

# Equações diferenciais

Equações diferenciais  
ordinárias

Aula 12

Modelos de 1<sup>a</sup> ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

[Henrique.faria@unesp.br](mailto:Henrique.faria@unesp.br)

# Tópicos desta aula

1. Modelagem com eq. dif. de 1<sup>a</sup> ordem.
2. Etapas de construção.
3. Exemplo da mistura.
4. Exercício proposto.

## Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.

# Modelagem com Eq. Dif. de 1<sup>a</sup> ordem



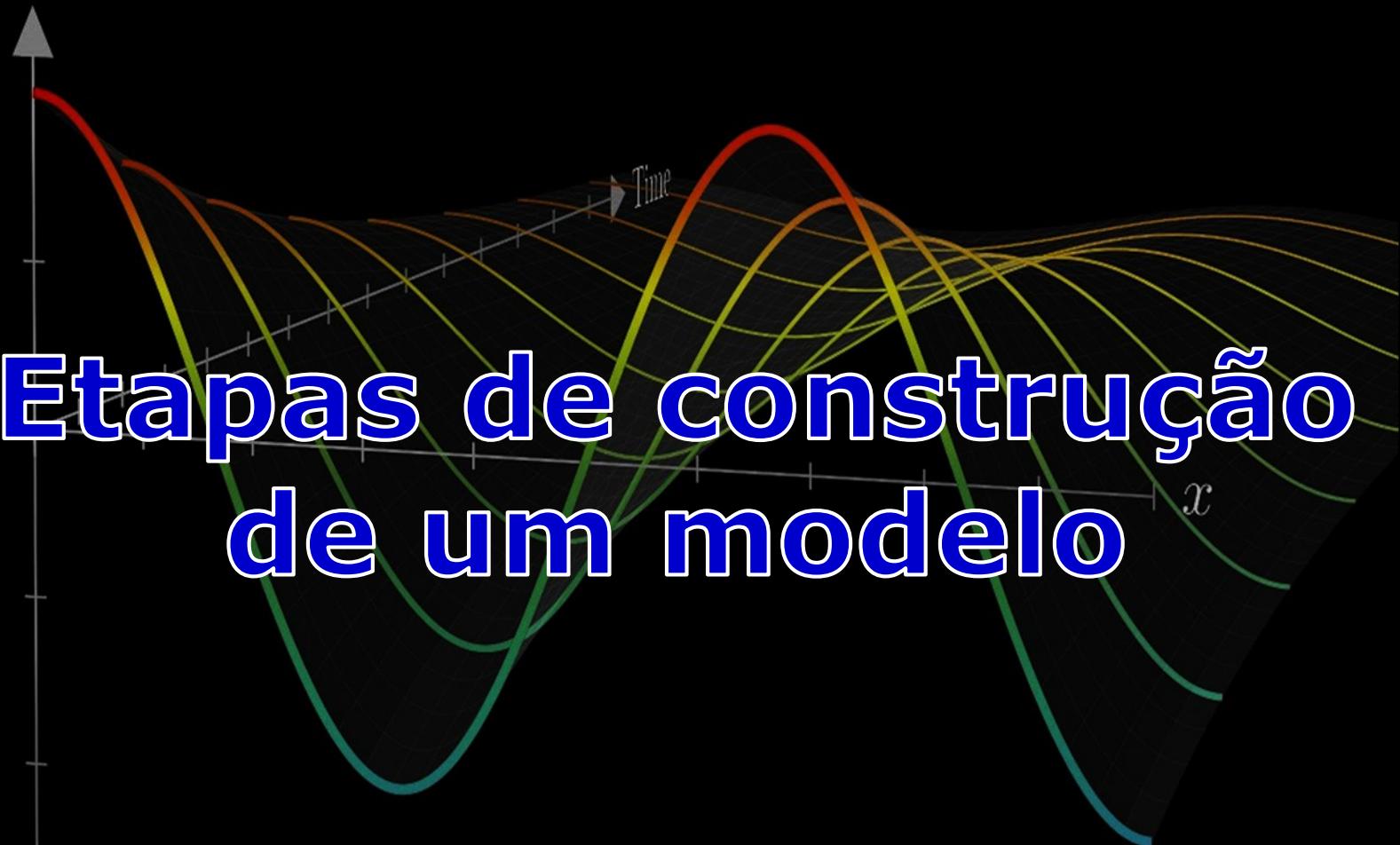
# Modelagem com Eq. Dif. de 1<sup>a</sup> ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.

