

Cálculo Numérico

Integração numérica

Aula 01

Regra dos trapézios

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Integral como área.
2. Integração Indefinida.
3. Integração Aproximada.
4. Regra dos Trapézios para aproximação.

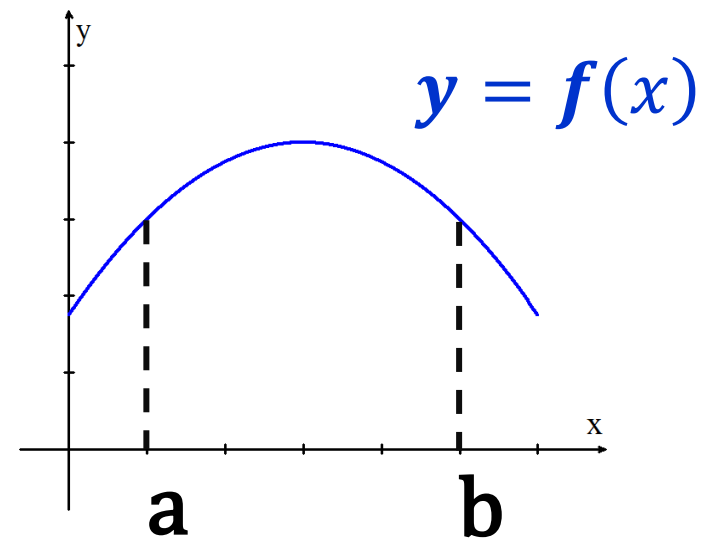
Pré-requisitos

Cálculo I: diferenciação e integração.



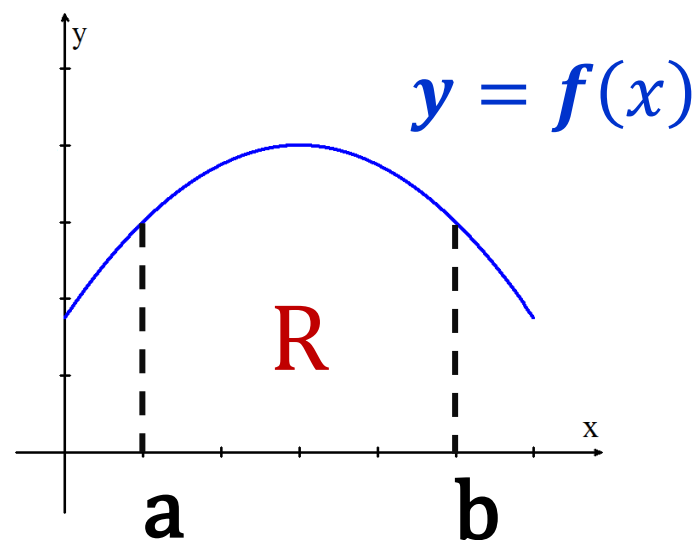
Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;



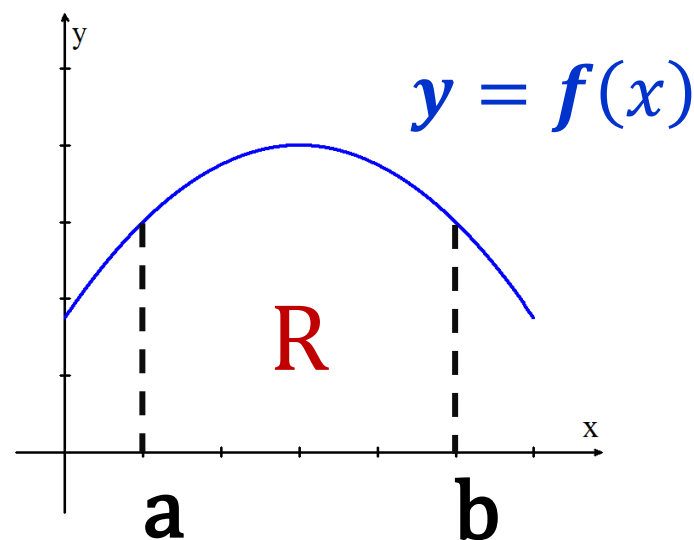
Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;
- A região delimitada pelo o eixo x , as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada como região R .



Definição de área como limite

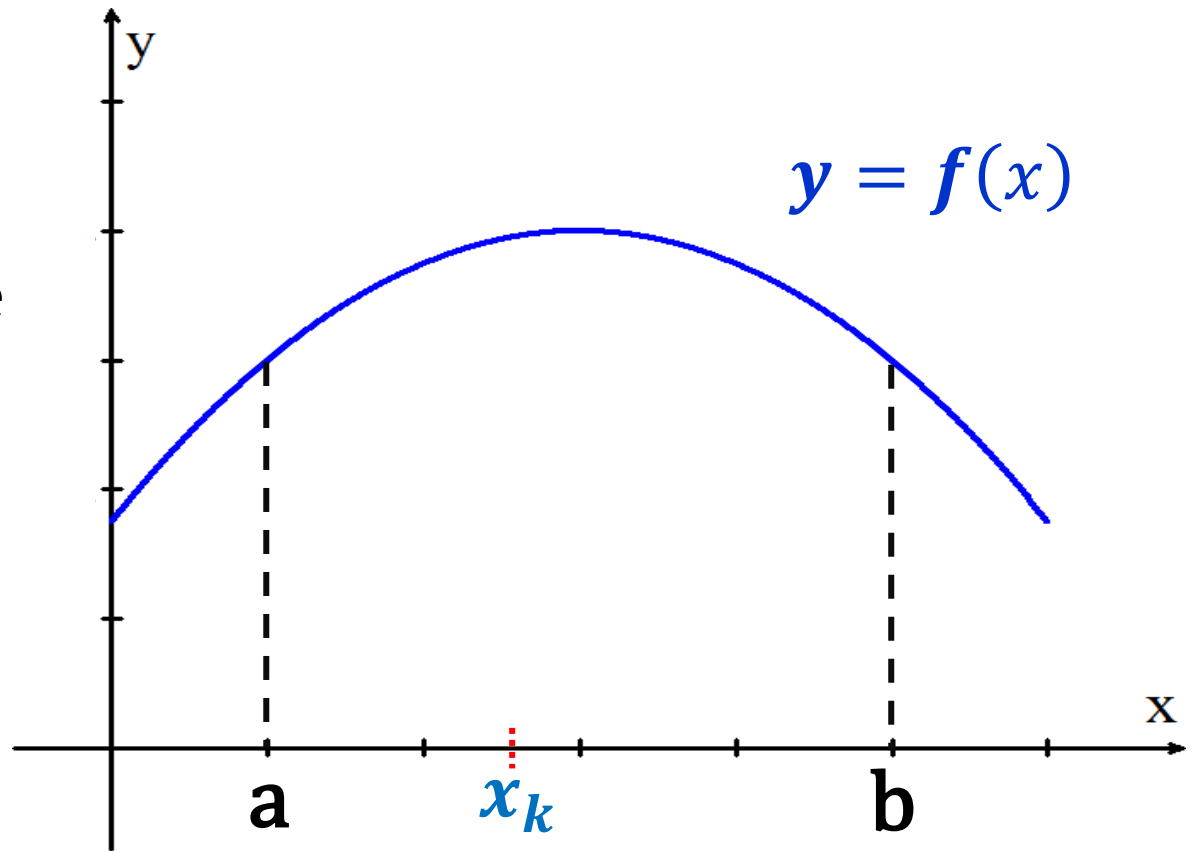
- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;
- A região delimitada pelo eixo x , as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada como região R .



