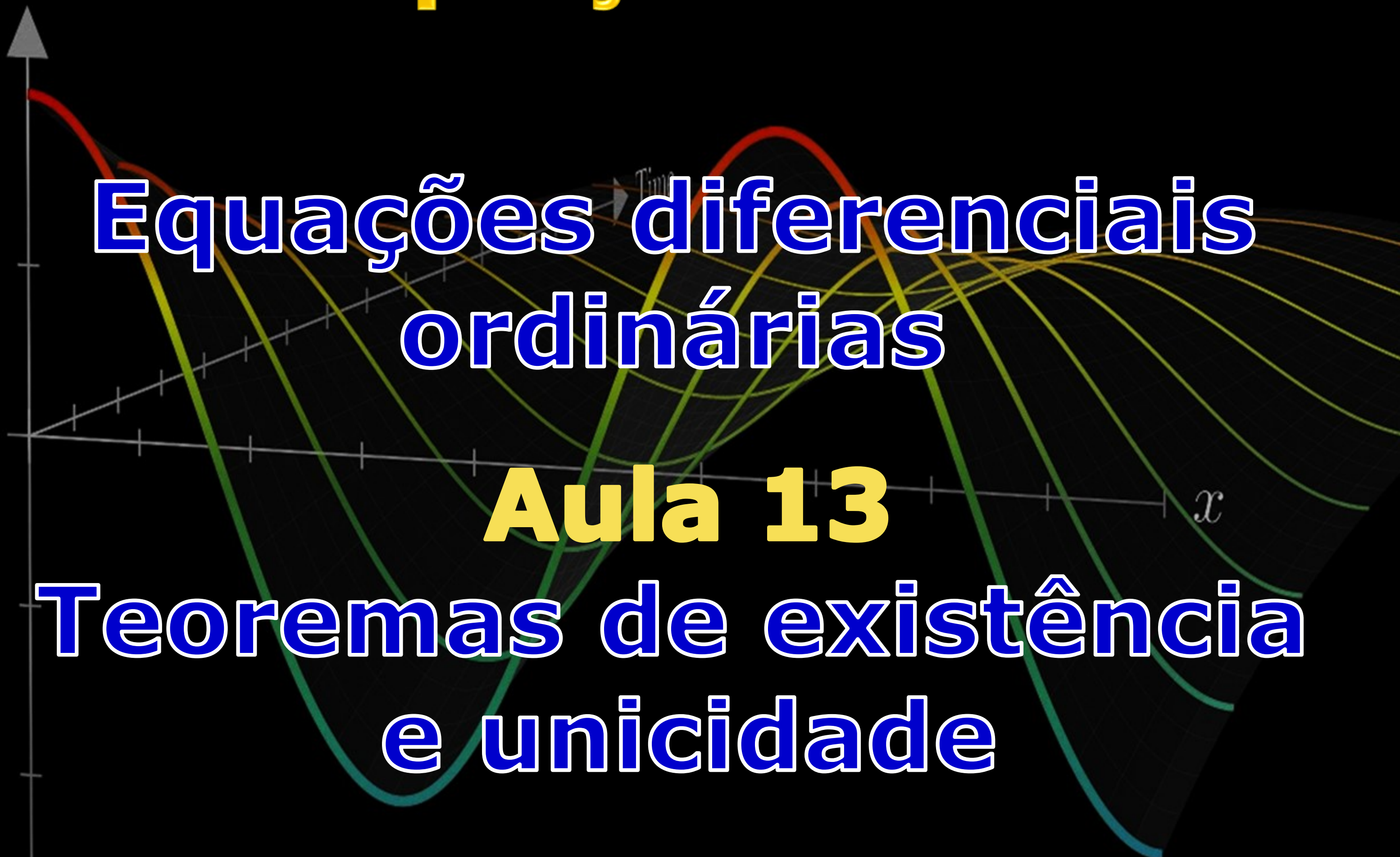
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 13

Teoremas de existência e unicidade

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Teoremas de existência e unicidade.
2. Exemplos.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.

Teoremas de existência e unicidade

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- O teorema seguinte responde estas duas perguntas.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I, contendo a condição inicial e no qual $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