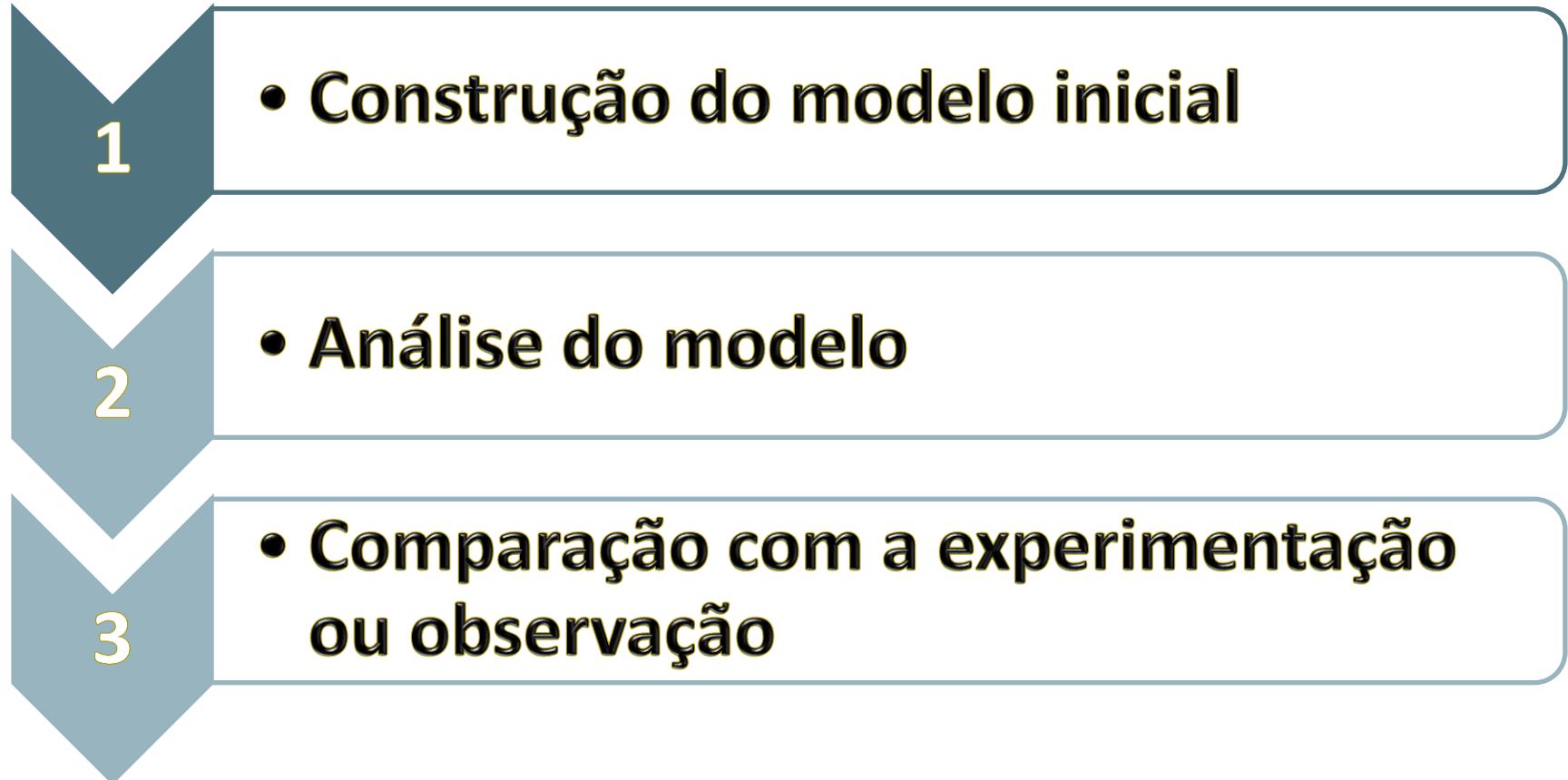
# Modelagem com Eq. Dif. de 1<sup>a</sup> ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.
- Independentemente do campo de aplicação, existem três etapas sempre presentes na modelagem matemática.
- A seguir serão relacionados os principais itens dessas etapas fundamentais da modelagem.