Como podemos calcular a área R ?

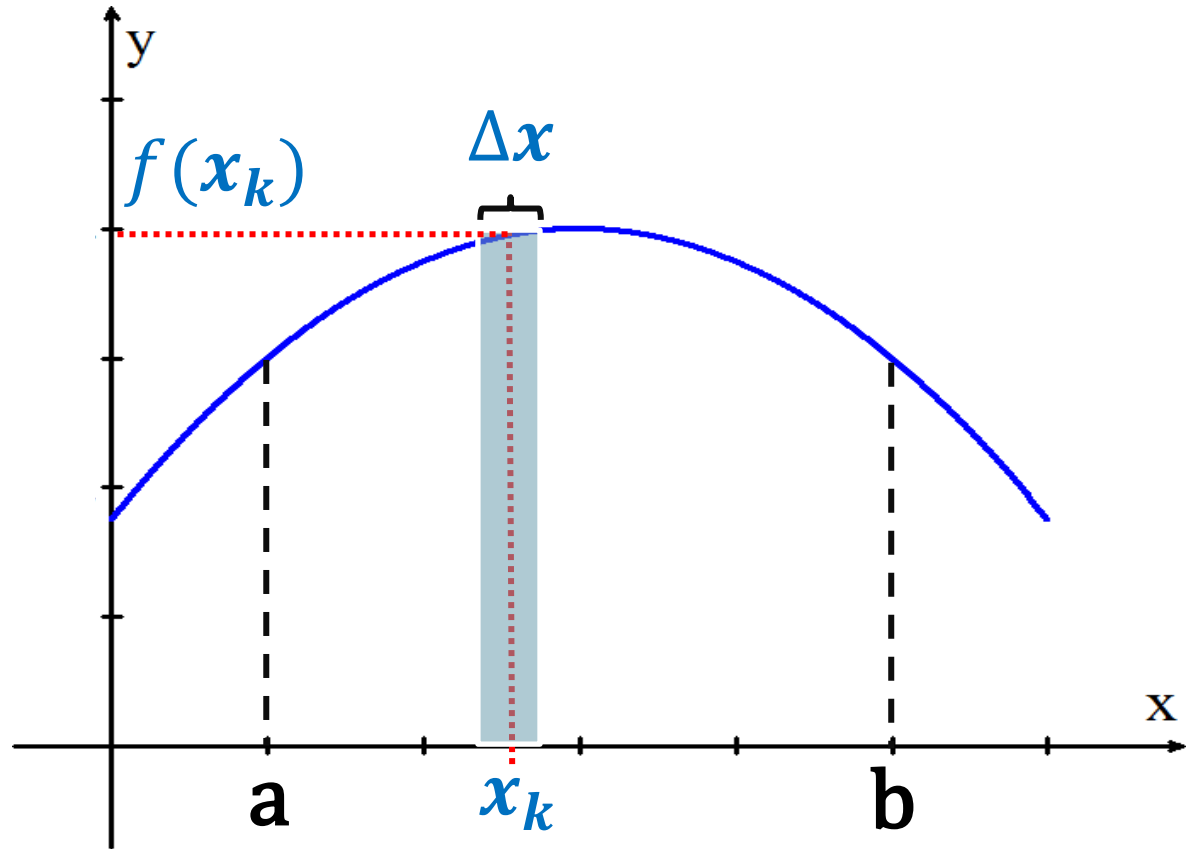
Definição de área como limite

- O intervalo $[a, b]$ será dividido em n subintervalos, de larguras iguais Δx .
- x_k é um ponto qualquer do subintervalo.



Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

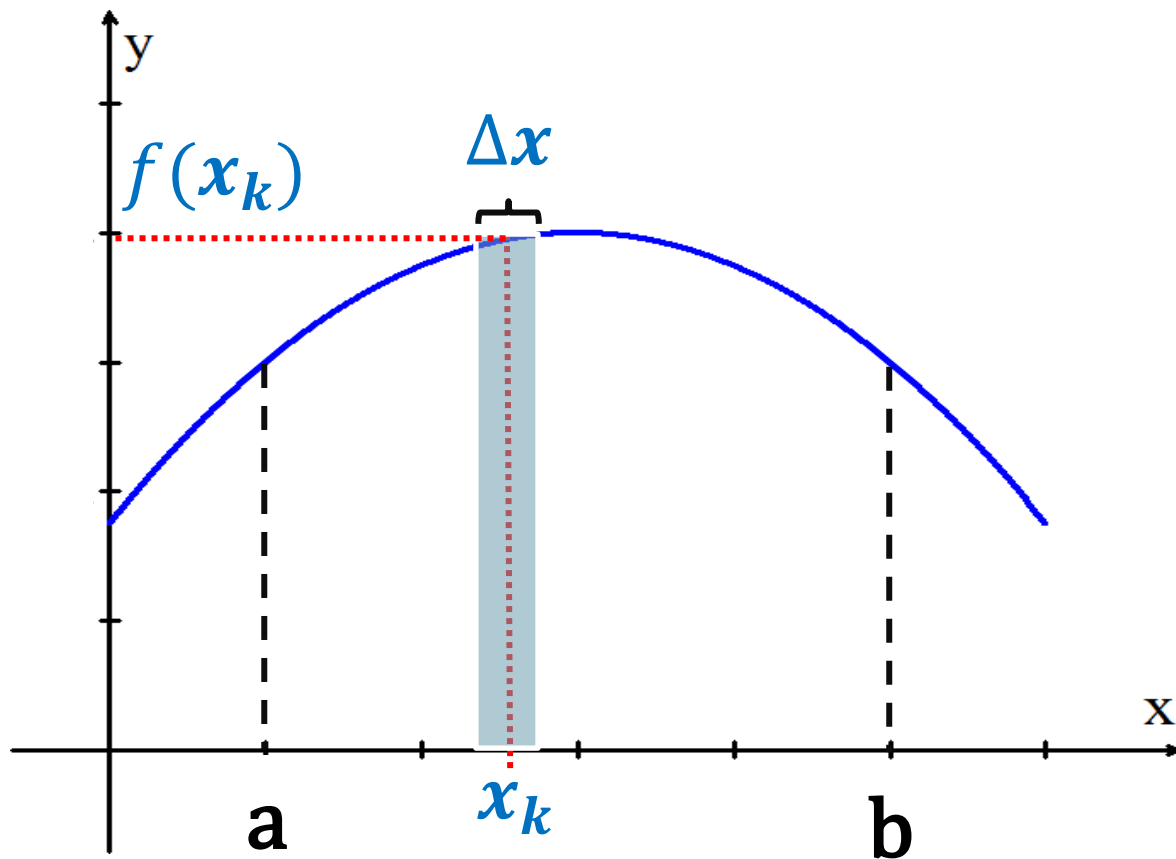


Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

- A área de cada retângulo será:

$$A_k = f(x_k)\Delta x$$

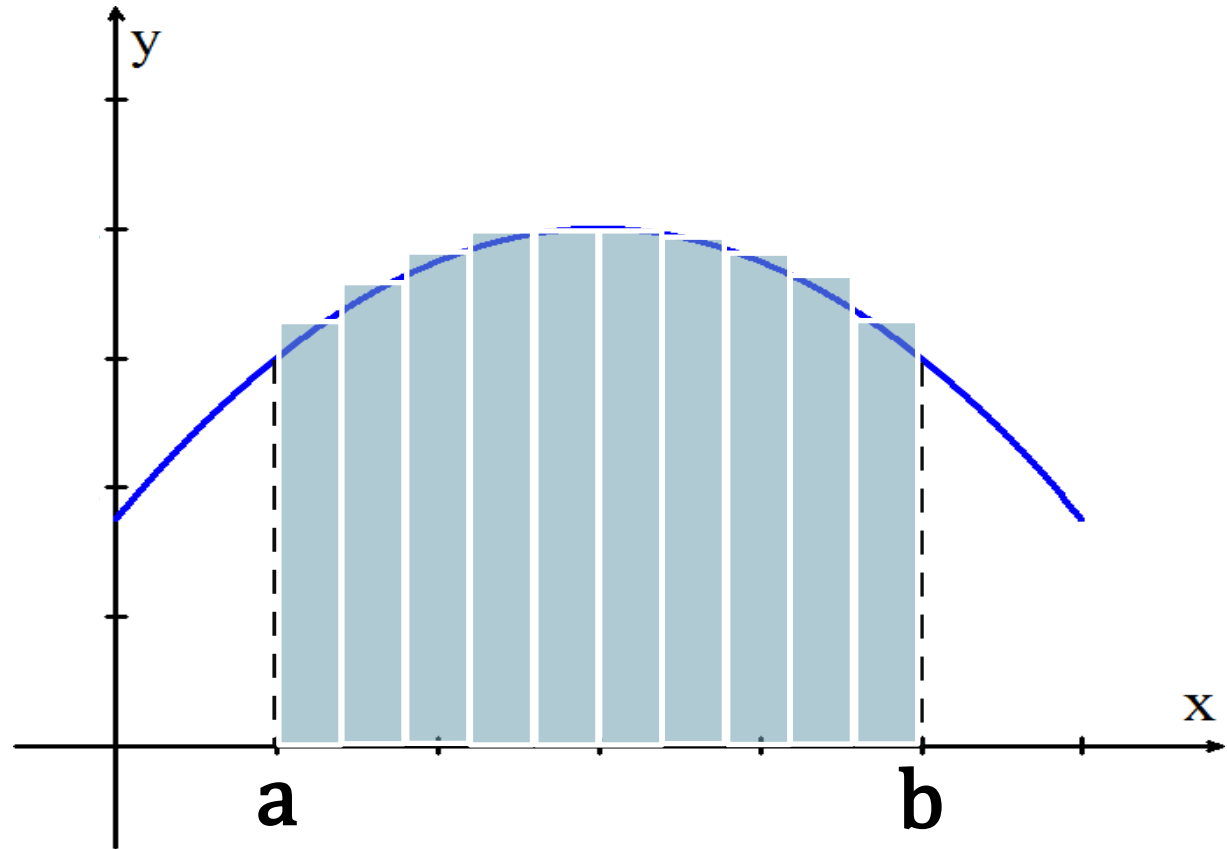


Definição de área como limite

- A soma das áreas dos n retângulos é o somatório:

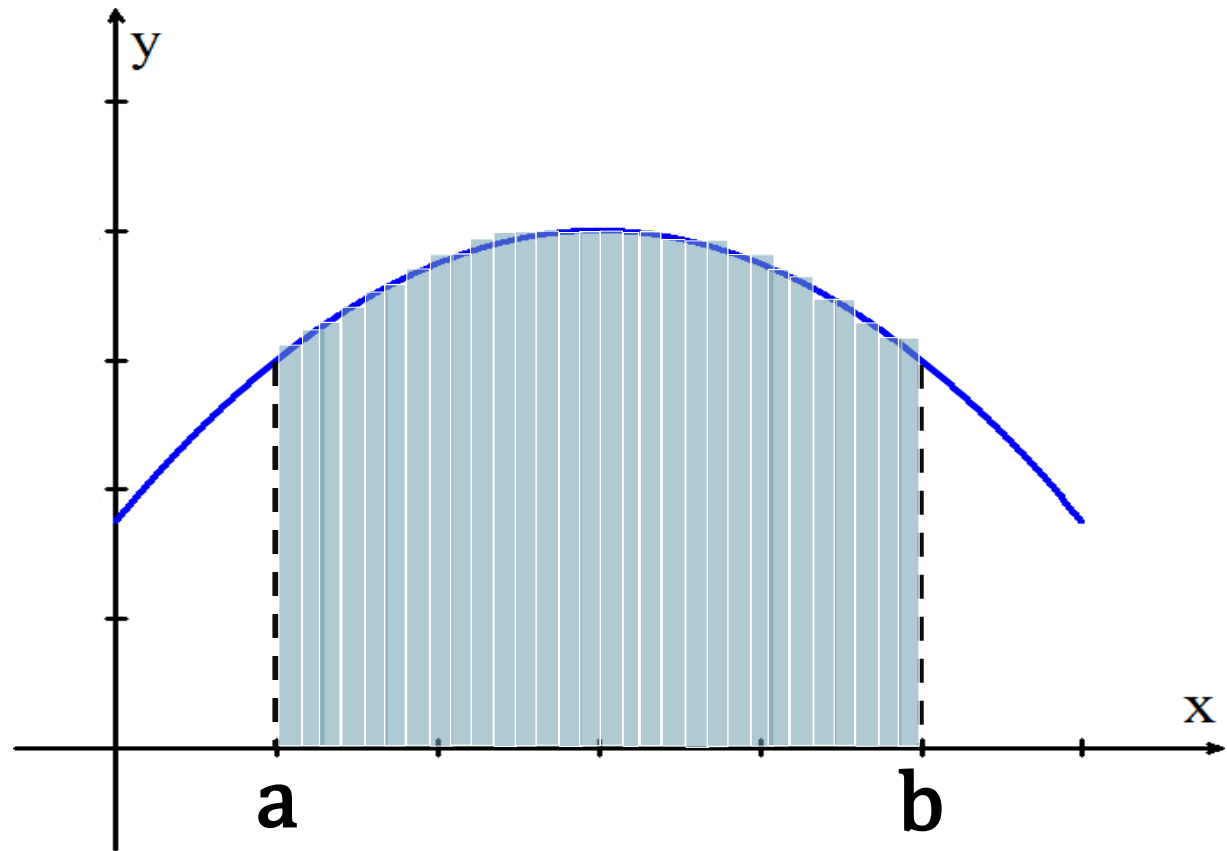
$$A_R \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

Chamada de
soma de
Riemann



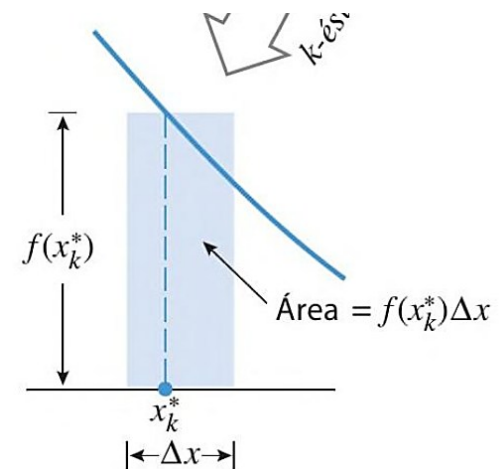
Definição de área como limite

- Quando n cresce para o infinito o somatório dos retângulos tende para a área A embaixo da curva no intervalo $[a, b]$.



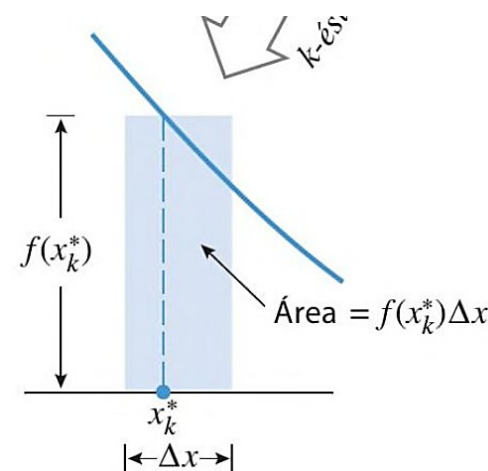
Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceito de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;
- Inicialmente, definimos a área utilizando uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos;



Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;
- Inicialmente, definimos a área utilizando uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos;
- Esse tipo de divisão é chamado partição regular.

