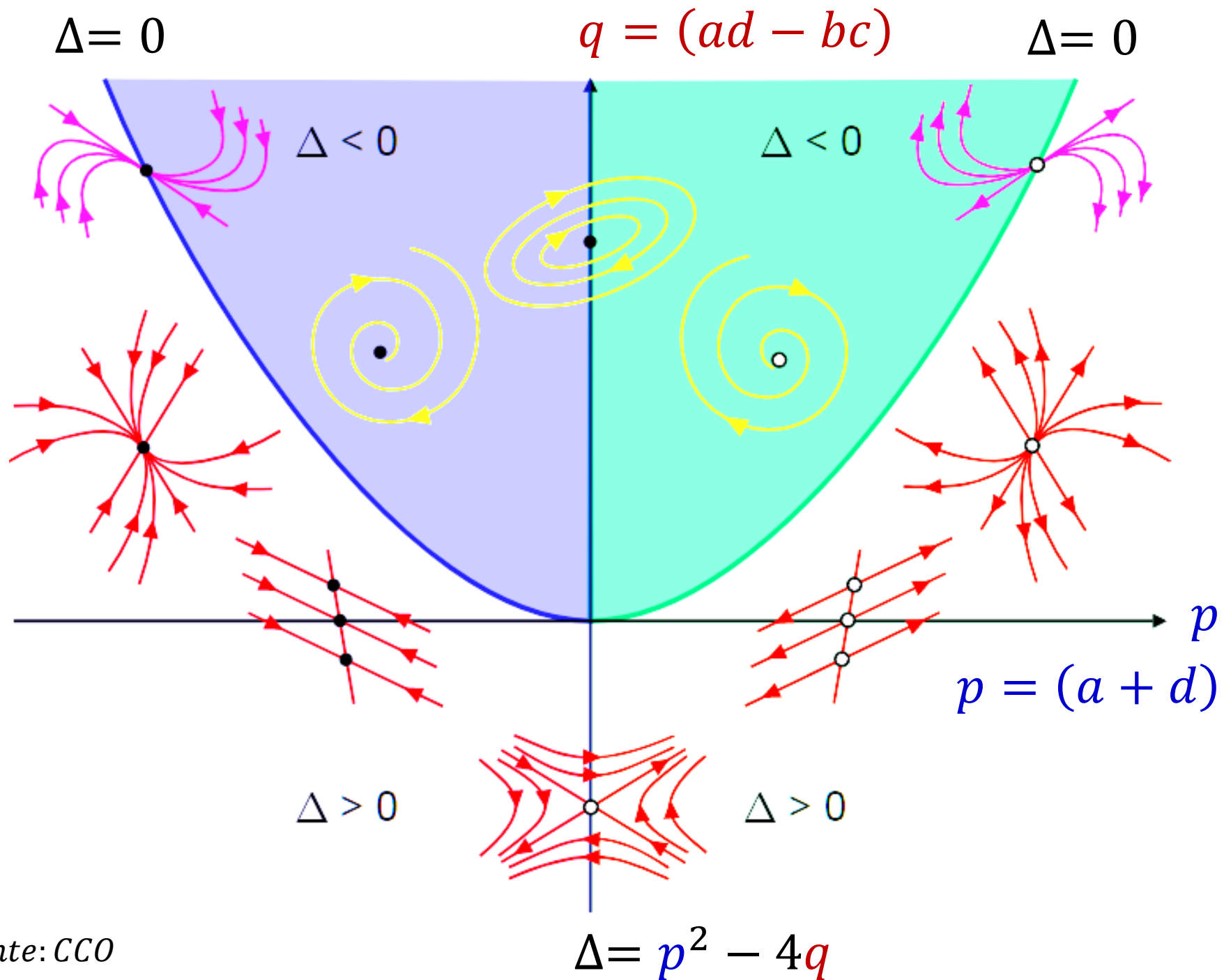
# Resumo

- Para sistemas  $2 \times 2$  com coeficientes constante, há quatro casos principais:
1. Autovalores reais com  **sinais opostos**,  
 $\vec{X} = \mathbf{0}$  é um ponto de sela.
  2. Autovalores reais com o  **mesmo sinal**,  
 $\vec{X} = \mathbf{0}$  é um nó.
  3.  **Autovalores complexos** com parte real  $\neq$  zero,  
 $\vec{X} = \mathbf{0}$  é um ponto espiral.
  4. Autovalores repetidos,  
 $\vec{X} = \mathbf{0}$  é um nó impróprio.

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - rI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - r & b \\ c & d - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 - \underbrace{(a + d)}_{p \text{ Traço de A}} r + \underbrace{(ad - bc)}_{q \text{ det A}} = 0$$

Autovalores	Sinais	Tipo	Estabilidade	
Distintos	Opostos	Sela	Instável	
	positivos	Nó	Instável	
	negativos	Nó	Assint. estável	
Repetidos	positivos	Nó	Instável	
	negativos	Nó	Assint. Estável	
Complexo $r = \lambda \pm i\mu$	$\lambda > 0$	Espiral	Instável	
	$\lambda < 0$	Espiral	Assint. estável	
	$\lambda = 0$	Centro	Estável	



fonte: CCO

## Para depois desta aula:

- Estudar seções 7.5, 7.6 e 7.8 do livro texto.
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 7.5, 7.6 e 7.8.

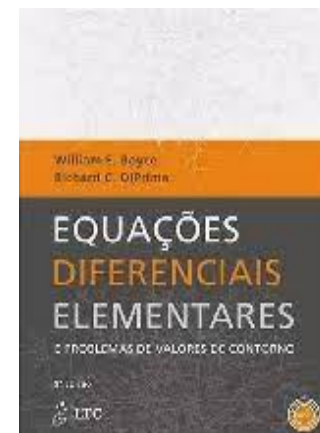
## Próxima aula:

- Resolução de sistemas não homogêneos.

# Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios  
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.