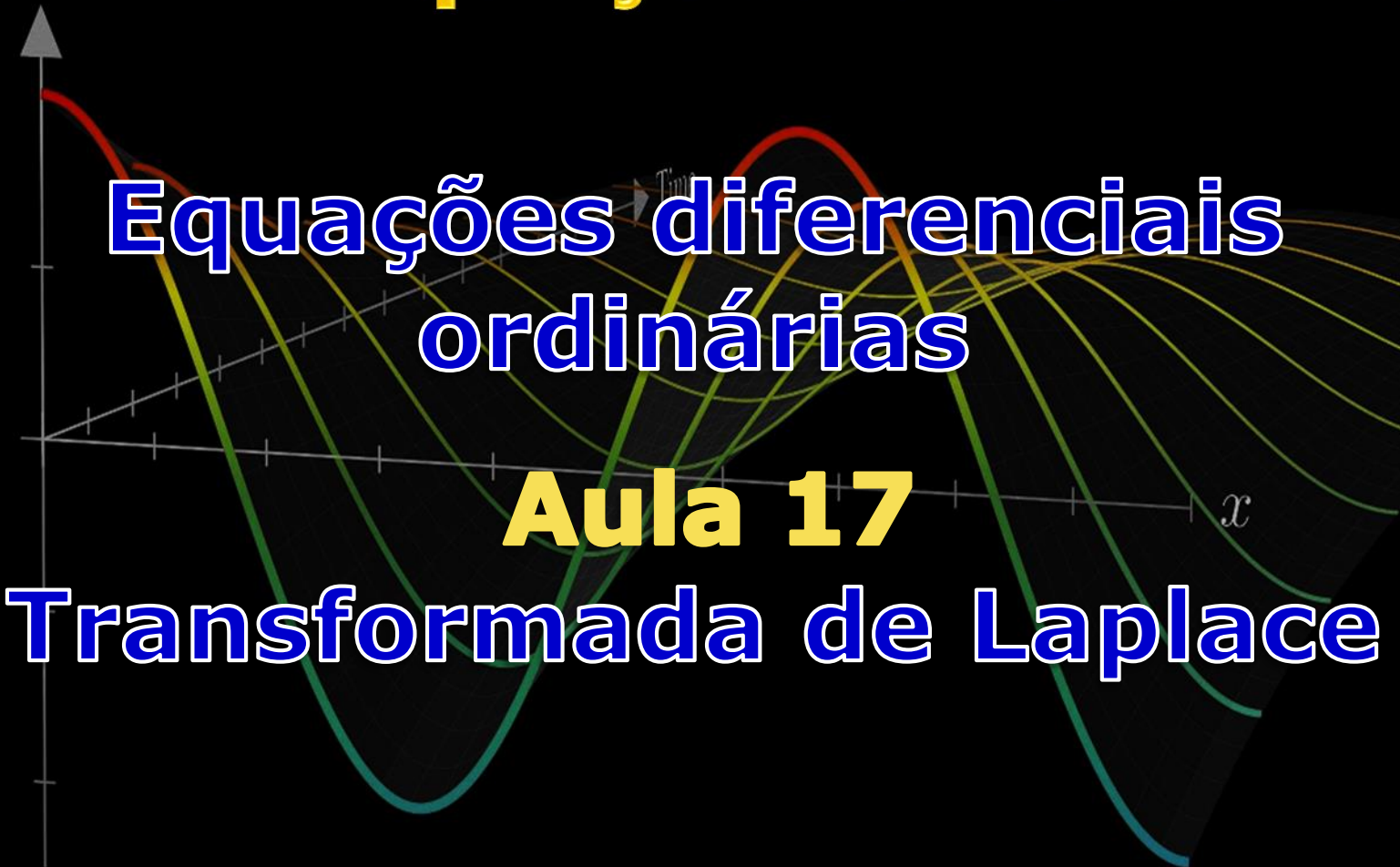


Equações diferenciais



Equações diferenciais
ordinárias

Aula 17

Transformada de Laplace

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução e integrais impróprias
2. Funções contínuas por partes.
3. A transformada de Laplace.
4. Linearidade da transformada.