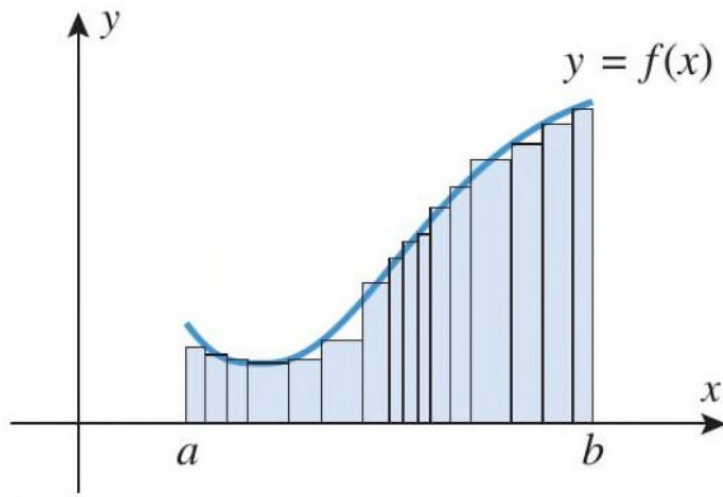


Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

Integral definida

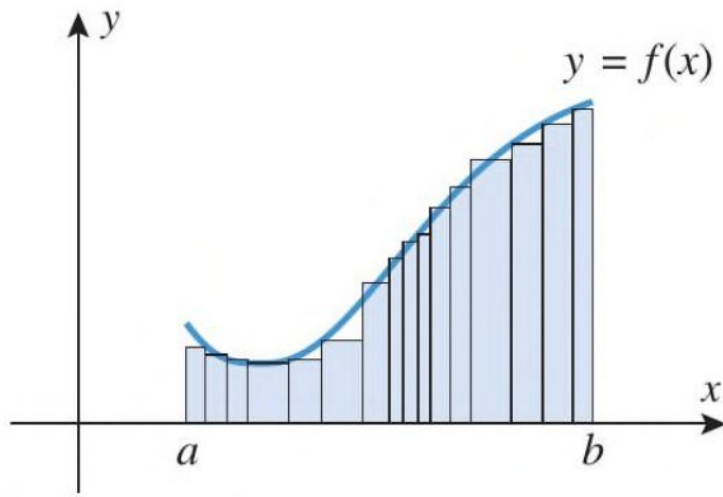
- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;



- Podemos generalizar, permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k ;

Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;



- Podemos generalizar, permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k ;

- Para isso trocaremos a expressão $n \rightarrow \infty$ por $\text{Max } \Delta x_k \rightarrow 0$, de modo a garantir que as larguras de todos subintervalos tendam a zero.

A integral definida

Então, a soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{\text{Max} \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Que é a definição de uma **Integral de uma função** contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{Max} \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

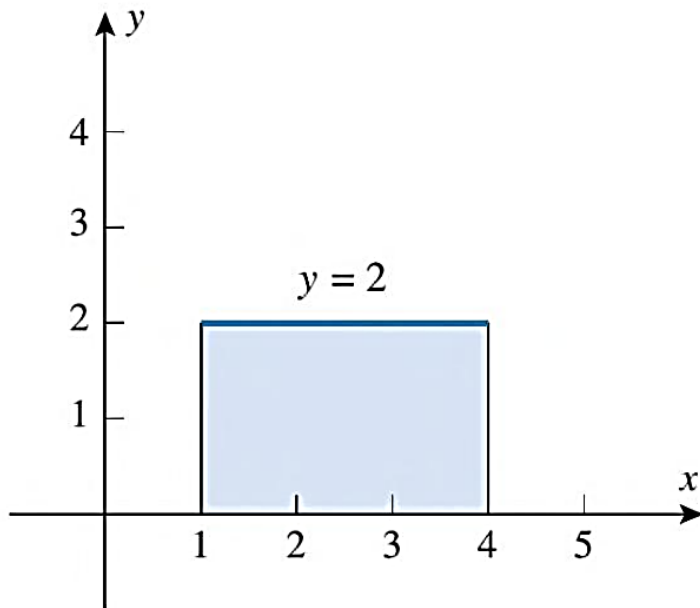
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2dx$

