Matemática

Farmácia

Aula 11
Técnicas de integração

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = F(\mathrm{b}) - F(\mathrm{a})$$

Número Real

Integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Família de funções

C é uma constante

2 Principais antiderivadas (primitivas)

- $\int k dx = kx + C$ $\quad$ k, C são constantes
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad$ $n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$
- $\int senx\, dx = -cosx + C$
- $\int cosx\, dx = senx + C$

Exemplo 2 – encontrar a primitiva ou a integral indefinida

$d)$ $\int \left(\sqrt{1+x^2}\right) 2x\, dx$

3 Técnicas de integração

- ✓ Possibilitam a resolução de integrais que não possuem uma primitiva imediata;
- ✓ As técnicas de integração são equivalentes inversas das técnicas de derivação;
- ✓ Duas dessas técnicas, constante vezes uma função e soma de funções, ficaram evidentes nas propriedades das integrais;
- ✓ Resta então, definir as técnicas correspondentes à regra do produto, da cadeia e do quociente.

A – Integração por substituição ou Mudança de variável

Se uma função $F = F(g(x))$, depender de outra função, então pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Calculando-se a integral da derivada retorna-se a primitiva

$$\int F'\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

A – Integração por substituição ou Mudança de variável

Substituindo $g(x) = y$, tem-se:

$$\int \boldsymbol{F'(y)\,dy = F(y) + C}$$

Escrevendo $\boldsymbol{F' = f}$:

$$\int \boldsymbol{f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(y)dy}$$

A – Regra da substituição

Se $g(x) = y$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e $\boldsymbol{f}$ for contínua em I:

$$\int \boldsymbol{f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)dy}$$

A – Regra da substituição

Se $g(x) = y$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)dy$$

Essa técnica funciona sempre que a integral puder ser escrita na forma:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Exemplo 3 – Resolver por substituição de variável

$$2d) \rightarrow a) \quad \int \left(\sqrt{1+x^2}\right) 2x\,dx$$

Exemplo 3 – Resolver por substituição de variável

$$\boldsymbol{b)}\quad \int x^3 cos(x^4+2)\, dx$$

Exemplo 3 – Resolver por substituição de variável

$c)$ $\int e^{5x}\,dx$

B – Substituição de variável na integral definida

Deve-se atentar para os limites de integração, existindo dois procedimentos para o cálculo:

1. Calcular primeiro a integral indefinida com substituição; voltar a variável original e avaliar nos limites.

2. Ajustar os limites de integração na substituição da variável. (preferível)

Exemplo 4 – Resolver por substituição de variável utilizando-se dos dois procedimentos

$\boldsymbol{a)}$ $\displaystyle \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

C – Integração por partes

A integração por partes corresponde a regra do produto para as derivadas.

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

C – Integração por partes

A integração por partes corresponde a regra do produto para as derivadas.

Sejam duas funções: $u = f(x)$ e $v = g(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ Integrando:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

C – Integração por partes

A integração por partes corresponde a regra do produto para as derivadas.

Sejam duas funções: $u = f(x)$ e $v = g(x)$

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Integrando:

$$\underbrace{\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx}_{\text{Teorema Fundamental}} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

C – Integração por partes

A integração por partes corresponde a regra do produto para as derivadas.

Sejam duas funções: $u = f(x)$ e $v = g(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ Integrando:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Rearranjando

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C}$$

C – Integração por partes

A fórmula conhecida como integral por partes é:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C$$

Mais facilmente lembrada fazendo: $u = f(x)$ e $v = g(x)$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du + C}$$

Exemplo 5 – Calcular a integral por partes

$a)\ \int xe^{2x}dx$

Exemplo 5 – Calcular a integral por partes

$$b) \int x\, sen x\, dx$$

Exemplo 5 – Calcular a integral por partes

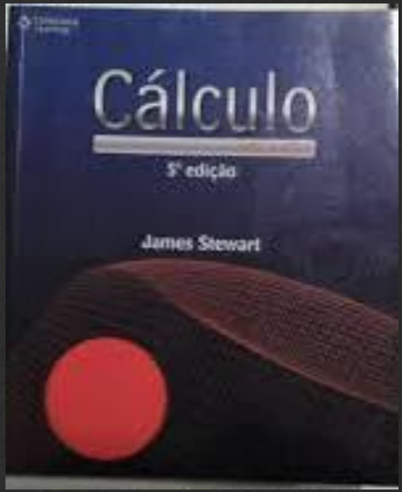
$$c)\ \int lnx\, dx$$

Próxima aula teórica

- Revisão dos conceitos para avaliação 2

Bibliografia

Aguiar, A.F.A., Xavier, A.F.S., Rodrigues, J.E.M. **Cálculo Para Ciências Médicas e Biológicas**., Editora Harbra, 1988., 1987.



Stewart, James. Cálculo volume 1, 5ª ed. São Paulo: Cencage, 2008.

Contatos e redes sociais

Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/1614784455223743

https://www.linkedin.com/in/henriqueamfaria

https://www.facebook.com/estudoefetivocurso/

http://www.youtube.com/c/HenriqueFariaprof

henrique.faria@unesp.br