Pré-requisitos

- Cálculo de integrais.



Introdução e Integrais impróprias

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.
- Esse método também pode ser utilizado para resolver eq. dif. lineares com coeficientes constantes.

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.
- Esse método também pode ser utilizado para resolver eq. dif. lineares com coeficientes constantes.
- A definição da transformada envolve integrais impróprias, conceito que será revisado a seguir.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt$$

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt \quad (1)$$

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt \quad (1)$$

A : número real positivo, tal que $A > a$.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt \quad (1)$$

A : número real positivo, tal que $A > a$.

- Se o limite de $A \rightarrow \infty$ existe, então a integral converge para um valor L .

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt \quad (1)$$

A : número real positivo, tal que $A > a$.

- Se o limite de $A \rightarrow \infty$ existe, então a integral converge para um valor L .
- Caso contrário, a integral diverge.

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \quad c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \ c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \ c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \ c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \ c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \ c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{cA} - 1)$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \quad c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{cA} - 1)$$

✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \quad c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{cA} - 1)$$

✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$ | ✓ Se $c \geq 0$ diverge.

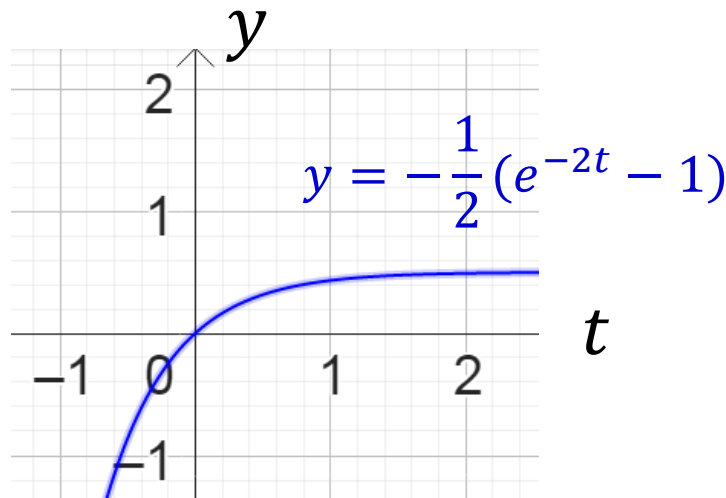
Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \quad c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{cA} - 1)$$

✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$

✓ Se $c \geq 0$ diverge.