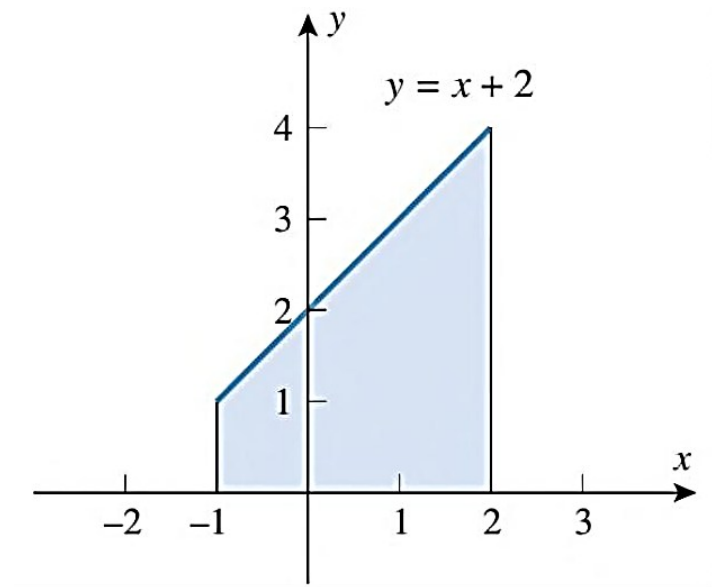
b. $\int_{-1}^2 (x + 2)dx$

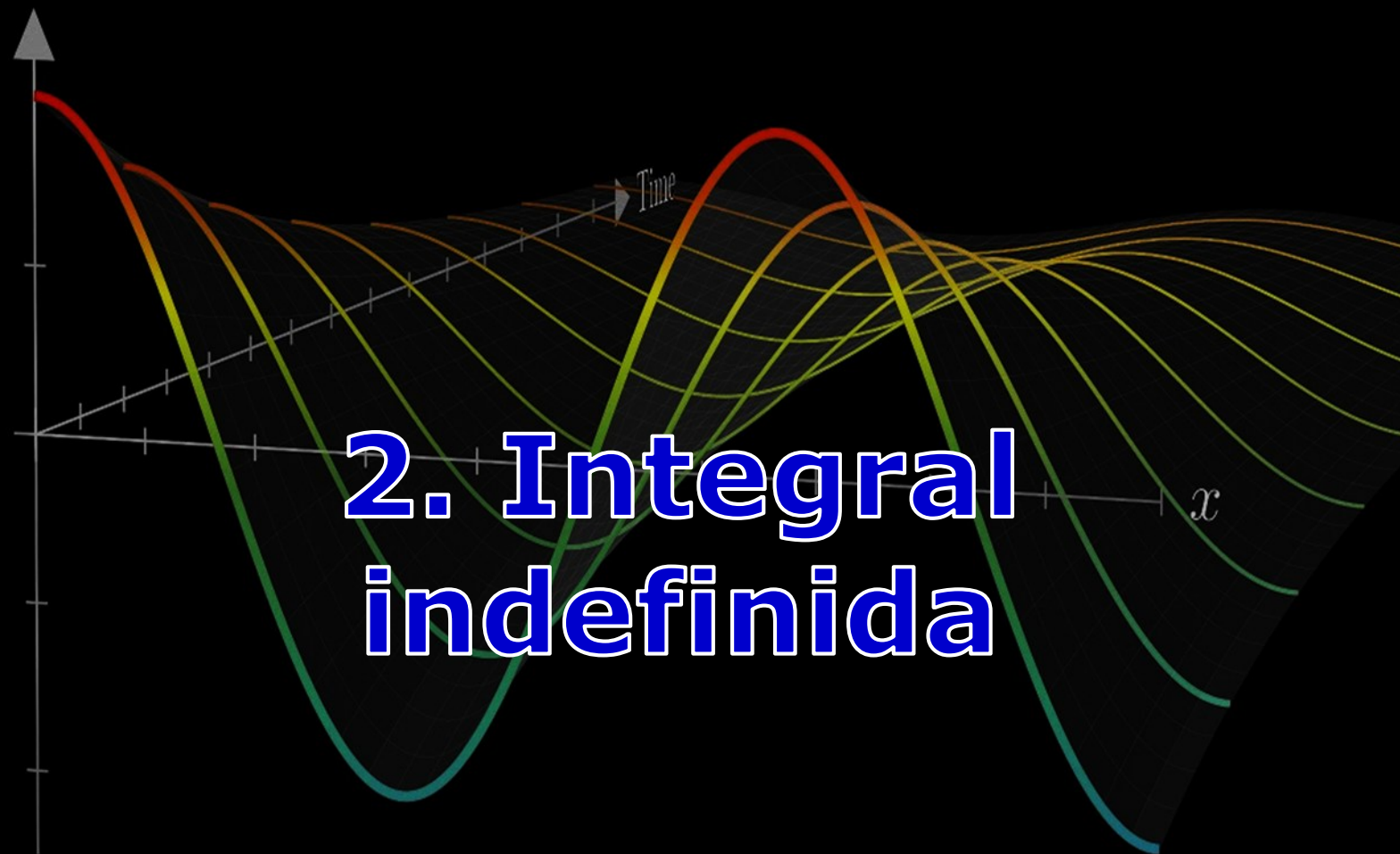
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2dx$



b. $\int_{-1}^2 (x + 2)dx$





Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:

Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:
- ✓ Essa relação é conhecida como o **Teorema Fundamental do Cálculo**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;

Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;
- Fornece a relação inversa entre a derivada e a integral;
- O teorema é apresentado em duas partes.

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

Teorema Fundamental do Cálculo

■ ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma *antiderivada* de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.3 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2*) Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \quad (11)$$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO

1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$

2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$

3. $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$

4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$

5. $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$

6. $\frac{d}{dx}[-\cotg x] = \operatorname{cosec}^2 x$

7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$

FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
8. $\frac{d}{dx} [-\operatorname{cosec} x] = \operatorname{cosec} x \cotg x$	$\int \operatorname{cosec} x \cotg x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
9. $\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
10. $\frac{d}{dx} \left[\frac{b^x}{\ln b} \right] = b^x \quad (0 < b, b \neq 1)$	$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b, b \neq 1)$
11. $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
12. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$
13. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{sen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$
14. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{sec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sec} x + C$



Síntese dos conceitos

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f , denotada por:

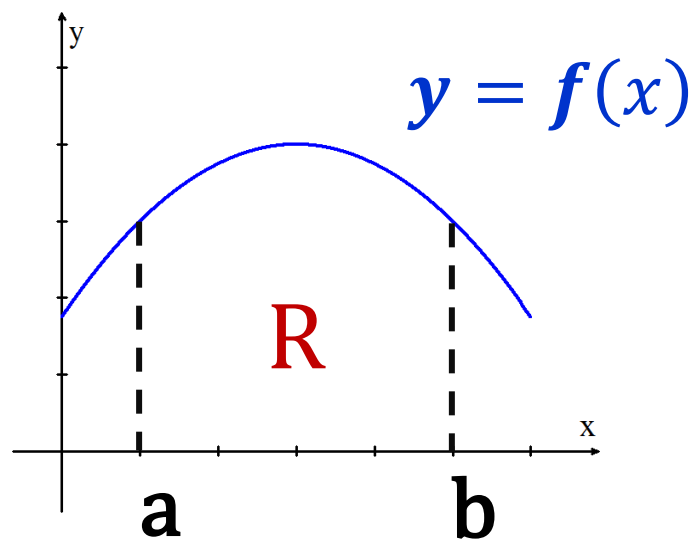
$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f , denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral
definida
(*Número real*)



$$\text{Área } R = \int_a^b f(x) dx$$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $y = F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $y = F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.
- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\int f(x)dx$$

Integral
Indefinida
(*família de funções*)



Integração Aproximada

Integração aproximada

- Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

Integração aproximada

➤ Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

1. Algumas funções podem não possuir primitiva ou ser de difícil determinação, por exemplo:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

Integração aproximada

- Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

1. Algumas funções podem não possuir primitiva ou ser de difícil determinação, por exemplo:

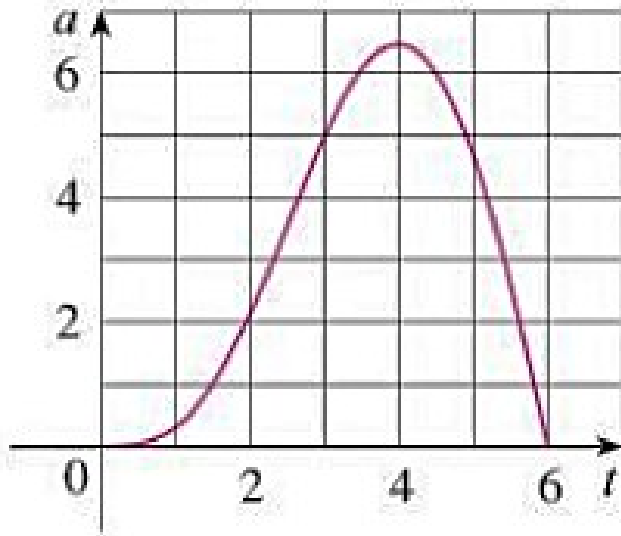
$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

2. Quando um conjunto de dados experimentais representam uma relação funcional, mas não é possível determiná-la explicitamente.