# **Etapas de construção de um modelo**



# Etapas de construção de um modelo



# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.
4. Algumas vezes a modelagem envolve substituir conceitualmente um processo discreto por um processo contínuo.

## Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.

## Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.

## Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.

## Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.

## Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.
5. O jogo entre a compreensão do fenômeno e o conhecimento das limitações técnicas é característico da Matemática Aplicada.

# Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

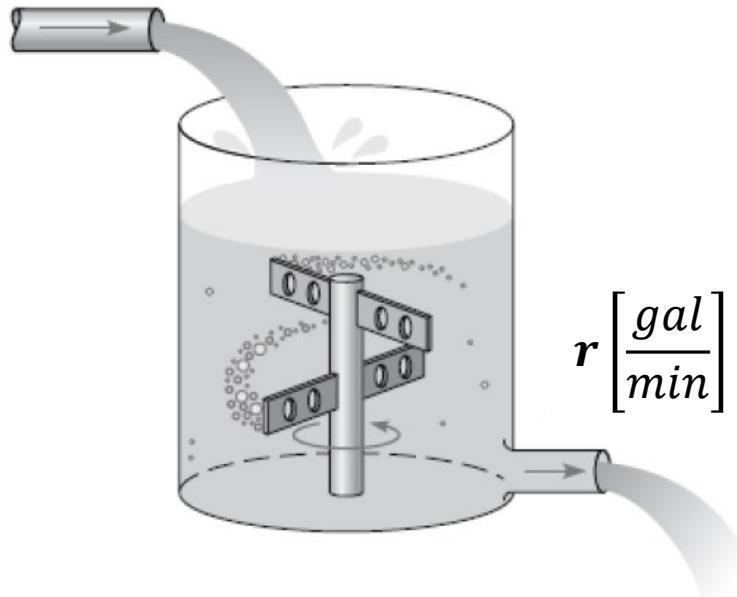
1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.
5. Caso as previsões do modelo estejam inconsistentes com o fenômeno ele deve ser corrigido ou refeito.

# Exemplo da mistura



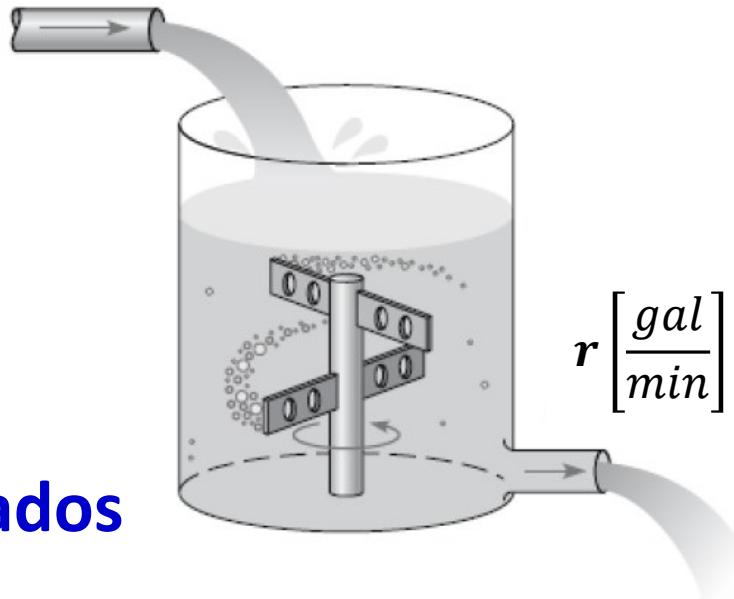
## Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[ \frac{gal}{min} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$



## Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[ \frac{gal}{min} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$

