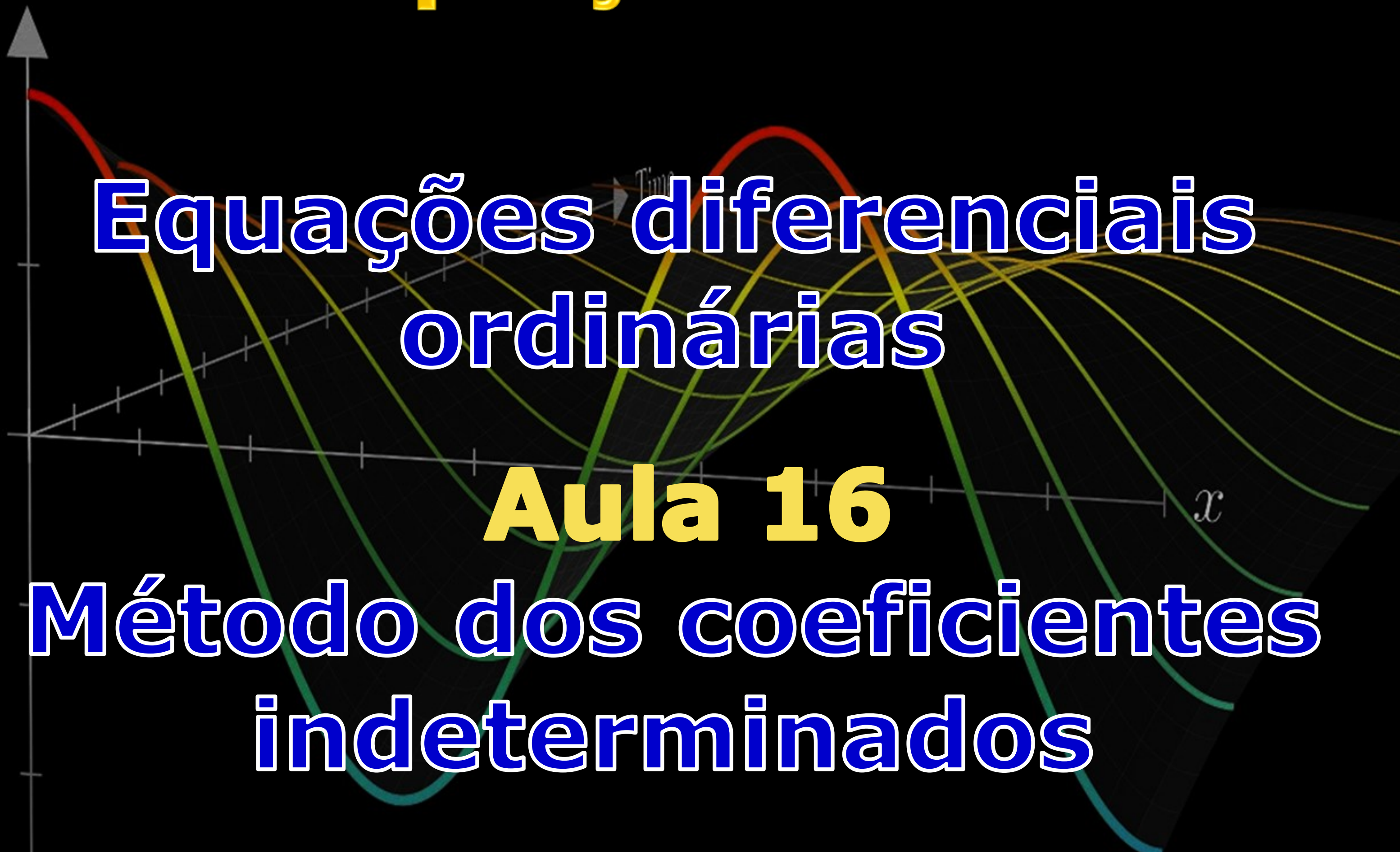
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 16

