

# Habilidades **Matemáticas**

CUADERNILLO DE ACTIVIDADES  
PARA TERCERO DE SECUNDARIA

Recopilación: Prof. Arturo Villanueva

## **Estimados alumnos y alumnas:**

Cuando practicas un deporte y quieres llegar a destacar en él, entrenas constantemente para llegar a ser el mejor. Por ejemplo, para jugar bien al fútbol, es importante saber recibir el balón, dar pases correctamente y anotar goles.

Con las matemáticas ocurre algo muy similar: para poder resolver problemas, algo que te puede ayudar de manera significativa es seguir el proceso de matematización, que consiste de cinco pasos sencillos:

1. **Identificar un problema de tu entorno que pueda ser tratado como un problema matemático**, desde situaciones sencillas, como por ejemplo, medir un objeto, ver cuánto cabe en él, hasta saber calcular el precio de un producto si se aplica un porcentaje de descuento.
2. **Identificar el conocimiento matemático necesario para resolver el problema**, comenzando por leer bien el problema para comprender de qué o de quién se habla y saber qué operaciones necesitas hacer para resolverlo.
3. **Formular un modelo matemático que represente el problema**, que pueden ser dibujos, barras, gráficas, fórmulas, etc., en donde se ilustre la información obtenida del problema.
4. **Resolver el problema utilizando fórmulas, procedimientos o métodos** que ya conoces y que te pueden ayudar a dar solución, planteando varias estrategias diferentes para resolverlo.
5. **Interpretar la solución del problema en tu vida cotidiana** escribiendo la respuesta siempre como una oración completa donde expreses el resultado obtenido, para que cualquier persona que lo vea lo pueda entender claramente.

Tomando en cuenta lo anterior, I.. te ofrece el presente documento de apoyo denominado ***Cuadernillo de actividades para desarrollo de habilidades matemáticas***, el cual está integrado por una serie de actividades que te servirán de apoyo para repasar todos los contenidos que estudias a lo largo del ciclo escolar en la asignatura de matemáticas, fortaleciendo tus habilidades para convertirte en una persona capaz de resolver y comprender situaciones de la vida cotidiana a través del lenguaje matemático, obteniendo herramientas y conceptos que te ayuden a ser capaz de construir nuevos conocimientos y poderlos compartir a las personas que te rodean y sentirte creativo, seguro de ti mismo, útil y competente, además de prepararte, de forma amigable, para las evaluaciones estatales y nacionales.

Es un cuadernillo de apoyo, cuyo propósito no es que apruebes un examen, sino que te sientas cada vez más seguro de lo que aprendes en clase, de modo que los exámenes y, sobre todo, la aplicación de las matemáticas en tu vida diaria, te resulte más fácil y natural.

Te invitamos a que encuentres en este cuadernillo una forma sencilla y agradable para identificar tus debilidades y fortalezas y potencializar tus habilidades matemáticas.

## **Estimados. padres de familia:**

Los retos actuales en el ámbito educativo requieren la implementación de nuevas estrategias que logren formar a los estudiantes como seres capaces de enfrentar y responder a los problemas de la vida actual, y por lo tanto, ante el mundo que los rodea.

La enseñanza actual de las matemáticas considera importante que el fortalecer las habilidades y conocimientos matemáticos ayudará a los alumnos a que se interesen en buscar la forma de resolver los problemas que se les plantean, compartiendo sus ideas, reflexionando, mostrando una actitud de gusto por aprender los contenidos matemáticos, experimentando en su entorno escolar con la guía adecuada de los docentes y dentro del entorno familiar, ya que a través de éstos los alumnos pueden reafirmar sus conocimientos, no sólo en el área de matemáticas, sino en todas las asignaturas, fomentando con ello un crecimiento académico y personal.

Por tal motivo, se diseñó el **cuadernillo de actividades para el desarrollo de habilidades matemáticas**, como una herramienta de acompañamiento y apoyo para que los alumnos refuercen sus habilidades y conocimientos matemáticos a partir del trabajo conjunto entre ustedes: los docentes detectando las áreas que es necesario fortalecer en sus alumnos, y los padres de familia dando seguimiento a los avances de sus hijos.

Está dividido en cinco bloques, al igual que el plan de estudios vigente de la Secretaría de Educación Pública, y apegado a los contenidos del programa para la asignatura de matemáticas. Cada tema inicia con la fundamentación teórica, una serie de ejemplos y después las actividades que el alumno tiene que resolver. Al final de cada bloque, se presenta una autoevaluación tipo ENLACE para reforzar lo practicado en el bloque, y que el alumno pueda medir su aprendizaje.

