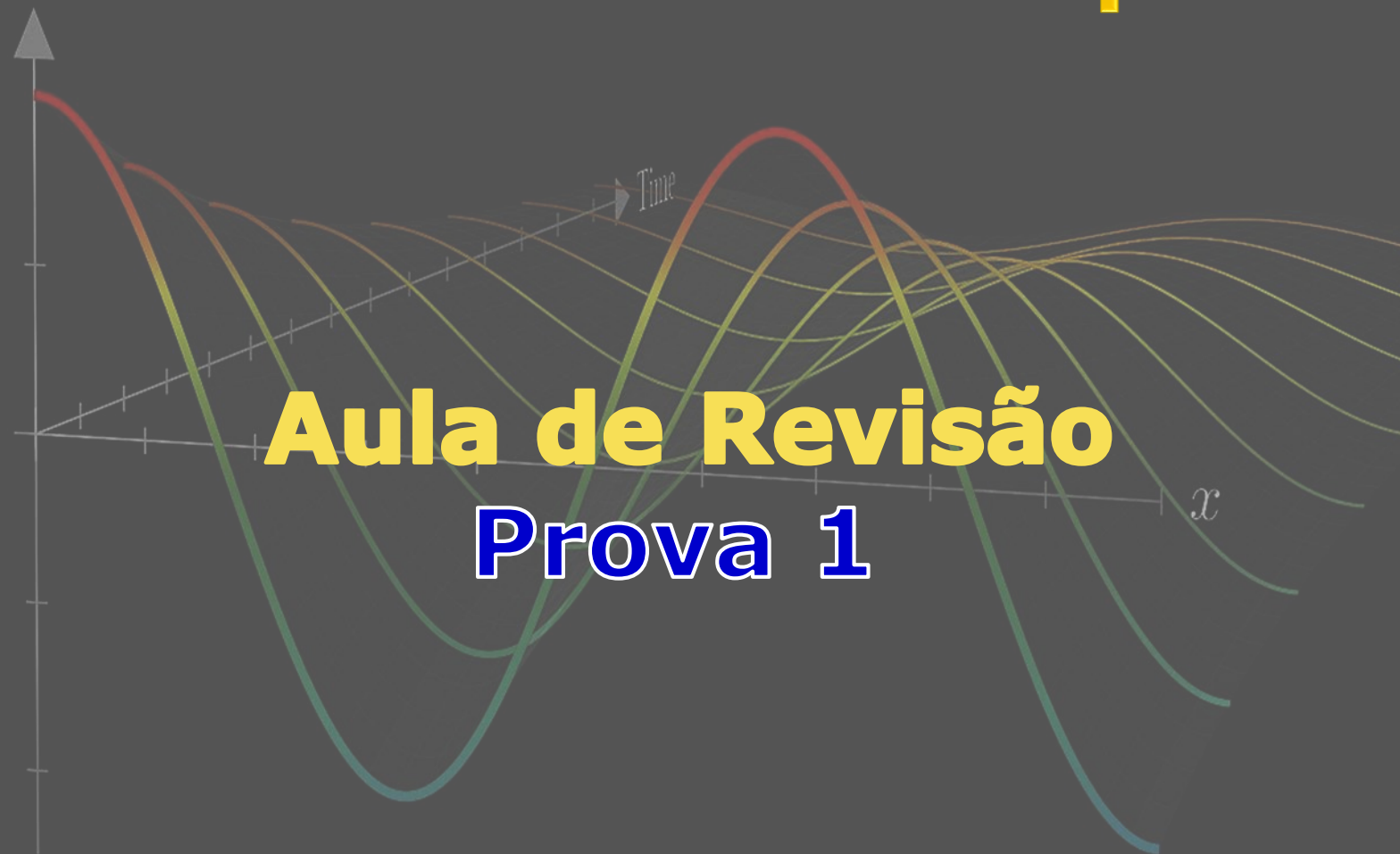


Matemática Aplicada




Aula de Revisão Prova 1

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos para avaliação 1

1. Integral aproximada: regra dos Trapézios e Simpson.
2. Sequências de números reais e aplicações.
3. Séries introdução e definição.
4. Teste da integral e da comparação.
5. Séries alternadas.
6. Séries de potência.
7. Séries de Taylor.
8. Série e transformada de Fourier.



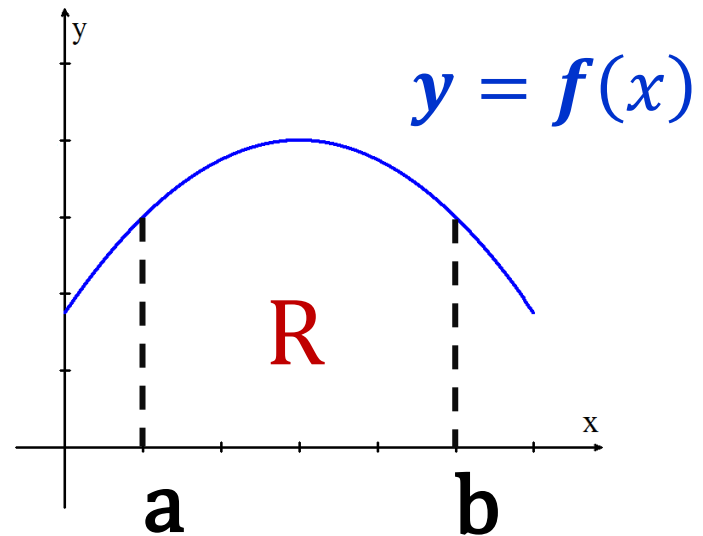
1. Integral aproximada: Regra dos Trapézios e Simpson

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f , denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Número}$$

Integral
definida (Número real)



$$\text{Área } R = \int_a^b f(x) dx$$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $y = F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.
- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integral
Indefinida
(*família de funções*)