Método dos coeficientes indeterminados

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

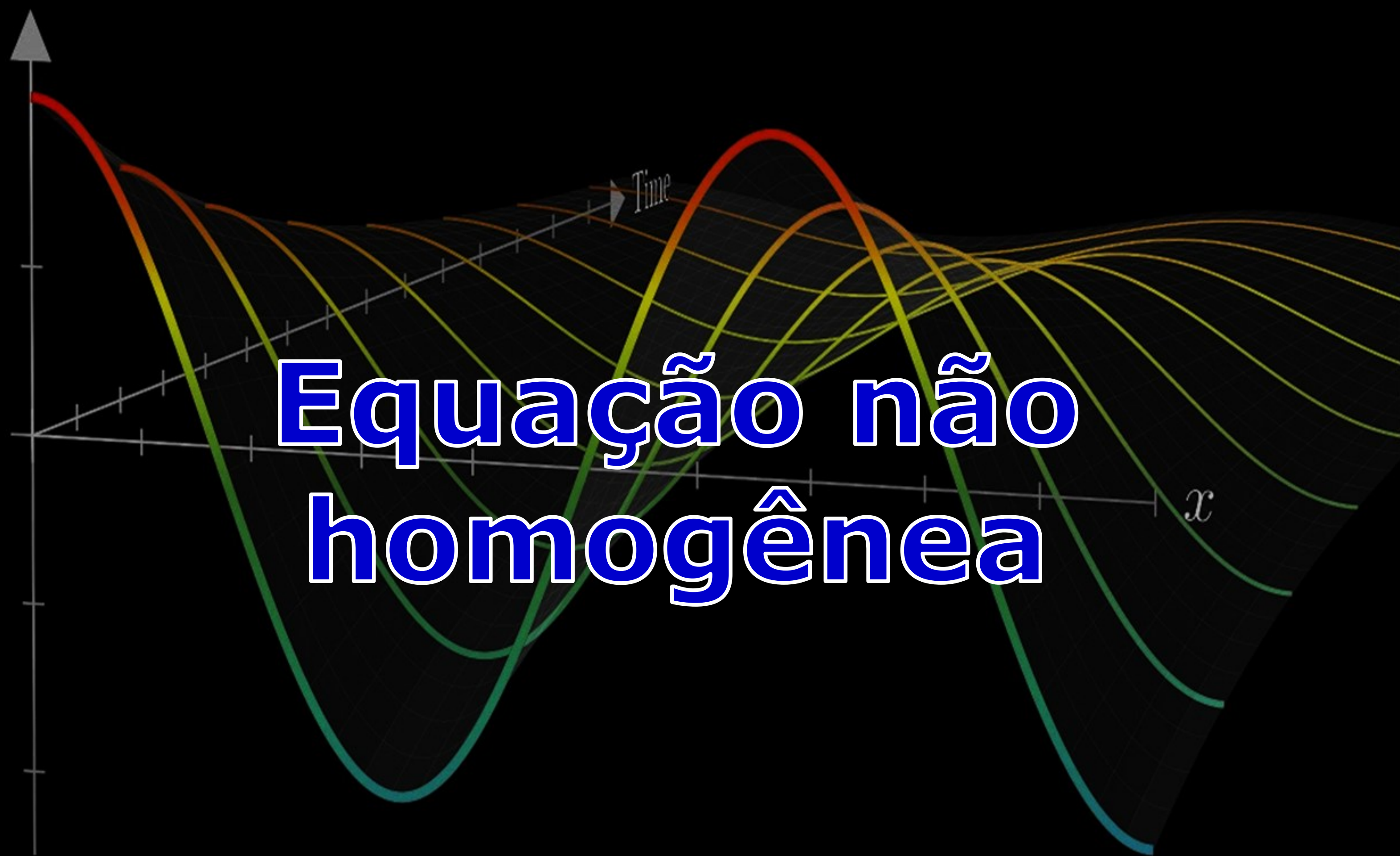
Tópicos desta aula

1. Equação não homogênea.
2. Método dos coeficientes indeterminados.
3. Exemplos.
4. Exercícios.

Pré-requisitos

- Equações algébricas.