Integração aproximada

- Exemplos de função como curva e tabela:



t (s)	v (m/s)
0	0
0,5	4,67
1,0	7,34
1,5	8,86
2,0	9,73
2,5	10,22

- Em ambos os casos será necessário calcular a integral definida de forma aproximada.



Regra dos trapézios

- A interpretação da integral como área sob uma curva nos forneceu um método de aproximação.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Regra dos trapézios

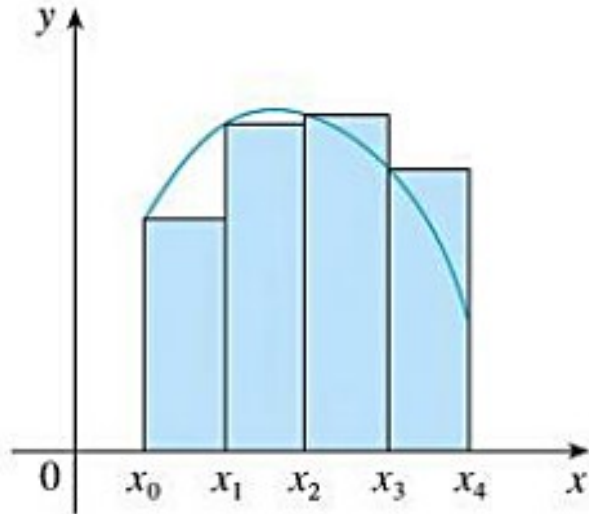
- A interpretação da integral como área sob uma curva nos forneceu um método de aproximação.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

- Para aproximar a área abaixo da curva na integral definida utilizamos o ponto médio do retângulo aproximador.
- No entanto, essa escolha não é única.

Regra dos trapézios

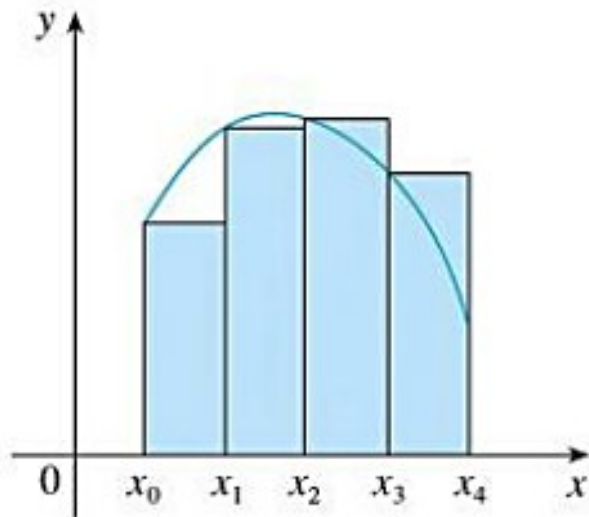
- Se x_i^* é o extremo esquerdo.



$$\int_a^b f(x) dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

Regra dos trapézios

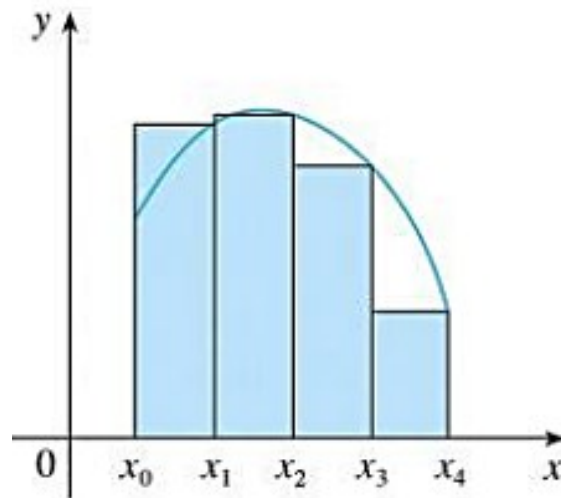
- Se x_i^* é o extremo esquerdo.



$$\int_a^b f(x) dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$

- Se x_i^* é o extremo direito.

$$\int_a^b f(x) dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$



Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right]$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] = \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right]$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] = \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))]\end{aligned}$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] = \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$

Regra dos trapézios

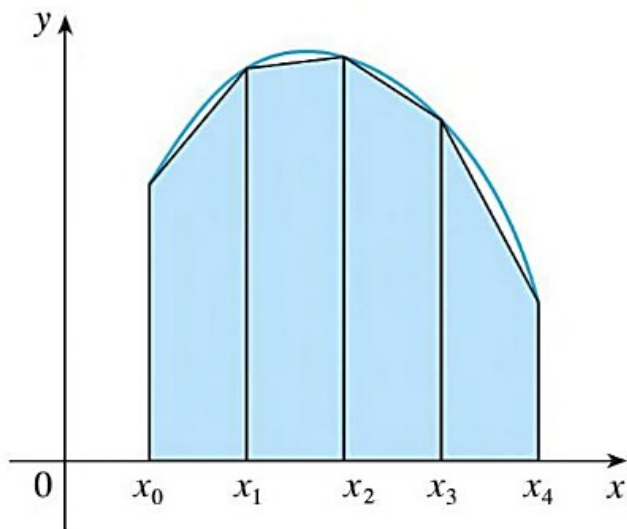
$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i \Delta x$.

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i \Delta x$.