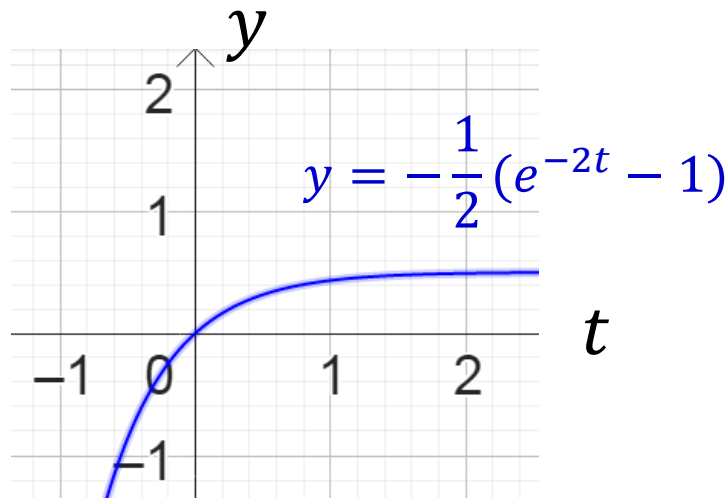


Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

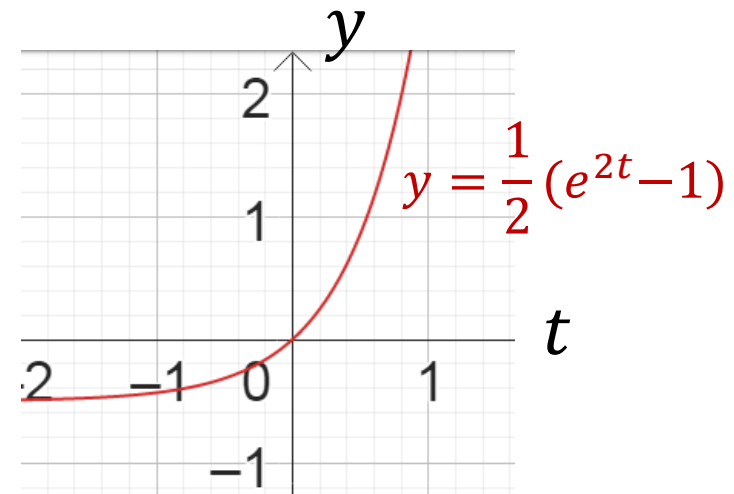
$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \quad t \geq 0, \quad c \neq 0: \text{constante} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{cA} - 1)$$

✓ Se $c < 0$ converge p/ $-\frac{1}{c}$



✓ Se $c \geq 0$ diverge.





**Funções contínuas
por partes**

Funções contínuas por partes

- Uma função é **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:

Funções contínuas por partes

- Uma função é **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:
1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.

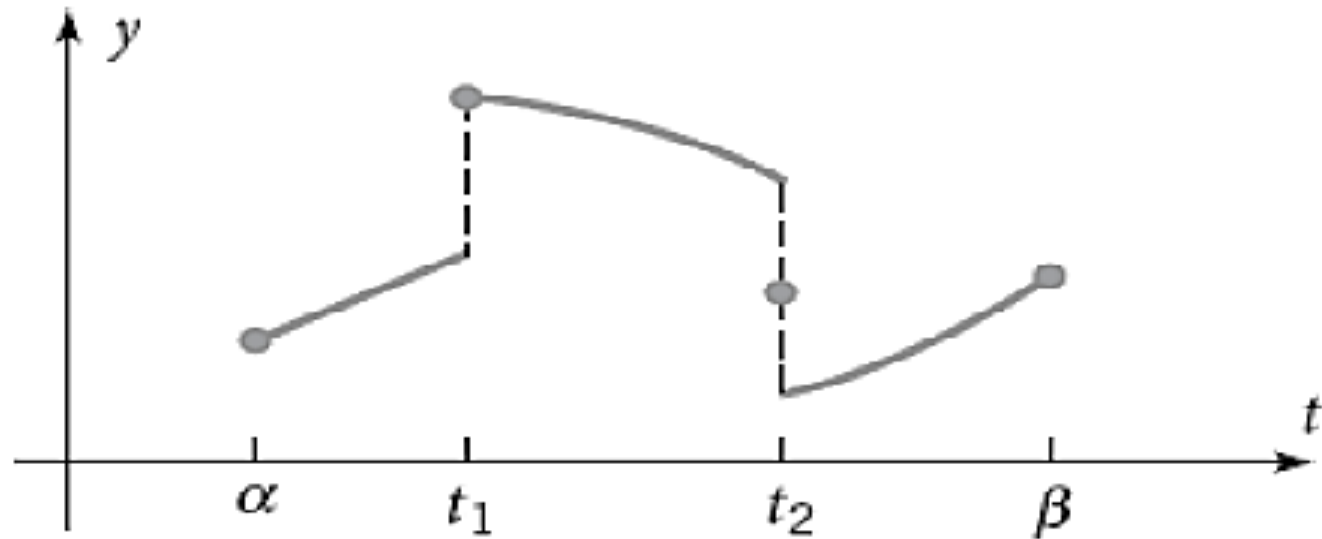
Funções contínuas por partes

- Uma função é **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:
1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.
 2. f tem **limite finito interior** nos extremos de cada subintervalo.