Equação não homogênea



Teorema 3.5.2 (EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA)

Seja a equação não homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

Teorema 3.5.2 (EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA)

Seja a equação não homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

A solução geral desta equação pode ser escrita na forma:

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Teorema 3.5.2 (EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA)

Seja a equação não homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

A solução geral desta equação pode ser escrita na forma:

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t)$$

Onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada; c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e y_p é uma solução particular da equação não homogênea.

Teorema 3.5.2 (EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA)

Seja a equação não homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

A solução geral desta equação pode ser escrita na forma:

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada; c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e y_p é uma solução particular da equação não homogênea.

O teorema afirma que para resolver a eq. deve-se:

- *Encontrar o conjunto solução da homogênea.*
- *Encontrar uma solução particular da não homogênea.*
- *Somar as duas funções encontradas.*

Equação não homogênea

- Discutimos anteriormente como solucionar a eq. dif. homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes.

Equação não homogênea

- Discutimos anteriormente como solucionar a eq. dif. homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes.
- Para equação a coeficientes não constantes há possibilidade de utilizar a redução de ordem para alguns casos.

Equação não homogênea

- Discutimos anteriormente como solucionar a eq. dif. homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes.
- Para equação a coeficientes não constantes há possibilidade de utilizar a redução de ordem para alguns casos.
- Então, será necessário desenvolver um método para encontrar a solução particular da não homogênea.