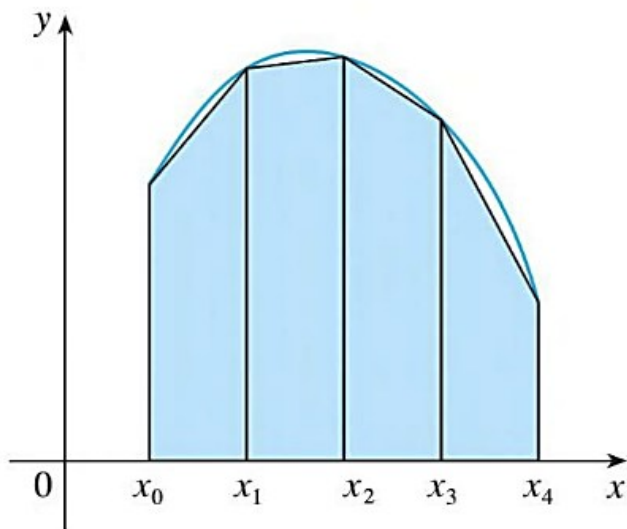


$$A_{Trap} = \Delta x \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)$$

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i \Delta x$.



$$\begin{aligned} A_{Trap} &= \Delta x \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \end{aligned}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)]$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635\end{aligned}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635\end{aligned}$$

**Cálculo
exato** $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635\end{aligned}$$

Cálculo exato $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,693147 \dots$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635\end{aligned}$$

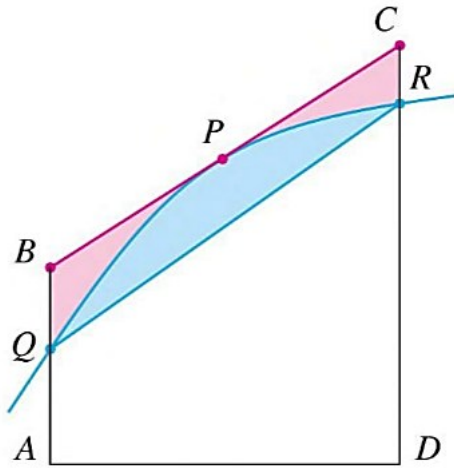
Cálculo $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,693147 \dots$

exato

$$E_T = \int_a^b f(x) dx - T_n \qquad E_T \approx -0,002488$$

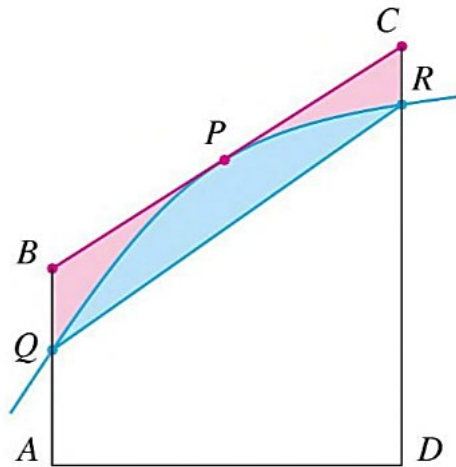
Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



Erro na regra dos trapézios

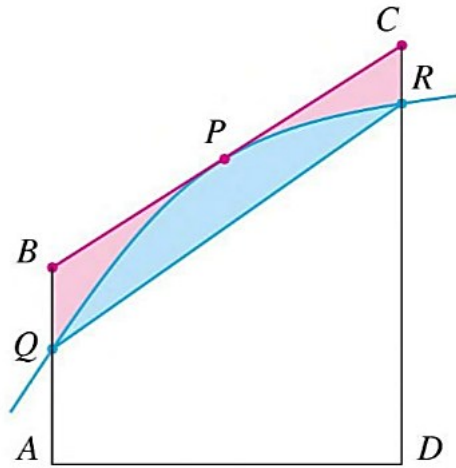
- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.

Erro na regra dos trapézios

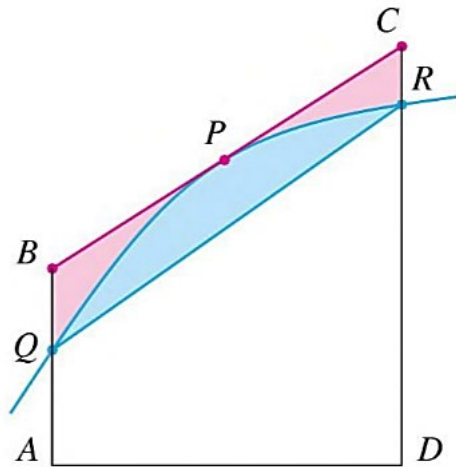
- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.

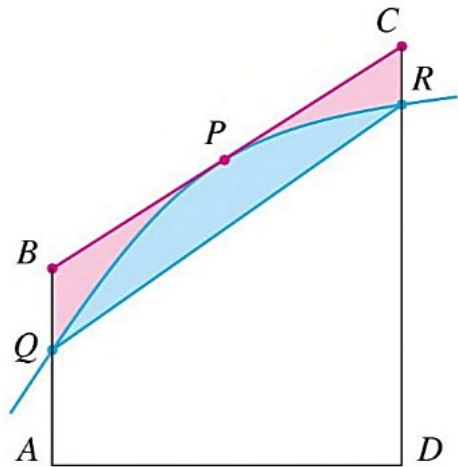


- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Estimativa de erro
para a regra do
trapézio

Dedução: Franco (2006, p.341)

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0,006667$$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0,006667$$

Erro real =
0,002488

A fórmula da estimativa superestima o erro!

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto,

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0,0001 \quad n^2 > \frac{2}{12(0,0001)}$$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0,0001 \quad n^2 > \frac{2}{12(0,0001)}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{0,0006}} \approx 40,8$$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0,0001 \quad n^2 > \frac{2}{12(0,0001)}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{0,0006}} \approx 40,8$$

Então, $n = 41$ irá garantir a precisão de 0,0001.

Para depois desta aula:

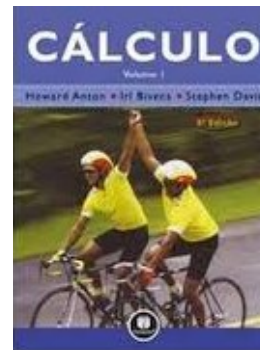
- Estudar seções 7.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 7.7 do Stewart.

Próxima aula:

- Regra de Simpson para aproximação.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



2. STEWART, James Cálculo - volume 1. 7 ed. São Paulo: Cengage, 2013.

3. FRANCO, Neide Bertold, Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson, 2006.