Funções contínuas por partes

- Uma função é **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:
 1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.
 2. f tem **limite finito interior** nos extremos de cada subintervalo.
- A integral de uma função contínua por partes em um intervalo finito é a soma das integrais dos subintervalos.

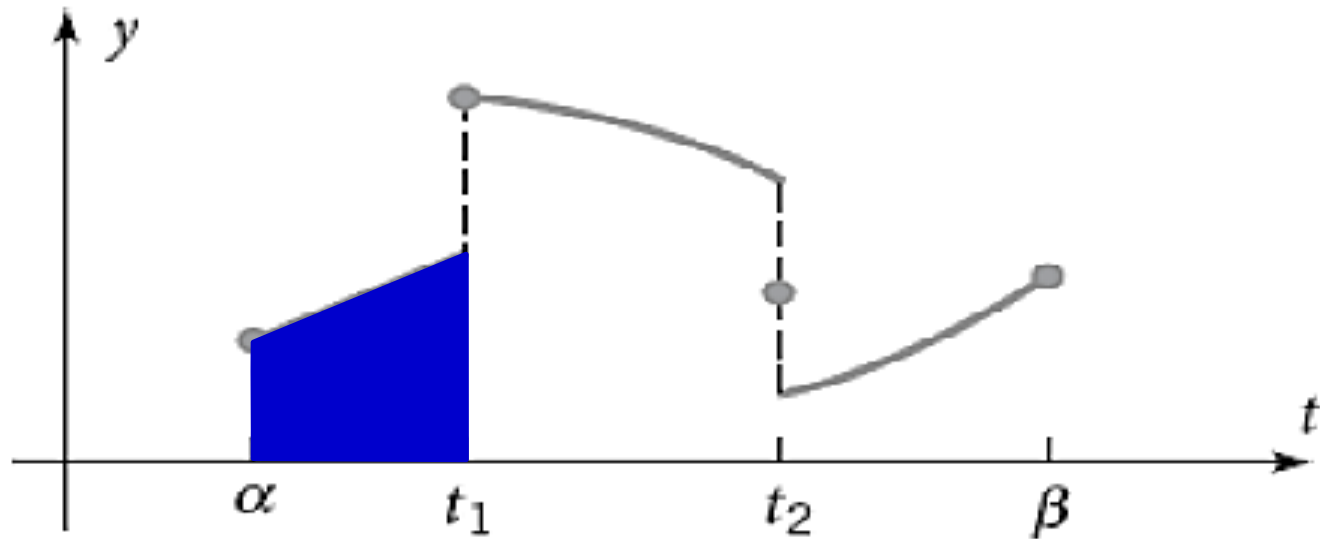
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt =$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

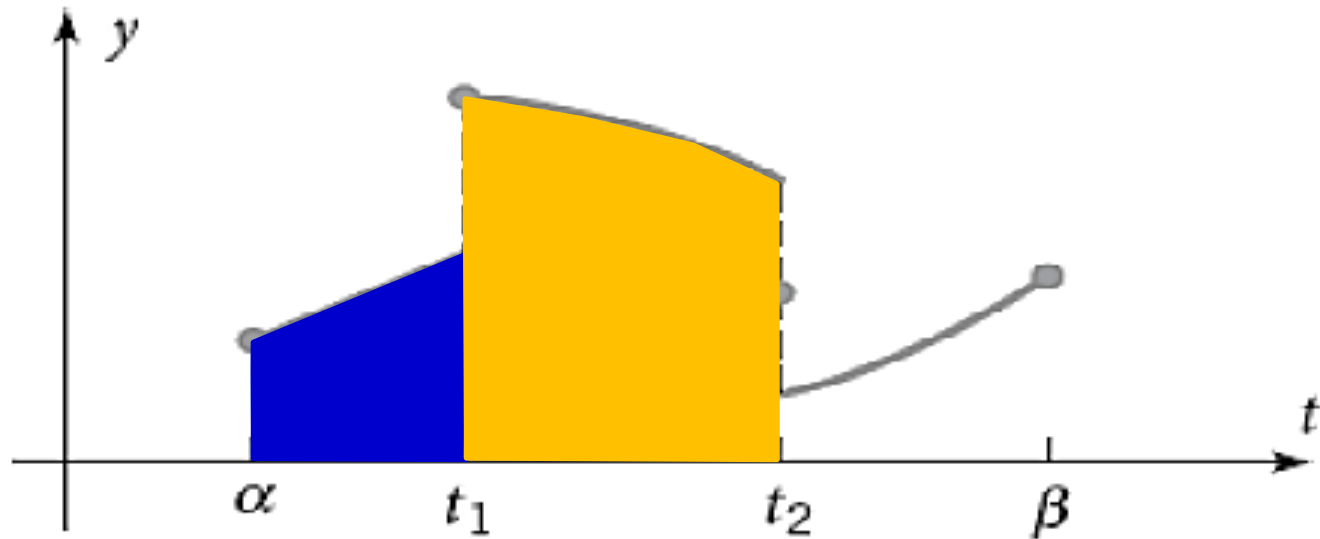
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t) dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