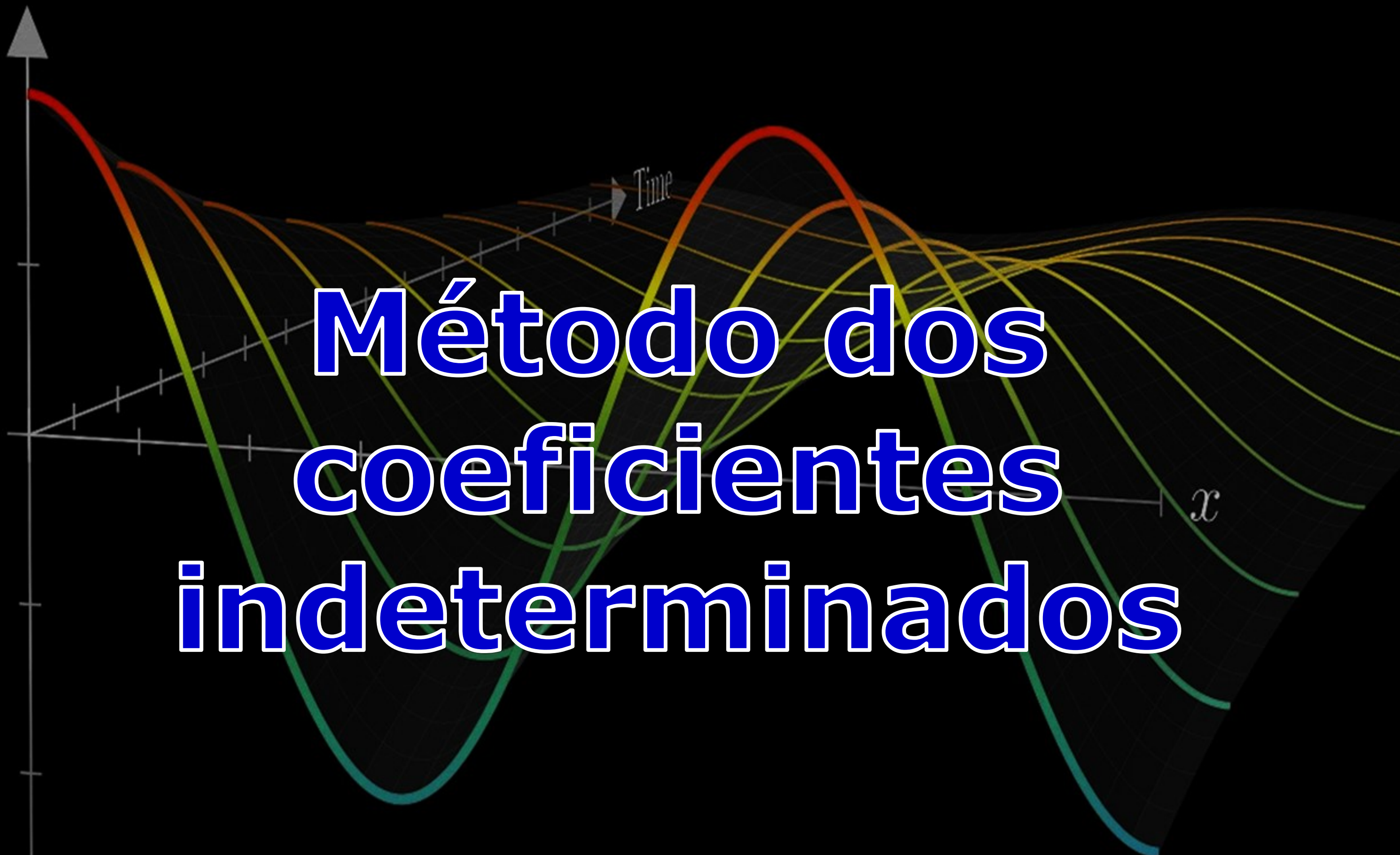
Equação não homogênea

- Discutimos anteriormente como solucionar a eq. dif. homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes.
- Para equação a coeficientes não constantes há possibilidade de utilizar a redução de ordem para alguns casos.
- Então, será necessário desenvolver um método para encontrar a solução particular da não homogênea.
- Há duas possibilidades:
  1. Método dos coeficientes indeterminados.
  2. Método da variação dos parâmetros.

Equação não homogênea

- Discutimos anteriormente como solucionar a eq. dif. homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes.
- Para equação a coeficientes não constantes há possibilidade de utilizar a redução de ordem para alguns casos.
- Então, será necessário desenvolver um método para encontrar a solução particular da não homogênea.
- Há duas possibilidades:
  1. Método dos coeficientes indeterminados.
  2. Método da variação dos parâmetros.
- Nesta aula veremos o primeiro método.

Método dos coeficientes indeterminados



Método dos coeficientes indeterminados

- Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

a, b, c: constantes

Método dos coeficientes indeterminados

- Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \qquad a, b, c\text{: constantes}$$

Etapas do método:

1. Encontrar a solução da eq. homogênea associada;

Método dos coeficientes indeterminados

- Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \qquad a, b, c\text{: constantes}$$

Etapas do método:

1. Encontrar a solução da eq. homogênea associada;
2. Identificar $g(t)$: e, sen, cos, $polinômio$, etc;

Método dos coeficientes indeterminados

- Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \qquad a, b, c\text{: constantes}$$

Etapas do método:

1. Encontrar a solução da eq. homogênea associada;
2. Identificar $g(t)$: e, sen, cos, $polinômio$, etc;
3. Se $g(t)$ é uma soma de n parcelas formar n problemas da forma: $ay'' + by' + cy = g_i(t)$;

Método dos coeficientes indeterminados

- Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \qquad a, b, c: \text{ constantes}$$

Etapas do método:

1. Encontrar a solução da eq. homogênea associada;
2. Identificar $g(t)$: e, sen, cos, $polinômio$, etc;
3. Se $g(t)$ é uma soma de n parcelas formar n problemas da forma: $ay'' + by' + cy = g_i(t)$;
4. Para o i-ésimo problema supor uma solução particular y_{pi} apropriada. * Se houver duplicação da proposta com alguma sol. da homogênea, multiplicá-la por t, t^2, t^n até eliminar a linearidade.