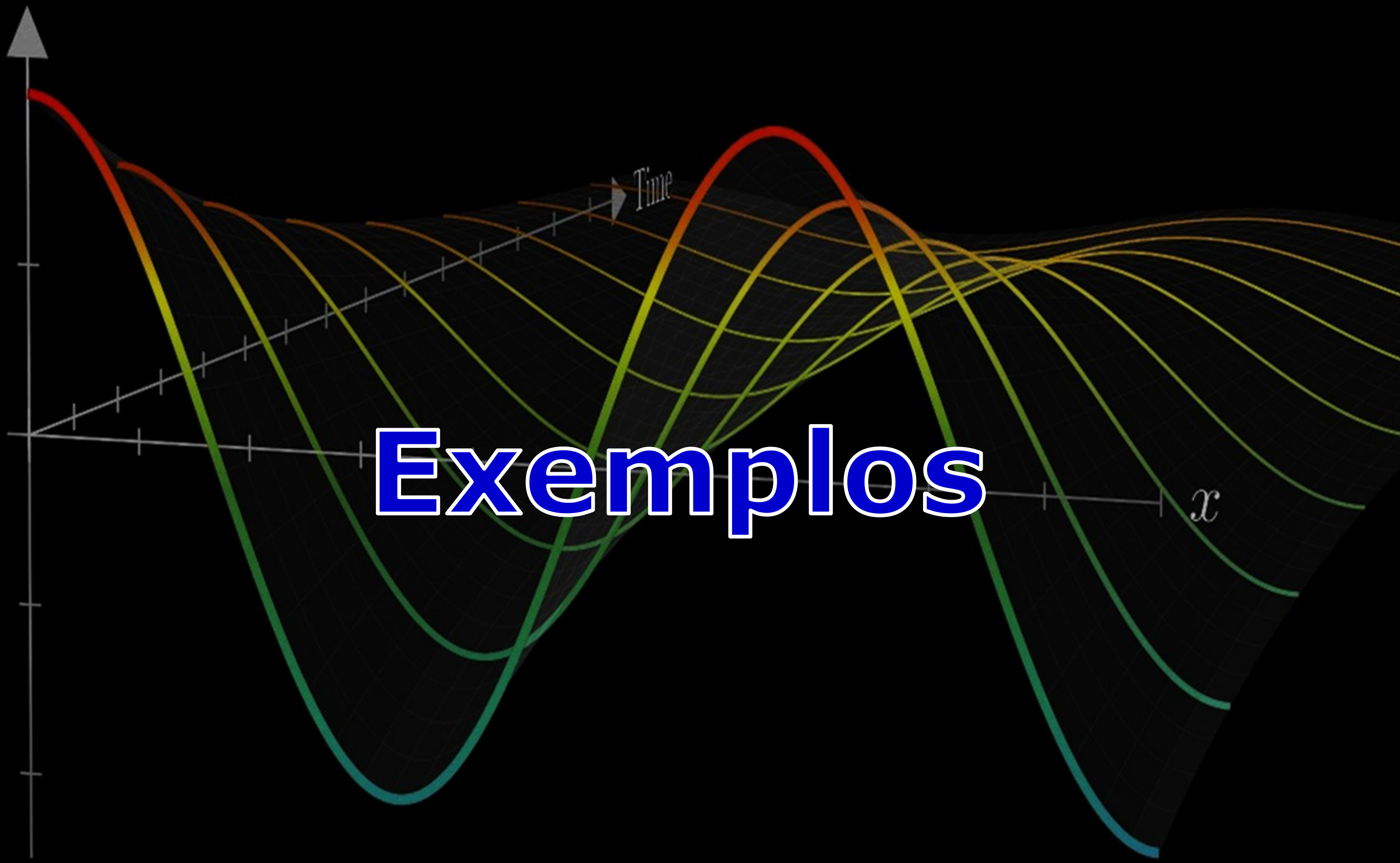
$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I, contendo a condição inicial e no qual $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que $p(t)$e $g(t)$ forem descontínuas.*

Exemplos



Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t,$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

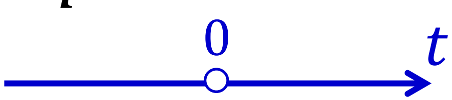
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



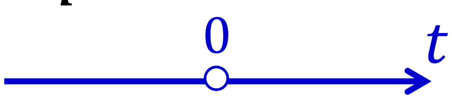
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$

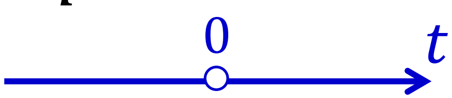
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$
- ✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma única solução no intervalo $(0, +\infty)$ para t.

Para depois desta aula:

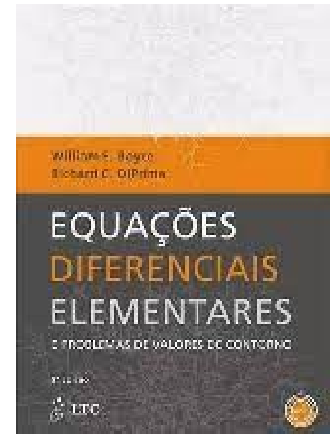
- Estudar seções 2.4 e 2.6 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.4 e 2.6 do Boyce.

Próxima aula:

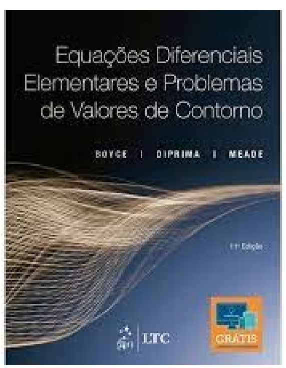
- Equações diferenciais de 2ª ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.