No cabe más que recordarles que para la implementación de este recurso, y para seguir fomentando el gusto por las matemáticas en nuestros alumnos e hijos, es fundamental la participación y compromiso de ustedes.

.

## Índice

### Bloque 1

<b>Sentido numérico y pensamiento algebraico</b> .....	6
Factorizar expresiones.....	6
<b>Forma, espacio y medida</b> .....	22
Criterios de congruencia de triángulos.....	22
Posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias.....	26
Ángulos en la circunferencia.....	29
Cálculo de ángulos, arcos, sectores circulares y de la corona.....	33
<b>Manejo de la información</b> .....	37
Razón de cambio.....	37
Organización y representación de la información.....	39
<b>Autoevaluación bloque 1</b> .....	41

### Bloque 2

Sentido numérico y pensamiento algebraico.....	44
Ecuaciones no lineales.....	44
Factorización en la resolución de ecuaciones.....	53
<b>Forma, espacio y medida</b> .....	56
Figuras semejantes.....	56
Criterios de semejanza de triángulos.....	58
<b>Manejo de la información</b> .....	62
Índices de diversas situaciones.....	62
Simulación.....	65
<b>Autoevaluación bloque 2</b> .....	67

### Bloque 3

<b>Sentido numérico y pensamiento algebraico</b> .....	71
Funciones y expresiones algebraicas.....	71
Fórmula general.....	74

<b>Forma, espacio y medida</b> .....	79
Teorema de Tales.....	79
Homotecia de figura.....	81
<b>Manejo de la información</b> .....	83
Gráficas de relaciones funcionales. ....	83
Forma y posición de la curva. ....	85
Gráficas formadas por secciones rectas y curvas. ....	89
<b>Autoevaluación bloque 3</b> .....	91
<b>Bloque 4</b>	
<b>Sentido numérico y pensamiento algebraico</b> .....	94
Sucesiones numéricas y figurativas. ....	94
<b>Forma, espacio y medida</b> .....	98
Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas. ....	98
Razones trigonométricas. ....	100
<b>Manejo de la información</b> .....	103
Crecimiento aritmético y geométrico. ....	103
Representación de la información.....	105
<b>Autoevaluación bloque 4</b> .....	107
<b>Bloque 5</b>	
<b>Sentido numérico y pensamiento algebraico</b> .....	110
Ecuación lineal, cuadrática y sistema de ecuaciones.....	110
<b>Forma, espacio y medida</b> .....	115
Cilindros, conos y esferas. ....	115
Justificación de fórmulas.....	122
Estimar y calcular volúmenes.....	124
<b>Manejo de la información</b> .....	127
Gráficas de caja-brazos. ....	127
Medidas de localización del centro: ....	130
<b>Autoevaluación del bloque</b> .....	133

## Bloque 1

### Sentido numérico y pensamiento algebraico.

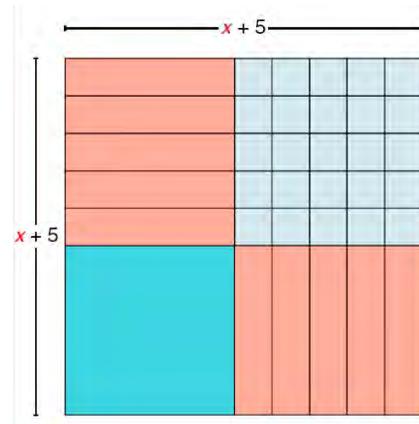
#### Factorizar expresiones.

Simplificar procedimientos siempre ha sido un gran reto; cuando se logra, se considera una situación notable. Esta es la razón por lo que a determinadas multiplicaciones (productos) con expresiones algebraicas se les considera como **productos notables**.

#### Cuadrado de un binomio.

$$(x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$$

El cuadrado de un binomio se obtiene sumando el cuadrado del primer término, el doble producto del primer término por el segundo y el cuadrado del segundo término.



Ejemplo:  $(x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2 =$

$$x^2 + 2[(x)(5)] + 5^2$$

Resuelve:  $x^2 + 10x + 25$  El resultado es un **trinomio cuadrado perfecto**.