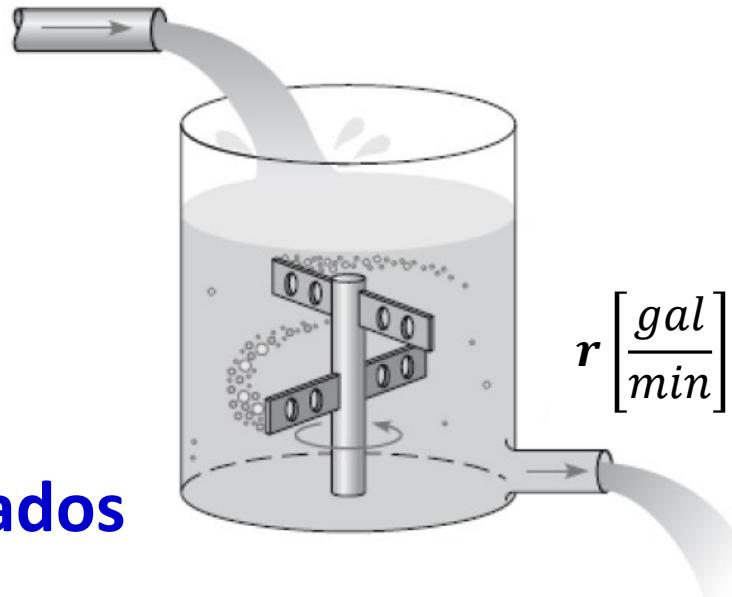


### Dados

- ✓ Em  $t = 0$ , um tanque contém  $Q_0$  libras de sal em 100 galões de água.
- ✓  $r$ : galões por minuto.
- ✓  $Q(t)$ : quantidade de sal?

## Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$



### Dados

- ✓ Em  $t = 0$ , um tanque contém  $Q_o$  libras de sal em 100 galões de água.
- ✓  $r$ : galões por minuto.
- ✓  $Q(t)$ : quantidade de sal?

### Questões

- Escrever o PVI.
- Encontrar a expressão para  $Q(t)$ .
- Qual a quantidade limite  $Q_L$  quando  $t \rightarrow \infty$ .
- Se  $r = 3$  e  $Q_o = 2Q_L$  encontrar  $T$  para o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .
- Determinar  $r$  para  $t = 45$  min.

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

$$tx \text{ ent} = \frac{1}{4}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right]$$

P/ cada gal r há  
¼ lb sal

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

$$tx \text{ ent} = \frac{1}{4}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[ \frac{lb}{min} \right]$$

P/ cada gal r há  
¼ lb sal

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

$$tx \text{ ent} = \frac{1}{4}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[ \frac{lb}{min} \right] \quad \begin{matrix} P/ \text{cada gal r há} \\ \frac{1}{4} \text{ lb sal} \end{matrix}$$

$$tx \text{ saída} = \frac{Q}{100}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right]$$

*Q que sai é diluída em 100 gal*

# Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
  - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

$$tx \text{ ent} = \frac{1}{4}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[ \frac{lb}{min} \right] \quad \begin{matrix} P/ \text{cada gal r há} \\ \frac{1}{4} \text{ lb sal} \end{matrix}$$

$$tx \text{ saída} = \frac{Q}{100}r \left[ \frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{rQ}{100} \left[ \frac{lb}{min} \right] \quad \begin{matrix} Q \text{ que sai é} \\ \text{diluída em} \\ 100 \text{ gal} \end{matrix}$$

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$

$$Q(o) = Q_o$$

*(condição inicial)*

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

# Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

# Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
  - Eq. Dif. ordinária de 1<sup>a</sup> ordem.

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

# Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
  - Eq. Dif. ordinária de 1<sup>a</sup> ordem.
  - Resolução pelo método do fator integrante.

# Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: 
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$
 
$$Q(o) = Q_o \quad (\text{condição inicial})$$

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

# Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
  - Eq. Dif. ordinária de 1<sup>a</sup> ordem.
  - Resolução pelo método do fator integrante.
  - $Q(t)$  é a função incógnita e  $p(t) = r/100$ .