Integração aproximada

➤ Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

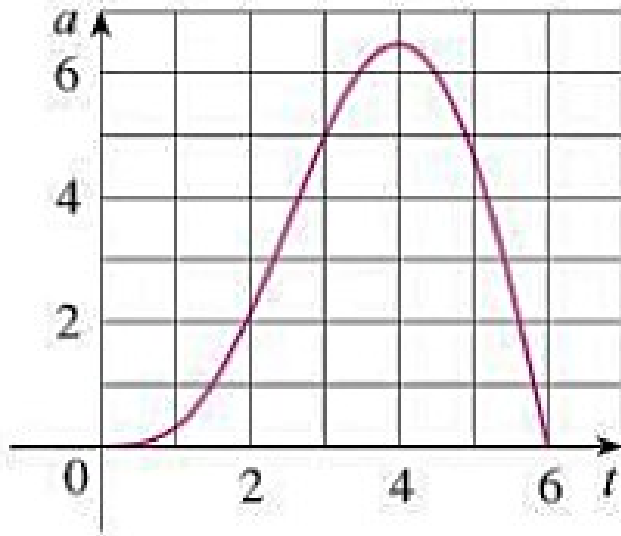
1. Algumas funções podem não possuir primitiva ou ser de difícil determinação, por exemplo:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

2. Quando um conjunto de dados experimentais representam uma relação funcional, mas não é possível determiná-la explicitamente.

Integração aproximada

- Exemplos de função como curva e tabela:



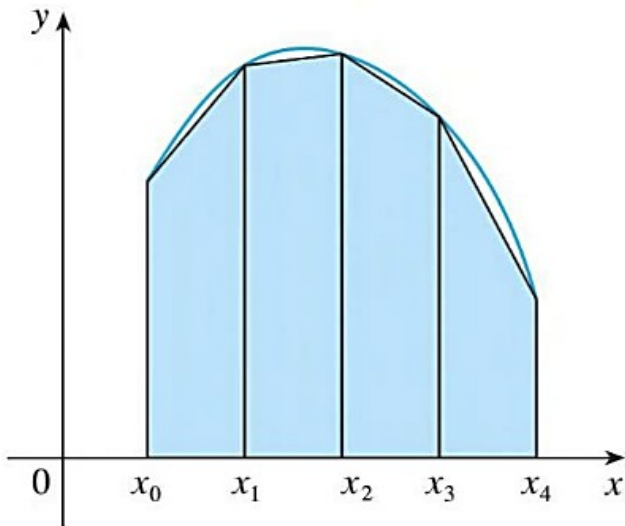
t (s)	v (m/s)
0	0
0,5	4,67
1,0	7,34
1,5	8,86
2,0	9,73
2,5	10,22

- Em ambos os casos será necessário calcular a integral definida de forma aproximada.

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i \Delta x$.



$$\begin{aligned} A_{Trap} &= \Delta x \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \end{aligned}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0,2$ resulta em

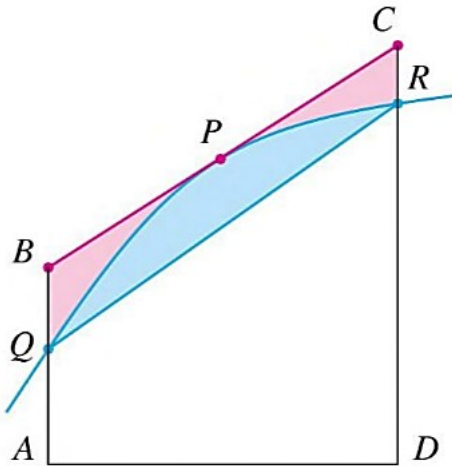
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,695635\end{aligned}$$

Cálculo exato $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,693147 \dots$

$$E_T = \int_a^b f(x) dx - T_n \qquad E_T \approx -0,002488$$

Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Estimativa de erro
para a regra do
trapézio

Dedução: Franco (2006, p.341)

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leq x \leq 2$, temos $1/x \leq 1$, logo

$$|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0,006667$$

Erro real =
0,002488

A fórmula superestima o erro!

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde n é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

Limitante de Erro para a Regra de Simpson Suponha que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Se E_S é o erro envolvido no uso da Regra de Simpson, então

$$|E_S| \leq \frac{K(b - a)^5}{180n^4}$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

Se $n = 10$, então $\Delta x = 0,1$ e a

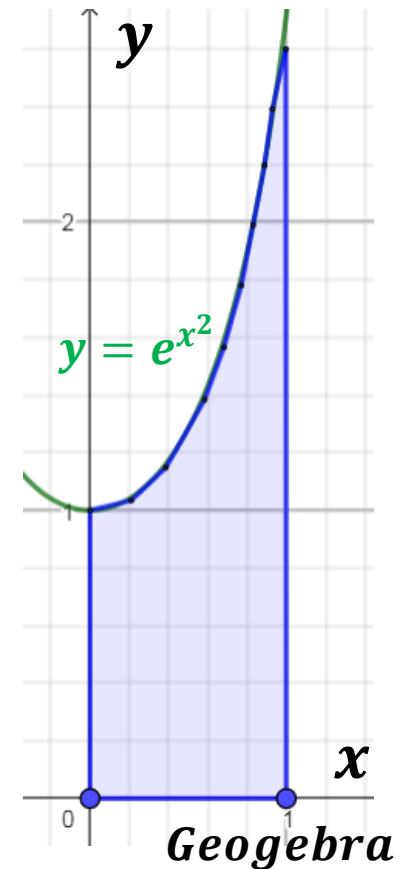
Regra de Simpson resulta em

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)]$$

$$= \frac{0,1}{3} [e^0 + 4e^{0,01} + 2e^{0,04} + 4e^{0,09} + 2e^{0,16}$$

$$+ 4e^{0,25} + 2e^{0,36} + 4e^{0,49} + 2e^{0,64} + 4e^{0,81} + e^1]$$

$$\approx 1,462681$$



Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$. Estime o erro.