1.  $(2a + b)^2 =$

2.  $(m - 3n)^2 =$

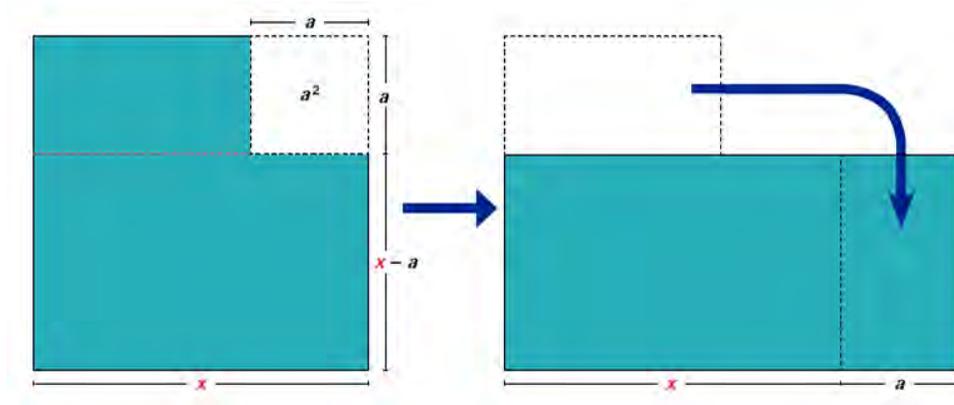
3.  $(-2x + 3y)^2 =$

4.  $(-a - 5)^2 =$

5.  $(2x^2 + y^3)^2 =$

**Producto de binomios conjugados.**

$$(x + a)(x - a) =$$



El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común, menos el cuadrado del otro término.

Ejemplo:  $(x + a)(x - a) = x^2 - xa + xa - a^2 = x^2 - a^2$  El resultado es una **diferencia de cuadrados**.

Resuelve:

1.  $(a - 3b)(a + 3b) =$

2.  $(-x + 5)(-x - 5) =$

3.  $(-4x + y)(4x + y) =$

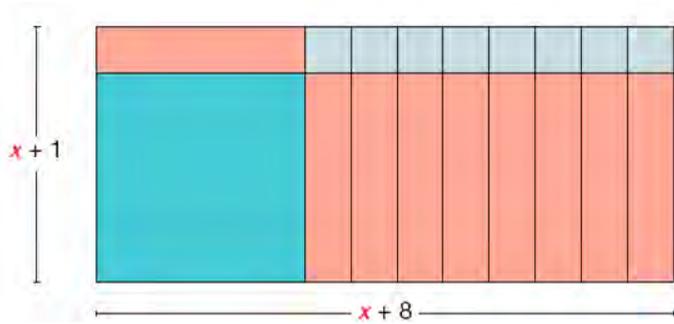
4.  $(2m - 3n)(-2m - 3n) =$

5.  $(3a^2b + 2a)(3a^2b - 2a) =$

6.  $(-5x^2y^3 + 2xy^2)(5x^2y^3 + 2xy^2) =$

**Producto de dos binomios que tienen un término común.**

$$(x + 8)(x + 1) =$$



El producto de dos binomios que tienen un término común, se obtiene sumando el cuadrado del término común, el producto de este término por la suma de los términos no comunes y el producto de estos dos últimos.

Ejemplo:  $(x + 8)(x + 1) = x^2 + x(8 + 1) + (8)(1) = x^2 + 9x + 8$

Resuelve:

1.  $(a + 5)(a + 8) =$

2.  $(y + 7)(y - 4) =$

3.  $(m^3 - 6)(m^3 + 2) =$

4.  $(3a + 5)(3a + 2) =$

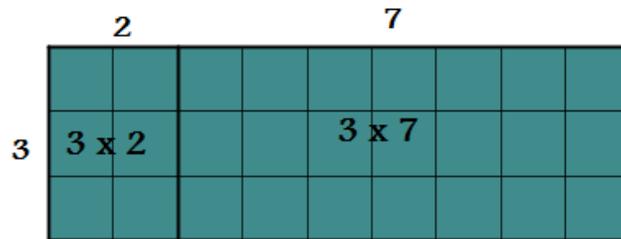
5.  $(2x^2 - 4)(2x^2 + 5) =$

6.  $(6a^3 + b)(6a^3 + c) =$

**Factorización:**

**Factorizar** es ver una suma como una multiplicación. La siguiente información da fundamento a este conocimiento y habilidad. La factorización se basa en el:

Axioma distributivo



$$(3 \times 2) + (3 \times 7) = 3 \times (2 + 7)$$

$$\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}; ab + ac = a(b+c) \wedge ba + ca = (b+c)a$$

*“Para todo número  $a$ ,  $b$  y  $c$  que pertenecen a los números reales; la expresión  $ab + ac$  representa el mismo número que la expresión  $a(b + c)$ .”*

La factorización es un proceso de transformación de una suma a producto.