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \frac{1}{r/100} e^{\frac{rt}{100}} + C$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \frac{1}{r/100} e^{\frac{rt}{100}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = 25e^{\frac{rt}{100}} + C$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:

- ✓ b) Expressão:

$$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:

- ✓ b) Expressão:

$$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Inserindo a condição inicial  $Q(0) = Q_o$ :

$$Q_o = 25 + C$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:

- ✓ b) Expressão:

$$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Inserindo a condição inicial  $Q(0) = Q_o$ :

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:

- ✓ b) Expressão:

$$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Inserindo a condição inicial  $Q(0) = Q_o$ :

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

- ✓ Voltando o valor da constante  $C$  na expressão de  $Q$ :

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:

- ✓ b) Expressão:

$$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Inserindo a condição inicial  $Q(0) = Q_o$ :

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

- ✓ Voltando o valor da constante  $C$  na expressão de  $Q$ :

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$Q = 25(1 - e^{-\frac{rt}{100}}) + Q_o e^{-\frac{rt}{100}}$$

*solução particular  
do PVI*

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

## Etapa 3 – Comparaçao com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

- ✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 [lb]$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 [lb]$

- ✓ Valor do tempo  $T$  para  $Q(t)$  a 2% de  $Q_L$ :

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

- ✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 [lb]$

- ✓ Valor do tempo  $T$  para  $Q(t)$  a 2% de  $Q_L$ :

$$r = 3 \text{ gal/min,}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

- ✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo  $T$  para  $Q(t)$  a 2% de  $Q_L$ :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

- ✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo  $T$  para  $Q(t)$  a 2% de  $Q_L$ :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb}, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite  $Q_L$  para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$~~

- ✓ c) Quantidade sal:  $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo  $T$  para  $Q(t)$  a 2% de  $Q_L$ :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb}, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

$$Q = 25 + (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$25 + 0,02 \times 25 = 25 + 25e^{-0,03T}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

~~$$25 + 0,02 \times 25 = 25 + 25e^{-0,03T}$$~~

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

$$T = \frac{\ln 0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

$$T = \frac{\ln 0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4 \Rightarrow T = 130,4 \text{ [min.]}$$

✓ d) tempo: 2% de  $Q_L$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

## Etapa 3 – Comparaçao com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

## Etapa 3 – Comparaçāo com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,45r}$$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões ( $r$ ) para  $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de  $Q_L$ .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min,} \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb,}$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,45r} \Rightarrow r = 8,69 \text{ [gal/min]}$$

✓ e) Galões p/  $t = 45 \text{ min}$

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.