A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leq x \leq 1$, temos

$$0 \leq f^{(4)}(x) \leq (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

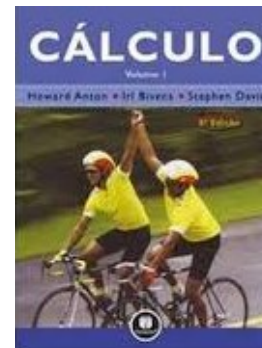
Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$

o erro é no máximo

$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0,000115 \quad \int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,463$$

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



2. STEWART, James Cálculo - volume 1. 7 ed. São Paulo: Cengage, 2013.

3. FRANCO, Neide Bertold, Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson, 2006.





2. Sequências de números reais e aplicações.

Definições de sequências numéricas

Sequência: lista de números em ordem definida.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

- O número a_n é chamado termo da sequência.
- Outras notações para sequência:

$$\{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- Algumas sequências numéricas são definidas por uma fórmula para o n -ésimo termo.

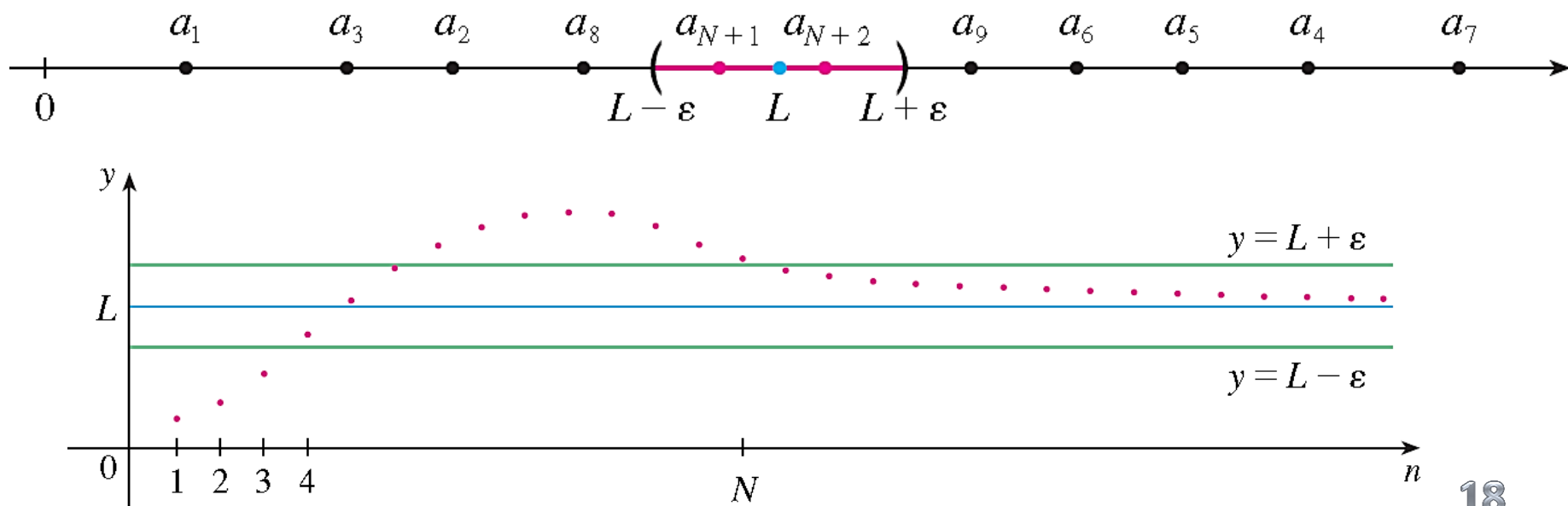
Limite de seqüências

Definição Uma seqüência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \varepsilon$$



Limite de seqüências

Definição $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então } a_n > M$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, então a seqüência $\{a_n\}$ é divergente, Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞ .
- As Propriedades do Limite também valem para os limites de seqüências

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \geq 1$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que $m \leq a_n$ para todo $n \geq 1$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

Teorema da Sequência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Progressão Aritmética (PA)

- Sequências de números.
- Cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante r .
- A constante r é chamada razão da PA.

$$a_n = a_{n-1} + r$$

- Caso a razão e o primeiro termo sejam conhecidos pode-se construir o termo geral da PA.

Progressão Geométrica (PG)

- Sequências de números reais.
- Cada termo, a partir do segundo, é o **produto do termo** anterior com uma constante real q .
- A constante q é chamada razão da PG.

$$a_{p+1} = a_p q$$

- Fórmula para o termo geral da PG:

$$a_2 = a_1 q; \quad a_3 = a_2 q = a_1 q q; \quad \dots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Cálculo de limites

- O número de Euler (e) pode ser escrito como uma sequência numérica.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Cálculo do limite dessa sequência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

APROXIMAÇÕES DE e POR $(1 + 1/x)^x$
COM VALORES CRESCENTES DE x

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	$\approx 2,000000$
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280



3. Séries introdução e definição

Definição de série

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, denote por s_n sua n -ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ existir, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = s$$

O número s é chamado a **soma** da série.

Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r .

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad \text{para } a \neq 0$$

Converge: se $|r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

Diverge: se $|r| \geq 1 \Rightarrow (-\infty, -1] \text{ e } [1, +\infty)$

- A soma dos termos tem uma expressão fechada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad \text{para } |r| < 1$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0,7\overline{7} = 0,777 \dots$ como razão de inteiros.

$$0,7777 = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots$$

$$0,7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots + \frac{7}{10^n}$$

✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

$$S_n = 0,777 \dots = \frac{a}{(1-r)} = \frac{7/10}{1 - (1/10)} = \frac{7/10}{9/10} = \frac{7}{9}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

➤ O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cancel{\frac{1}{n+1}} \right) = 1$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

- Embora não seja evidente que divirja, as somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

$$S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n$$

- Não há um número superior para as somas parciais. Portanto, pelo Teorema da sequência monótona, a sequência das somas diverge, assim como a série.

Alguns Teoremas

Teorema 6 (Ref. Stewart 7 ed.)

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

*A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira.
Se o limite é nulo, não podemos concluir que a
série é convergente.*

Teorema 7 (Teste da divergência)

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$,
então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Alguns Teoremas

Teorema 8

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$



Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x) dx$ for convergente.