Método dos coeficientes indeterminados

Etapas do método (continuação)

5. Encontrar a solução particular y_{pi} para cada problema. A soma destas soluções é a solução particular da eq. não homogênea;

Método dos coeficientes indeterminados

Etapas do método (continuação)

5. Encontrar a solução particular y_{pi} para cada problema. A soma destas soluções é a solução particular da eq. não homogênea;
6. Somar o conjunto solução da homogênea com a solução particular final;

Método dos coeficientes indeterminados

Etapas do método (continuação)

5. Encontrar a solução particular y_{pi} para cada problema. A soma destas soluções é a solução particular da eq. não homogênea;
6. Somar o conjunto solução da homogênea com a solução particular final;
7. Utilizar as condições iniciais para determinar as constantes do conjunto solução da homogênea.

Método dos coeficientes indeterminados

Etapas do método (continuação)

5. Encontrar a solução particular y_{pi} para cada problema. A soma destas soluções é a solução particular da eq. não homogênea;
6. Somar o conjunto solução da homogênea com a solução particular final;
7. Utilizar as condições iniciais para determinar as constantes do conjunto solução da homogênea.

Um sistema de álgebra computacional (SAC) pode auxiliar na execução dos cálculos intermediários.

Método dos coeficientes indeterminados

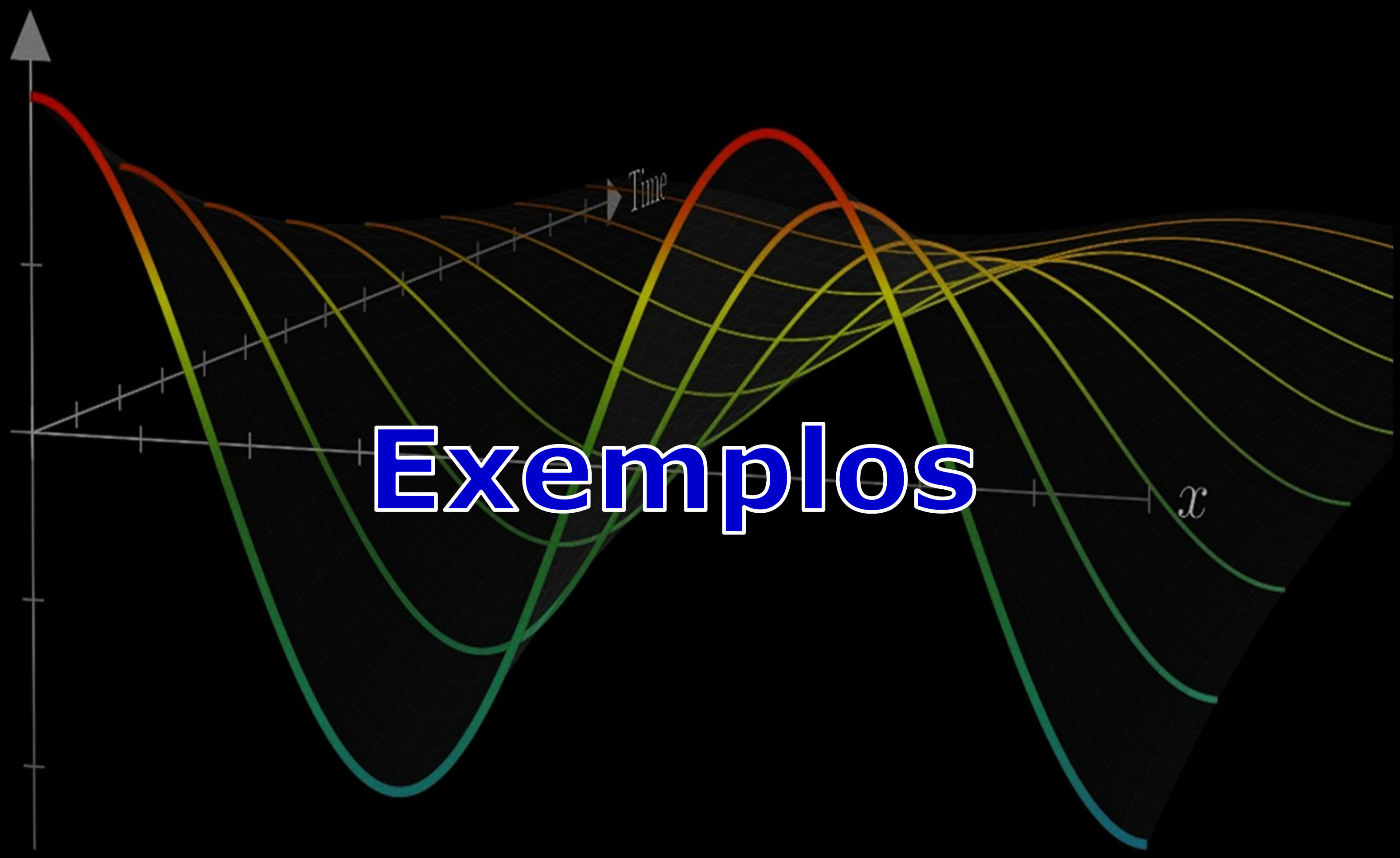
Tabela auxiliar para proposta de solução particular:

TABELA 3.5.1 A Solução Particular de $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s\big((A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + (B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\big)$

Notas: aqui, s é o menor inteiro não negativo ($s = 0$, 1 ou 2) que garantirá que nenhuma parcela de $Y_i(t)$ é uma solução da equação homogênea associada.

Exemplos



Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{2t}$, $y_p' = 2\mathrm{A}e^{2t}$, $y_p'' = 4\mathrm{A}e^{2t}$

Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{2t}$, $y_p' = 2\mathrm{A}e^{2t}$, $y_p'' = 4\mathrm{A}e^{2t}$
- ✓ Substituindo a proposta na eq. dif.:

$$4\mathrm{A}e^{2t} - 3\left(2\mathrm{A}e^{2t}\right) - 4\mathrm{A}e^{2t} = 3e^{2t}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{2t}$, $y_p' = 2\mathrm{A}e^{2t}$, $y_p'' = 4\mathrm{A}e^{2t}$
- ✓ Substituindo a proposta na eq. dif.:

$$4\mathrm{A}e^{2t} - 3\left(2\mathrm{A}e^{2t}\right) - 4\mathrm{A}e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$(4\mathrm{A} - 6A - 4\mathrm{A})e^{2t} = 3e^{2t}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{2t}$, $y_p' = 2\mathrm{A}e^{2t}$, $y_p'' = 4\mathrm{A}e^{2t}$
- ✓ Substituindo a proposta na eq. dif.:

$$4\mathrm{A}e^{2t} - 3\left(2\mathrm{A}e^{2t}\right) - 4\mathrm{A}e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$(4\mathrm{A} - 6A - 4\mathrm{A})e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$-6A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = -1/2$$

Exemplo 1: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{2t}, \;\; y_p' = 2\mathrm{A}e^{2t}, \qquad y_p'' = 4\mathrm{A}e^{2t}$
- ✓ Substituindo a proposta na eq. dif.:

$$4\mathrm{A}e^{2t} - 3\left(2\mathrm{A}e^{2t}\right) - 4\mathrm{A}e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$(4\mathrm{A} - 6A - 4\mathrm{A})e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$-6A = 3 \qquad \Rightarrow \qquad A = -1/2$$

- ✓ Logo a solução particular é: $\boxed{y_p = -\frac{1}{2}e^{2t},}$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{-t}$, $y_p' = -\mathrm{A}e^{-t}$, $y_p'' = +\mathrm{A}e^{-t}$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{-t}$, $y_p' = -\mathrm{A}e^{-t}$, $y_p'' = +\mathrm{A}e^{-t}$
- ✓ Esta proposta não satisfaz a e. dif. porque zera todos os termos e não é possível determinar A.