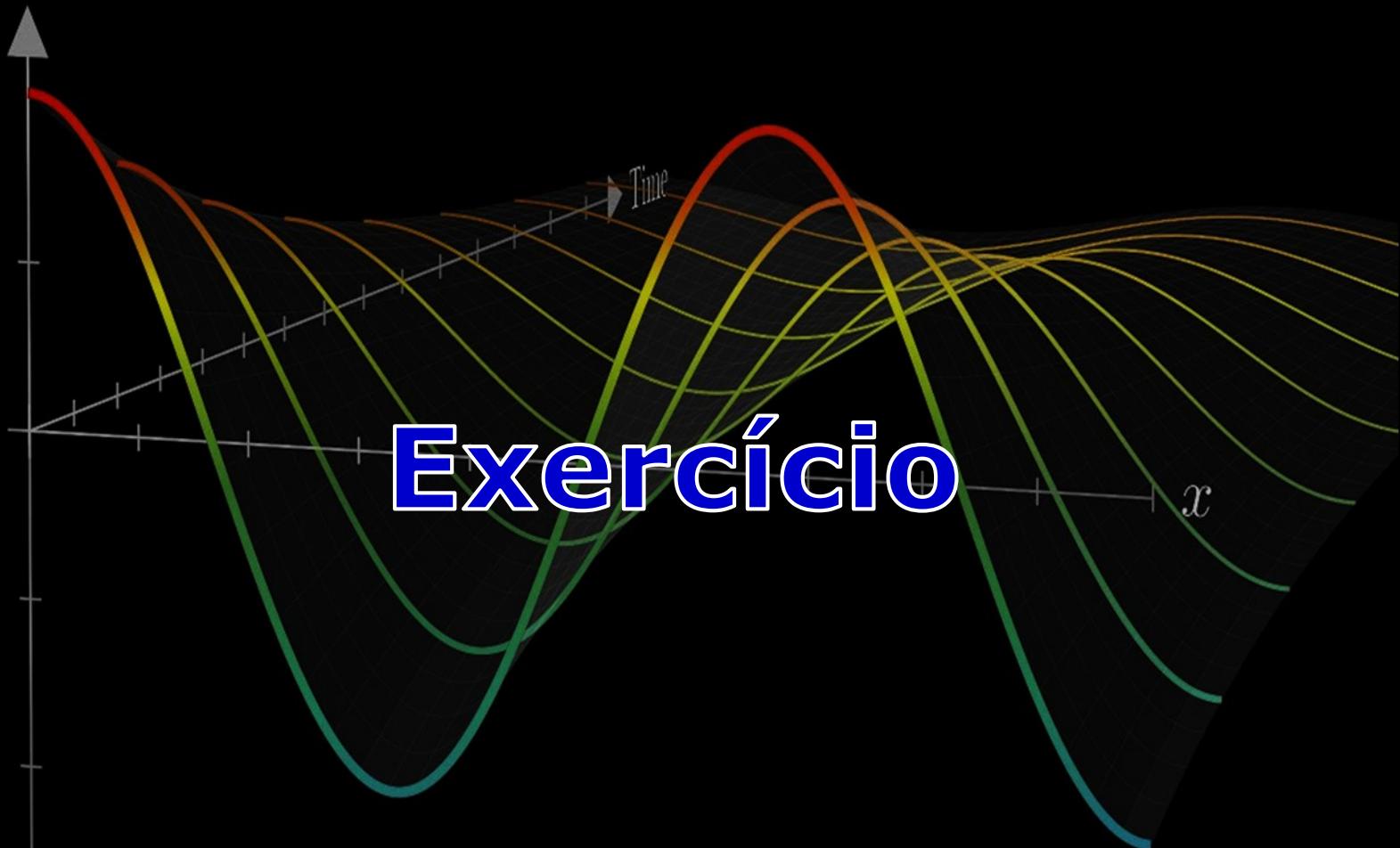
## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita ( $Q$ ) varia no tempo.

## Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita ( $Q$ ) varia no tempo.
- ✓ O parâmetro ( $r$ ) condição inicial ( $Q_0$ ) são ajustados de acordo com aplicação a ser modelada.

# Exercício



## Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente,  $10^7$  gal de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de  $5 \cdot 10^6$  de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração  $\gamma(t)$  do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo  $t$  de acordo com a expressão  $\gamma(t) = 2 + \operatorname{sen}(2t)$  g/gal.

## Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente,  $10^7$  gal de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de  $5 \cdot 10^6$  de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração  $\gamma(t)$  do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo  $t$  de acordo com a expressão  $\gamma(t) = 2 + \operatorname{sen}(2t)$  g/gal.

Pede-se

- Construa um modelo matemático desse processo de fluxo.
- Determine a quantidade  $Q(t)$  de produto químico na lagoa em qualquer instante. Sugestão: transforme  $q[t] = 10^6 Q[g]$ .
- Desenhe o gráfico da solução particular.
- Descreva o efeito da concentração do produto químico na água da lagoa para  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 10$  e  $t \rightarrow \infty$ .

## Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.3 do Boyce.

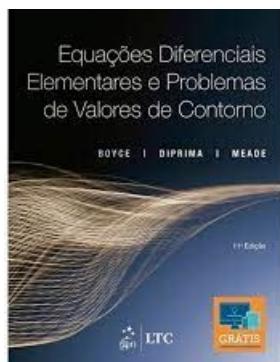
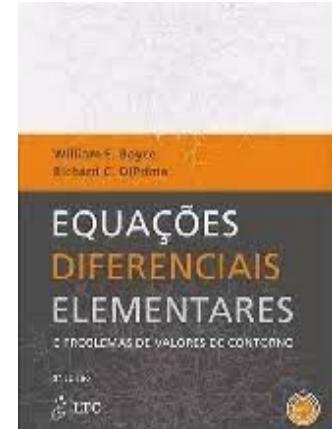
## Próxima aula:

- Teoremas de existência e unicidade.
- Equações exatas e fator integrante.

# Bibliografia

**1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios  
com base na 9<sup>a</sup> ed. 



**BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.