(i) Se $\int_1^{\infty} f(x) dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^{\infty} f(x) dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

A função $f(n)$ deve ser decrescente a partir do ponto de início da série.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ converge?

✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\operatorname{tg}^{-1} x \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg}^{-1} t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Como a integral é convergente, pelo teste da integral a série também é convergente!

Série p

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Demonstração $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

Se $p < 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Se $p = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^p) = 1$ e a série diverge

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Portanto, a série p converge para $p > 1$.

Teste da comparação

Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n , então $\sum a_n$ também será divergente.

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \quad \text{sejam: } a_n = \frac{1}{(n-1)}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

➤ A série b_n é a série harmônica divergente.

$$\frac{1}{(n-1)} \geq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad a_n \geq b_n$$

➤ Como a série b_n é divergente e menor do que a_n , pelo critério (ii) a série a_n dada também diverge.

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{sejam: } a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad b_n = \frac{1}{2^n}$$

➤ A série b_n é a série geométrica convergente.

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

➤ O teste da comparação não é útil neste caso, pois $a_n > b_n$ e b_n é convergente. Não atende nenhum dos dois critérios da comparação.

➤ É necessário utilizar outro teste de convergência.

Teste da comparação no limite

Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ c é um número finito e $c > 0$

então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{sejam: } a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

➤ Como b_n é uma série geométrica convergente, em consequência, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ também é convergente.



5. Séries alternadas

Teste da série alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots \quad b_n > 0$$

satisfaz (i) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

- ✓ As duas condições do teorema são satisfeitas.
- ✓ Então esta série, chamada harmônica alternada, é **convergente**.

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

✓ Cálculo do limite do termo b_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

✓ Como o limite é diferente de zero, a condição de convergência (ii) das séries alternadas **não é satisfeita**.

✓ Portanto esta série **diverge!**

Teste da razão

- O teste da razão é muito útil para determinar se uma série é absolutamente convergente.
- Este teste nem sempre é conclusivo.
- Ele é conclusivo quando o n -ésimo termo da série contém um exponencial ou fatorial.
- Por ser um teste mais simples, frequentemente é usado como primeira alternativa.
- Caso não seja conclusivo, aplicam-se outros testes.

Teste da razão

(i) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo.

Exemplo 6 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \\ &= e > 1 \end{aligned}$$

✓ Portanto, a série é **divergente**.

Teste da raiz

(i) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Exemplo 7 Testar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

$$\checkmark \quad a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

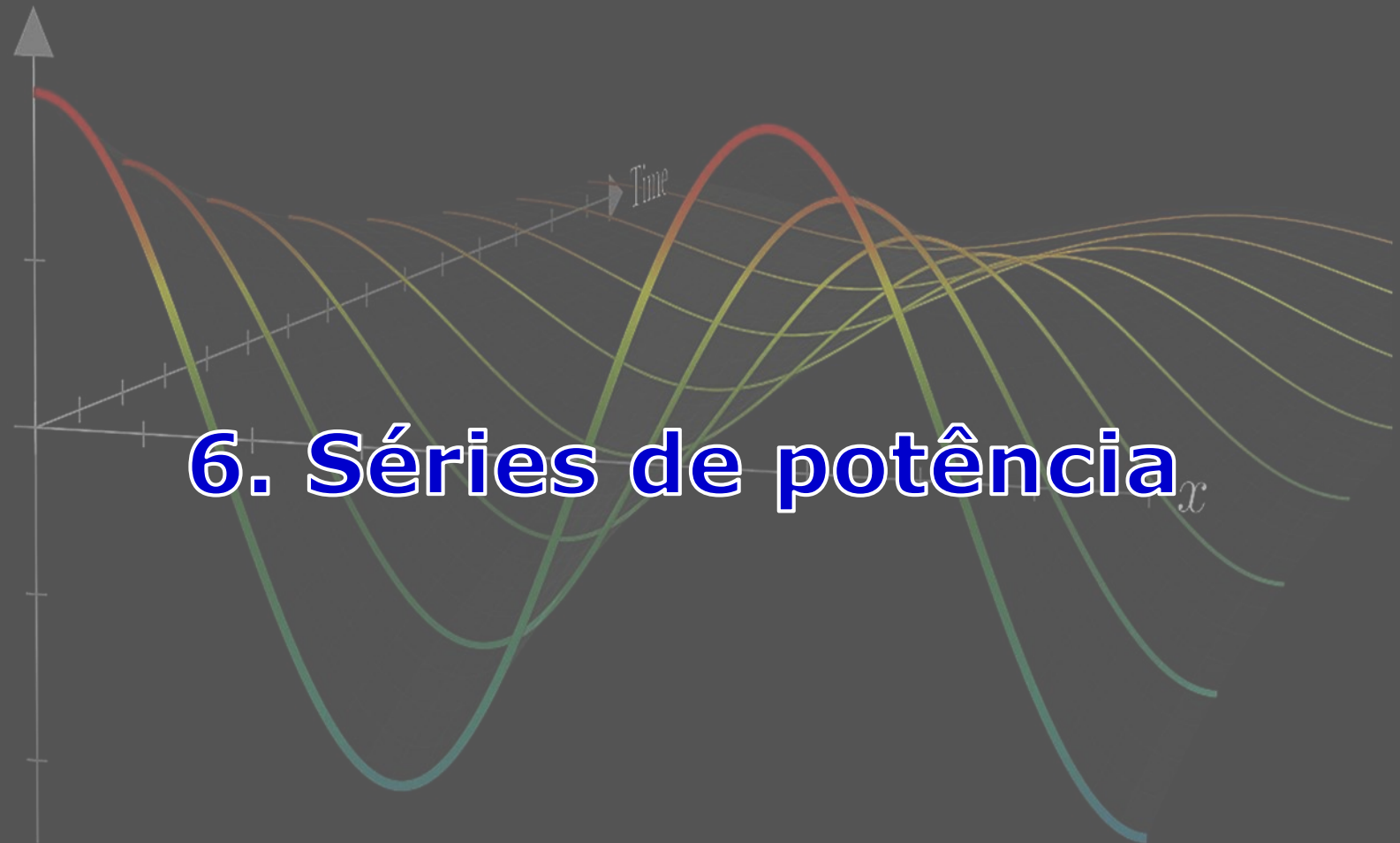
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}}$$

$$= \frac{2}{3} < 1 \quad \text{quando} \\ n \rightarrow \infty$$

\checkmark Pelo teste da raiz, a série é absolutamente convergente e, portanto, **convergente**.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|r| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum (-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.
6. Em séries com fatorial ou n -ésima potência utilizar o teste da razão.
7. Para séries da forma $\sum (b_n)^n$ usar o teste da raiz.
8. Se $a_n = f(n)$ e a integral de $f(x)$ for facilmente calculada usar o teste da integral, caso seja possível.



Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a , ou em torno de a , assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.
- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x - a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.
- Quando $x = a$ os outros termos são nulos. Portanto a série irá convergir em $x = a$.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \rightarrow |x-3| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se:

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

- ✓ O teste da razão **não fornece resultado** quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará $\sum 1/n$, série harmônica divergente.
- ✓ Se $x = 2$, a série é $\sum (-1)^n/n$, converge pelo Teste da Série Alternada.
- ✓ Portanto, a série converge se $2 \leq x < 4$.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de **derivadas e integrais** complicadas.
- As **equações diferenciais** também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.
- O conjunto de **valores de x** para o qual a série converge será um intervalo.
- Há três possibilidades para esse **intervalo de convergência**, definidos pelo teorema seguinte.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.
- (ii) A série converge para todo x .
- (iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

R : raio de convergência da série.

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se: $\frac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x+2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1 \quad \Rightarrow$$

*Raio de
convergência*

$$R = 3$$

Exemplo 3

 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \text{Divergente}$$

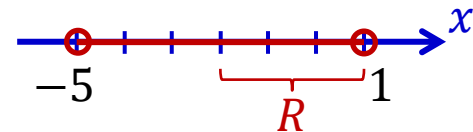
Limite do termo geral
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Quando $x = 1$ a série é:

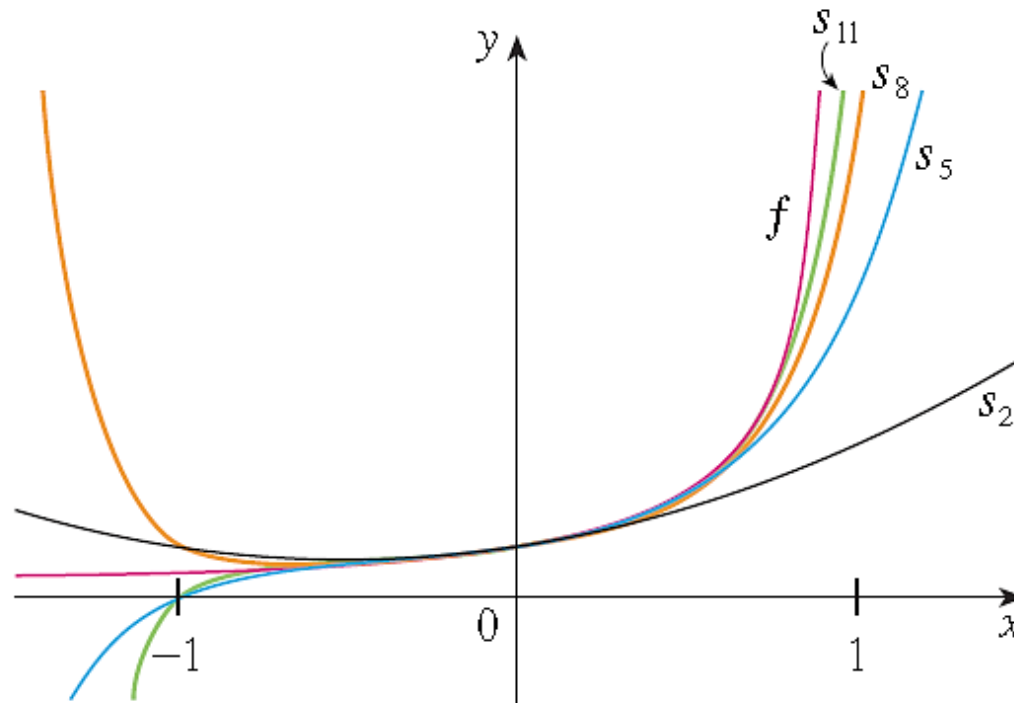
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n \quad \text{Divergente}$$

Teste da divergência
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Assim, a série é **convergente** no intervalo $(-5, 1)$ e raio de convergência $R = 3$.



Representação de funções



$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

✓ Se n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima de f em $(-1, 1)$.

Diferenciação e integração de séries

- As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$(iii) \quad \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x - a)^n]$$

$$(iv) \quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x - a)^n dx$$

- As propriedades da derivada da soma e da integral da soma são válidas para séries de potência.
- O intervalo de convergência pode mudar após a diferenciação ou a integração.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