Es decir, expresar un sumando o la suma en una multiplicación:



**Factor común monomio****Procedimiento:**

1. Se identifica el factor común.
2. Se divide cada término del polinomio entre el factor común.
3. Se escribe el factor común y a continuación, dentro de un paréntesis, los cocientes hallados en el paso anterior (cada uno con su respectivo signo).

Ejemplo:  $a^2 + ab =$ *El factor comun es a*

$$a^2 \div a = a$$

$$ab \div a = b$$

$$\therefore a^2 + ab = a(a + b)$$

Resuelve:

1.  $a^2 + ab =$

2.  $b + b^2 =$

3.  $x^2 + x =$

4.  $3a^3 - a^2 =$

5.  $x^3 - 4x^4 =$

6.  $5m^2+15m^3 =$

7.  $ab-bc =$

8.  $X^2y+x^2z =$

9.  $2a^2x+6ax^2 =$

10.  $8m^2-12mn =$

11.  $9a^3x^2-18ax^3 =$

12.  $15c^3d^2+60c^2d^3 =$

**Factor común polinomio****Procedimiento:**

1. Se identifica el factor común.
2. Se divide cada término del polinomio entre el factor común.
3. Se abren dos paréntesis, en el primero se escribe el factor común y en el segundo los cocientes hallados en el paso anterior (cada uno con su respectivo signo).

Ejemplo:  $a(x + 1) + b(x + 1) =$ *El factor común es  $(x + 1)$* 

$$a(x + 1) \div (x + 1) = a$$

$$b(x + 1) \div (x + 1) = b$$

$$\therefore a(x + 1) + b(x + 1) = (x + 1)(a + b)$$

Resuelve:

1.  $a(x+1)+b(x+1) =$

2.  $x(a+1)-3(a+1) =$

3.  $2(x-1)+y(x-1) =$

4.  $m(a-b)+(a-b)n =$

5.  $2x(n-1)-3y(n-1) =$

6.  $a(n+2)+n+2 =$

7.  $x(a+1)-a-1 =$

**Factor común por agrupación de términos****Procedimiento:**

1. Se agrupan los términos convenientemente, utilizando paréntesis.
2. Se saca factor común de cada uno de los paréntesis.
3. Se realiza una segunda factorización (el factor común será, en este caso, el paréntesis).

Ejemplo:  $a^2 + ab + ax + bx =$

$$a^2 + ab + ax + bx = (a^2 + ab) + (ax + bx) \text{ agrupando convenientemente,}$$

$$\rightarrow = a(a + b) + x(a + b) \text{ sacando factor común de cada paréntesis;}$$

$$\therefore = (a + b)(a + x) \text{ factor comun } (a + b).$$

Resuelve:

1.  $a^2+ab+ax+bx =$

2.  $am-bm+an-bn =$

3.  $ax-2bx-2ay+4by =$

4.  $a^2x^2-3bx^2+a^2y^2-3by^2 =$

5.  $3m-2n-2nx^4+3mx^4 =$

6.  $x^2-a^2+x-a^2x =$

7.  $4a^3-1-a^2+4a =$

## Trinomio cuadrado perfecto

Definición: Una cantidad es un cuadrado perfecto cuando es el resultado del producto de dos factores iguales.

Un trinomio cuadrado perfecto es de la forma general  $a^2 + 2ab + b^2$  ó  $a^2 - 2ab + b^2$  y es el producto de los factores  $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$  ó bien  $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$ ; de tal manera que:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  y  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

### Procedimiento:

1. Se ordena el trinomio.
2. Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos.
3. Se halla el doble producto de las raíces obtenidas en el paso anterior.
4. Si el producto hallado en el paso anterior es igual al segundo término del trinomio y si el primero y tercer términos tienen igual signo, se trata de un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal.
5. Se escribe dentro de un paréntesis las raíces cuadradas del primer y tercer término, separadas por el signo del segundo término, y el paréntesis elevado al cuadrado.

Ejemplo:  $a^2 - 2ab + b^2 =$

*a: raíz cuadrada del primer término del trinomio*

*b: raíz cuadrada del tercer término del trinomio*

*2ab (doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos): segundo término del trinomio*

*Los signos del primer y tercer términos son ambos positivos*

*Por lo tanto, se trata de un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:*

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Resuelve:

1.  $a^2 - 2ab + b^2 =$

2.  $a^2 + 2ab + b^2 =$

3.  $x^2 - 2x + 1 =$

4.  $y^4 + 1 + 2y^2 =$

5.  $a^2 - 10a + 25 =$

6.  $9 - 6x + x^2 =$

7.  $16 + 40x^2 + 25x^4 =$

### Diferencia de cuadrados

#### Procedimiento:

1. Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo.
2. Se abren dos paréntesis.
3. En el primer paréntesis se escribe la suma, y en el segundo la diferencia, de las raíces halladas en el paso 1.