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{-t},\ y_p' = -\mathrm{A}e^{-t},\quad y_p'' = +\mathrm{A}e^{-t}$
- ✓ Esta proposta não satisfaz a e. dif. porque zera todos os termos e não é possível determinar A.
- ✓ Ao verificar a solução da homogênea, constata-se que a proposta é igual a uma das soluções:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-4) = 0$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{-t}$, $y_p' = -\mathrm{A}e^{-t}$, $y_p'' = +\mathrm{A}e^{-t}$
- ✓ Esta proposta não satisfaz a e. dif. porque zera todos os termos e não é possível determinar A.
- ✓ Ao verificar a solução da homogênea, constata-se que a proposta é igual a uma das soluções:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-4) = 0$$

$$r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{-t}, y_2 = C_2 e^{4t}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = \mathrm{A}e^{-t}$, $y_p' = -\mathrm{A}e^{-t}$, $y_p'' = +\mathrm{A}e^{-t}$
- ✓ Esta proposta não satisfaz a e. dif. porque zera todos os termos e não é possível determinar A.
- ✓ Ao verificar a solução da homogênea, constata-se que a proposta é igual a uma das soluções:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-4) = 0$$

$$r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{-t}, y_2 = C_2 e^{4t}$$

- ✓ Para remover a linearidade entre soluções, multiplica-se a proposta por t.

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}$,

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}$, $y_p' = \mathrm{A}e^{-t} - Ate^{-t}$,

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}$, $y_p' = \mathrm{A}e^{-t} - Ate^{-t}$,

$$y_p'' = -2\mathrm{A}e^{-t} + Ate^{-t}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}$, $y_p' = \mathrm{A}e^{-t} - Ate^{-t}$,

$$y_p'' = -2\mathrm{A}e^{-t} + Ate^{-t}$$

- ✓ Substituindo a nova proposta na eq. dif.:

$$(-2\mathrm{A} + At)e^{-t} - 3(A - At)e^{-t} - (4At)e^{-t} = 2e^{-t}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}$, $y_p' = \mathrm{A}e^{-t} - Ate^{-t}$,

$$y_p'' = -2\mathrm{A}e^{-t} + Ate^{-t}$$

- ✓ Substituindo a nova proposta na eq. dif.:

$$(-2\mathrm{A} + At)e^{-t} - 3(A - At)e^{-t} - (4At)e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-5\mathrm{A} + (A + 3A - 4A)t = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} = -2/5$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Nova proposta: $y_p = \mathrm{A}te^{-t}, \quad y_p' = \mathrm{A}e^{-t} - Ate^{-t},$

$$y_p'' = -2\mathrm{A}e^{-t} + Ate^{-t}$$

- ✓ Substituindo a nova proposta na eq. dif.:

$$(-2\mathrm{A} + At)e^{-t} - 3(A - At)e^{-t} - (4At)e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-5\mathrm{A} + (A + 3A - 4A)t = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} = -2/5$$

- ✓ Logo a solução particular é: $\boxed{y_p = -\frac{2}{5}te^{-t},}$

Exercícios

Exercícios Encontrar a solução particular da eq. dif.

a) $y'' + 2y' + 5y = 3\mathrm{sen}2\mathrm{t}$

b) $y'' + 9y' = t^2 e^{3t} + 6$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 3.5 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.5 do Boyce.

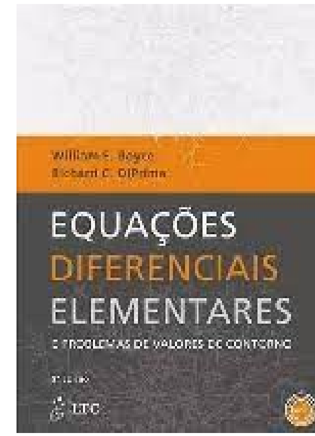
Próxima aula:

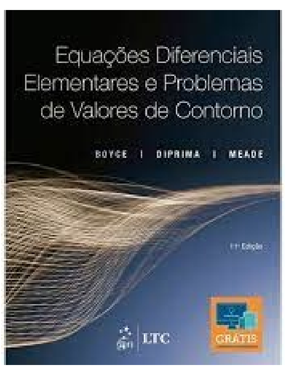
- Método da variação dos parâmetros.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.





BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.