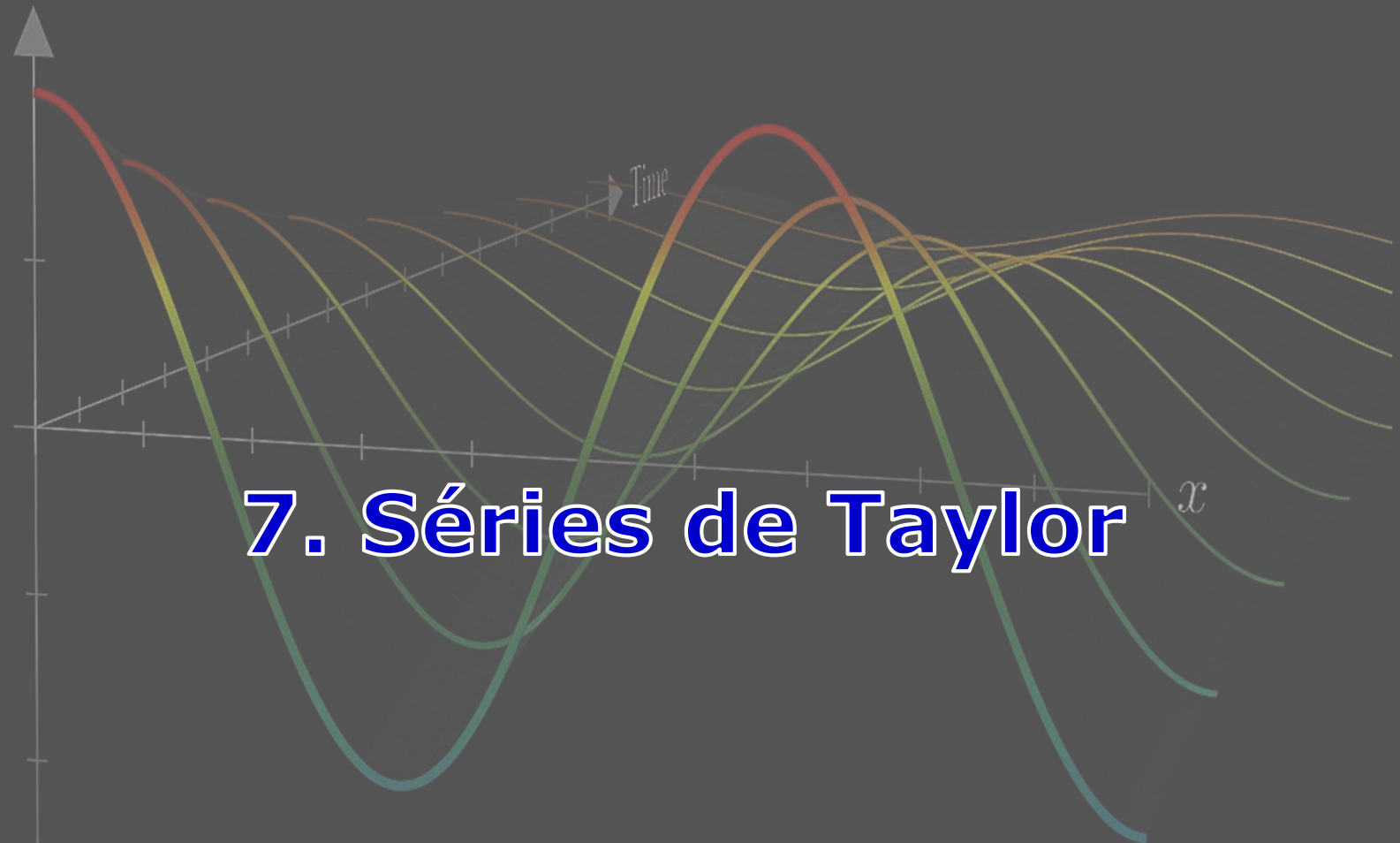
$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1 + x} dx = \int (1 - x + x^2 + \dots) dx$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \quad |x| < 1$$



Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a **série de Taylor**:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \begin{array}{l} \text{Série de Taylor} \\ \text{da função } f \end{array} \quad |x - a| < R$$

- Quando $a = 0$ tem-se a **série de Maclaurin**.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \begin{array}{l} \text{Série de Maclaurin} \\ \text{da função } f \end{array}$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

quando
 $n \rightarrow \infty$

✓ pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e $R = \infty$.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ por uma série.

✓ Partindo da série da exponencial e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Trocando x na série de e^x por x^2 :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^3)^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

✓ A primitiva da função $f(x) = e^{x^2}$ é então:

$$\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

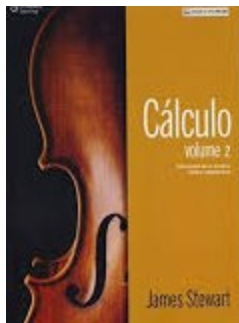
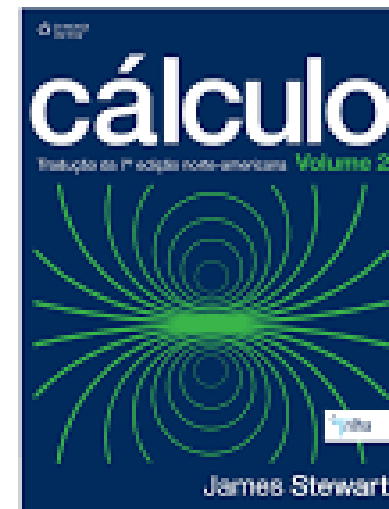
$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

- ❖ Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.
- ❖ O resultado da integral definida será uma aproximação para o valor real.