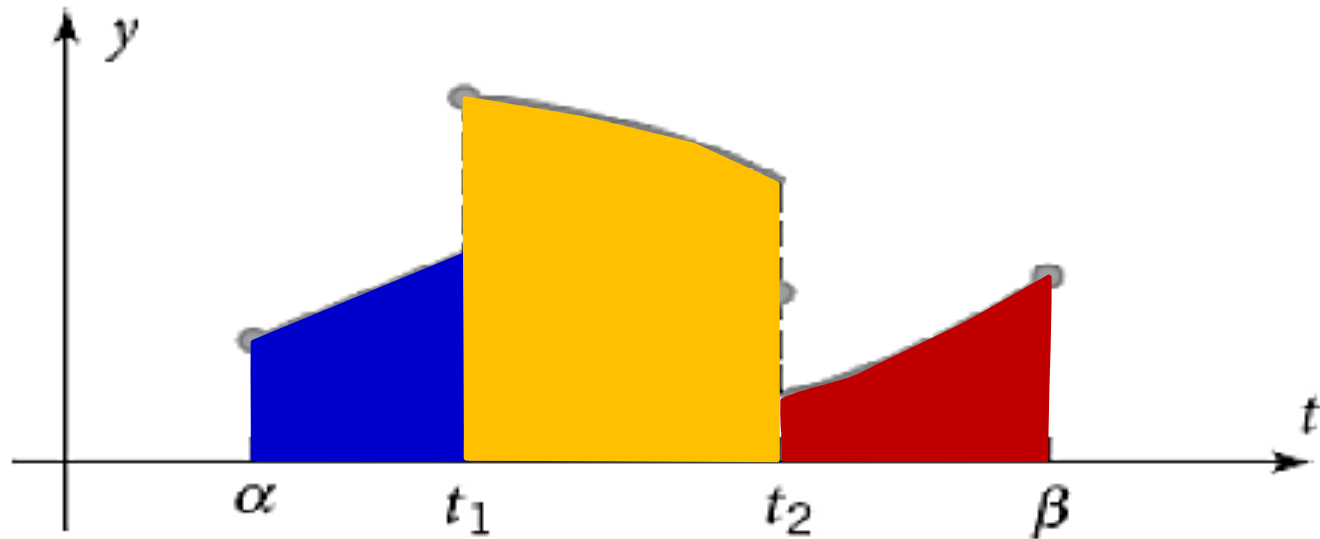
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t)dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.



Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

$K(s, t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

$K(s, t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s .

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

$K(s, t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s .
- A função F é chamada de transformada de f .

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

$K(s, t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s .
- A função F é chamada de transformada de f .
- As transformadas mais conhecidas são a transformada de Fourier e a transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

➤ Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) =$$

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

➤ Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

➤ Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

➤ Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

e^{-st} : núcleo da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

e^{-st} : núcleo da transformada de Laplace.