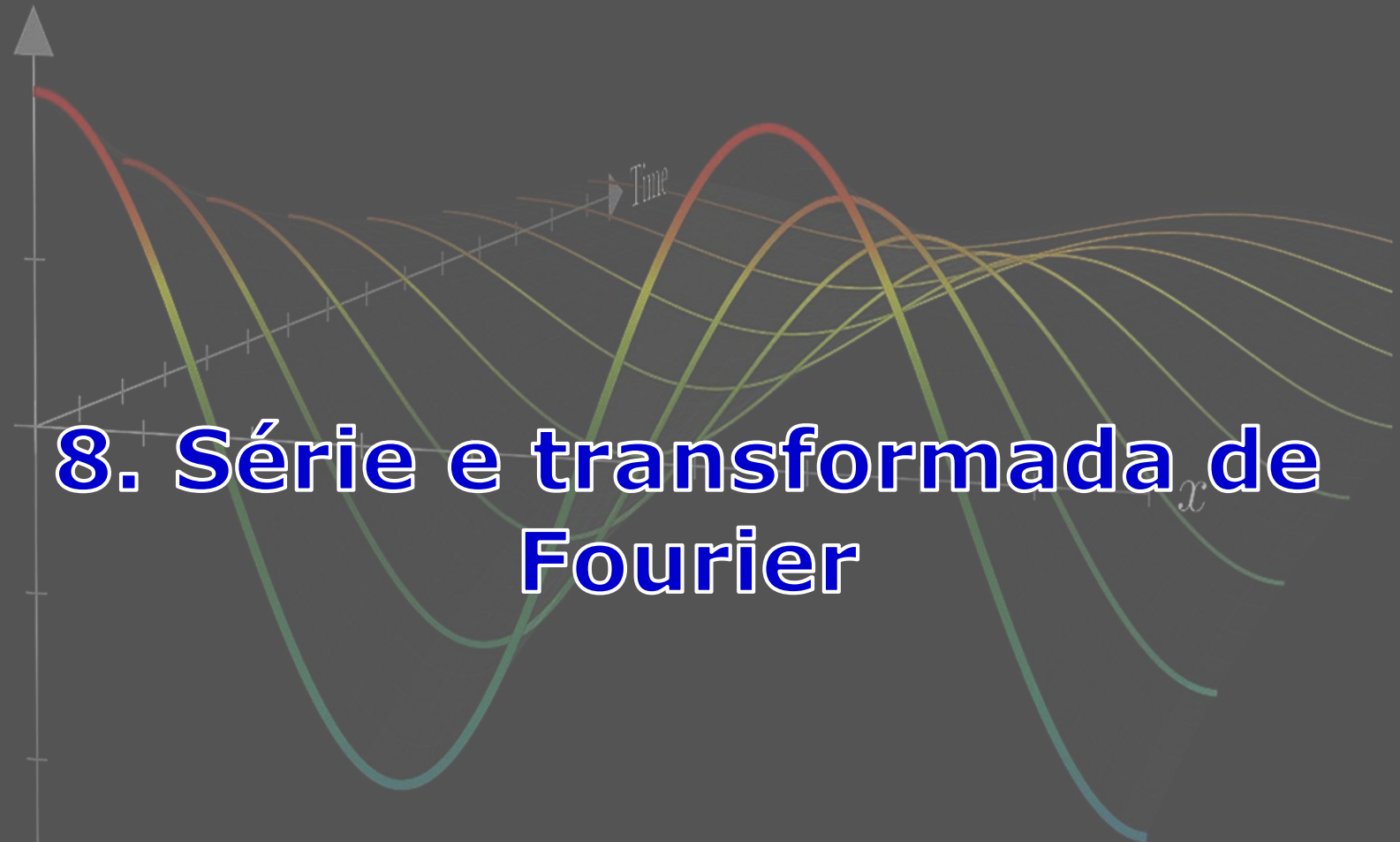
Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7^a ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.**
São Paulo: Cengage, 2016.



8. Série e transformada de Fourier

Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$

➤ Para um intervalo mais geral L .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cancel{\text{sen } nx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cancel{\cos nx} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_n = 0$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

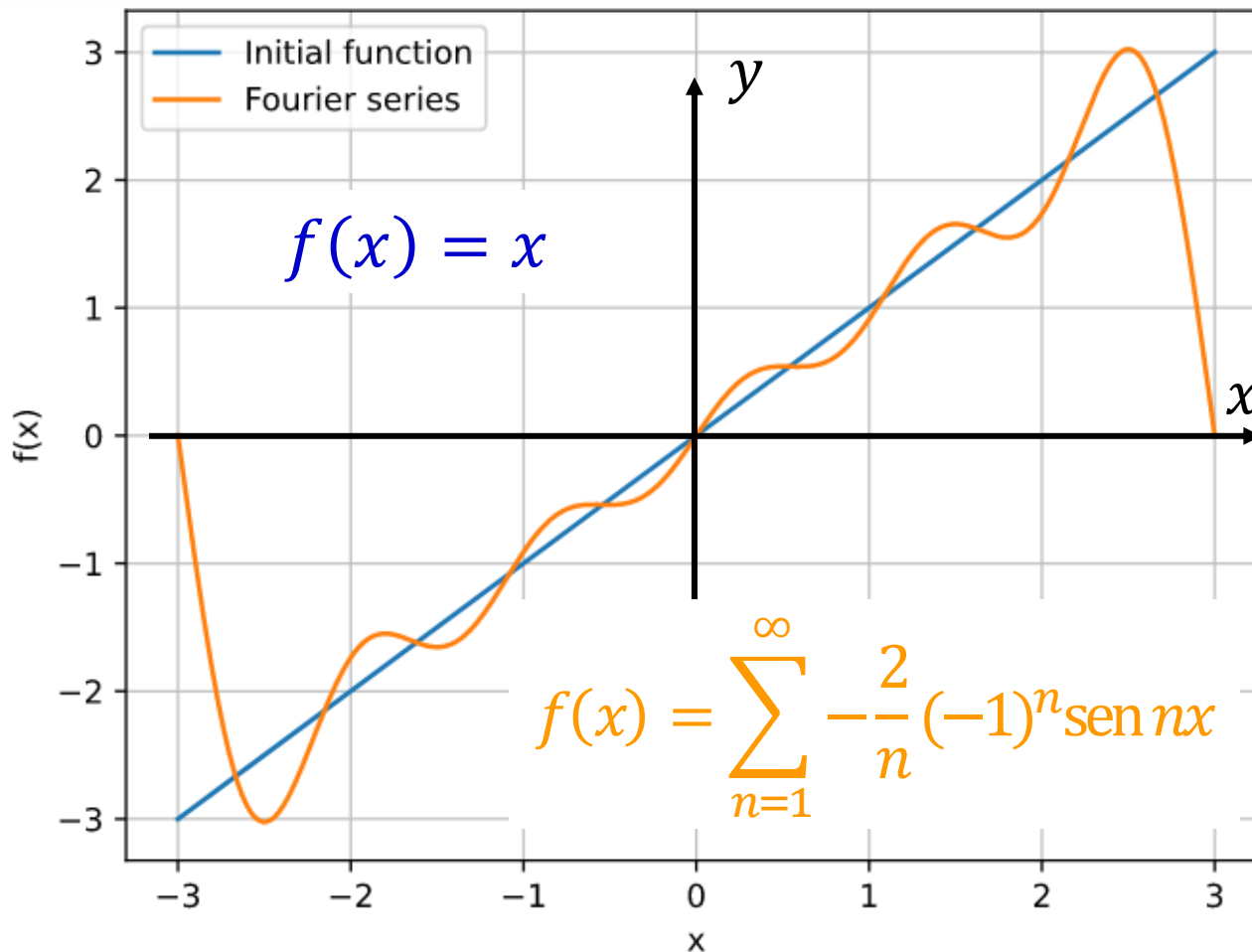
$$b_n = -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2 \cos n\pi \quad b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

✓ Série de Fourier de $f(x) = x$.

$$f(x) = x \cong \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \operatorname{sen} nx$$


Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

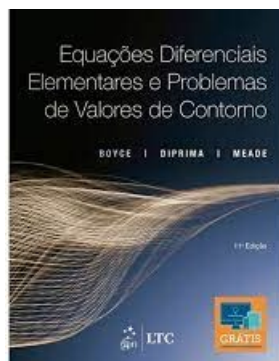
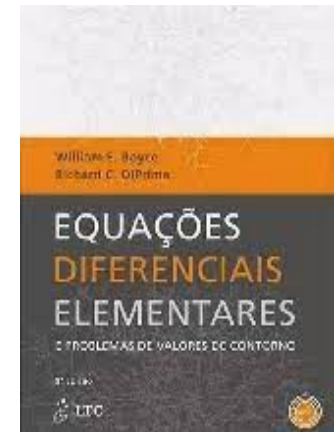
- ✓ Gráfico da série de Fourier de $f(x) = x$ com 5 termos.



Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed. 



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Para um intervalo L mais geral tem-se:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi t}{L}} \quad C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt$$

- Substituindo $L = T/2$ onde T é o período:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n t}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt$$

$$-T/2 < t < T/2$$

3 - Transformada de Fourier

- Seja a série de Fourier na forma exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

- Sabendo que a frequência angular $\omega = 2\pi/T$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega nt}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega nt} dt$$

3 - Transformada de Fourier

- A expressão da Transformada de Fourier é então:

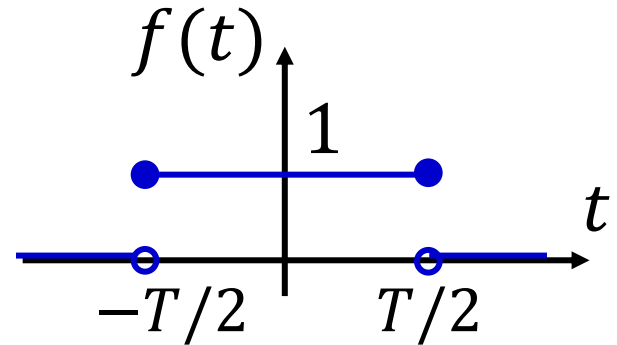
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

- A transformada inversa converte uma função no domínio da frequência para o domínio do tempo:

$$F(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



- Cálculo da Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt} + \int_{-T/2}^{T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 1}{dt} + \int_{T/2}^{\infty} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt}$$

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right)$$

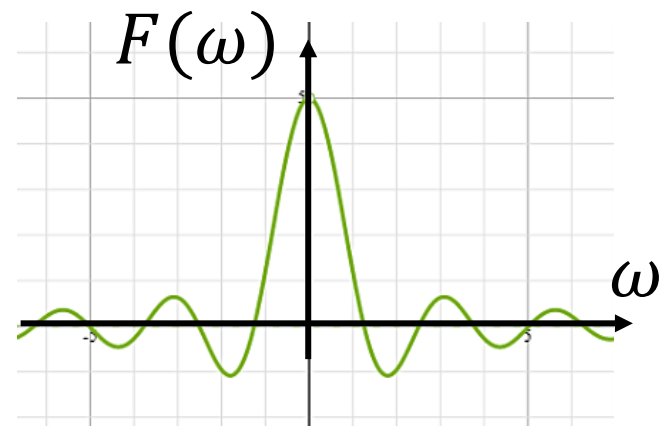
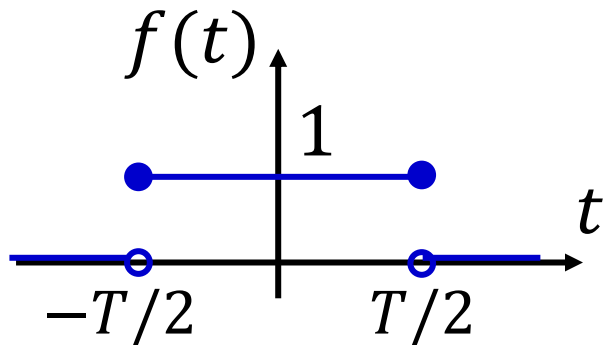
Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$

$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right) = \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



Exercícios: encontrar a Transformada de Fourier.

(a) Considere a função $f(t) = e^{-at^2}$, sendo $a > 0$ constante. Calcular a Transformada de Fourier e traçar o gráfico das duas funções em um software (Usar $a = 1$ nos gráficos).

$$\text{Resp.: } F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4a}$$

(b) Considere a função $f(t) = \cos(t^2)$. Calcular a Transformada de Fourier e traçar o gráfico das duas funções em um software.

$$\text{Resp.: } F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\text{sen} \left(\frac{\omega^2}{4} \right) + \text{cos} \left(\frac{\omega^2}{4} \right) \right]$$

Sugestão para gráficos: <https://pt.symbolab.com/graphing-calculator>

Bibliografia

1. SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio S. (Org.). Análise de Fourier: um livro colaborativo. Porto Alegre: UFRGS, 2018. 103 p. Disponível em:
<https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-af/livro.pdf>. Acesso em: 10 mai 2025.

Sugestões para estudo

- Releia os slides e exemplos apresentados na revisão.
- Refaça pelo menos 2 exercícios da lista de cada tópico.
- Utilize os softwares para gráficos das séries e transformada de Fourier nos exemplos.
- Entenda o processo de resolução, sem decorar as operações.
- Qualquer pequena mudança no exercício pode levar a um resultado completamente diferente.

Bons estudos!