- Sempre que a integral imprópria convergir existirá a transformada da função f .

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq K e^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq K e^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;
 $K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R} \text{ e } a \in \mathbb{R}$

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq K e^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;
 $K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq K e^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;
 $K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

As funções tratadas nesta aula e nas aulas seguintes irão satisfazer este teorema.

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) =$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A =$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot 0}}{-s} \right)$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\cancel{\frac{e^{-sA}}{-s}} - \frac{e^{-s \cdot 0}}{-s} \right) = 0$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\overset{= 0}{e^{-sA}}}{-s} - \frac{\overset{= 1}{e^{-s \cdot 0}}}{-s} \right)$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{e^{-sA}}^{=0}}{-s} - \frac{\cancel{e^{-s \cdot 0}}^{=1}}{-s} \right)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\overset{= 0}{\cancel{e^{-sA}}}}{\cancel{-s}} - \frac{\overset{= 1}{\cancel{e^{-s \cdot 0}}}}{\cancel{-s}} \right)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) =$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)} - \frac{e^0}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)} - \frac{e^0}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\overset{= 0}{e^{-(s-a)A}}}{-(s-a)} - \frac{\overset{= 1}{e^0}}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\overset{= 0}{e^{-(s-a)A}}}{-(s-a)} - \frac{\overset{= 1}{e^0}}{-(s-a)} \right)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\overset{= 0}{e^{-(s-a)A}}}{-(s-a)} - \frac{\overset{= 1}{e^0}}{-(s-a)} \right)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad s > 0$$

Exercício: Calcule a Transformada de Laplace. Resp.:

$$f(t) = \text{sen}(at), \quad t > 0 \quad \text{e} \quad a \text{ constante.} \quad F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$



Linearidade da transformada de Laplace

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt\end{aligned}$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} &= \\&= \int_0^{\infty} e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt \\&= C_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt\end{aligned}$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} &= \\&= \int_0^{\infty} e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt \\&= C_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt\end{aligned}$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} &= \\&= \int_0^{\infty} e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt \\&= C_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\&= C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\operatorname{sen}4t \quad t \geq 0$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\operatorname{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} -$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\operatorname{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\operatorname{sen}4t\}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a} \quad \begin{matrix} a = -2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a} \quad \begin{matrix} a = -2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s + 2}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \begin{matrix} a = -2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \begin{matrix} a = 4 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} & \begin{array}{l} a = -2 \\ \Rightarrow \end{array} & 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2} \\ \mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2+a^2} & \begin{array}{l} a = 4 \\ \Rightarrow \end{array} & 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\} = \frac{12}{s^2+4^2} \end{array}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a} & a = -2 & \Rightarrow & 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} &= \frac{5}{s+2} \\ \mathcal{L}\{\text{sen}at\} &= \frac{a}{s^2+a^2} & a = 4 & \Rightarrow & 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\} &= \frac{12}{s^2+4^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+4^2}$$

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável s .

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável s .
2. O problema mais simples é algébrico cuja resolução permite encontrar $F(s)$.

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável s .
2. O problema mais simples é algébrico cuja resolução permite encontrar $F(s)$.
3. Após resolver o problema algébrico, recupera-se a função $f = f(t)$ aplicando-se a transformada inversa sobre $F = F(s)$.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 6.1 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.1 do Boyce.

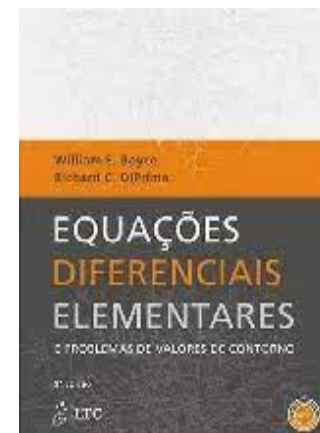
Próxima aula:

- Solução de problemas de valor inicial.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.