Ejemplo:  $x^2 - y^2 =$

*x*: raíz cuadrada del minuendo

*y*: raíz cuadrada del sustraendo

De tal manera que:  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Resuelve:

1.  $x^2 - y^2 =$

2.  $a^2 - 1 =$

3.  $a^2 - 4 =$

4.  $9 - b^2 =$

5.  $1 - 4m^2 =$

6.  $16 - n^2 =$

7.  $a^2 - 25 =$

8.  $1 - y^2 =$

**Trinomio de la forma  $x^2+bx+c$** **Procedimiento:**

1. Se ordena el trinomio.
2. Se abren dos paréntesis, en cada uno de los cuales se escribirá un binomio.
3. Se saca la raíz cuadrada del primer término del trinomio, esta raíz será el primer término de cada uno de los paréntesis.
4. El signo que separe al binomio del primer paréntesis será el segundo signo del trinomio.
5. Se aplica la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos del trinomio; éste será el signo que separe el binomio del segundo paréntesis.
6. Si los signos son iguales, se buscan dos números cuya suma ( $h + i$ ) sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio y cuyo producto ( $hi$ ) sea igual al tercer término del trinomio.
7. Si los signos son diferentes, se buscan dos números cuya diferencia sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio y cuyo producto sea igual al tercer término del trinomio.
8. El mayor de los números hallados en uno de los pasos anteriores será el segundo término del primer paréntesis, el menor de los números será el segundo término del segundo paréntesis.
9. Si el tercer término es un número muy grande se descompone en sus factores primos para facilitar la búsqueda de los números requeridos en los pasos 7 y 8.

**Nota:** para factorizar de esta forma es necesario que la parte literal del segundo término sea la raíz cuadrada de su correspondiente parte literal en el primer término.

$$x^2 + (h + i)x + hi$$

Ejemplo:  $x^4 + 5x^2 + 4 =$

$x^2$ : raíz cuadrada del primer término del trinomio

+: signo del segundo término del trinomio

+por + da+: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$4 + 1 = 5$ : coeficiente del segundo término del trinomio

$4 \times 1 = 4$ : coeficiente del tercer término del trinomio

De tal manera que:  $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$

Resuelve:

1.  $x^4+5x^2+4 =$

2.  $x^6 - 6x^3 - 7 =$

3.  $x^8 - 2x^4 - 80 =$

4.  $x^2y^2 + xy - 12 =$

5.  $(4x)^2 - 2(4x) - 15 =$

6.  $x^8y^8 - 15ax^4y^4 - 100a^2 =$

7.  $(a-1)^2 + 3(a-1) - 108 =$

8.  $m^2 + abcm - 56a^2b^2c^2 =$

9.  $(7x^2)^2 + 24(7x^2) + 128 =$

**Suma o diferencia de cubos****Procedimiento:**

1. Se abren dos paréntesis.
2. En el primer paréntesis se escribe la suma o la diferencia, según el caso, de las raíces cúbicas de los dos términos.
3. En el segundo paréntesis se escribe el cuadrado de la primera raíz, menos (si es una suma de cubos) o más (si es una diferencia de cubos) el producto de la primera raíz por la segunda, mas el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:  $1 + a^3$

$$1 + a^3 = 1^3 + a^3 \quad \text{tiene la forma } a^3 + b^3$$

1: raíz cúbica del primer término

a: raíz cúbica del segundo término

$$\text{De tal manera que: } 1 + a^3 = (1 + a)(1^2 - (1)(a) + a^2)$$

$$\therefore 1 + a^3 = (1 + a)(1 - a + a^2)$$

Resuelve:

1.  $1+a^3 =$

2.  $1-a^3 =$

3.  $x^3+y^3 =$

4.  $m^3 - n^3 =$

5.  $a^3 - 1 =$

6.  $64a^3 - 729 =$

7.  $a^3b^3 - x^6 =$

8.  $27m^6 + 343n^9 =$

9.  $216 - x^{12} =$

**Forma, espacio y medida.****Criterios de congruencia de triángulos.**

Congruencia. Dícese que dos figuras son congruentes cuando pueden hacerse coincidir en todas sus partes; esto es, cuando son iguales.

Triángulos congruentes.

Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia biyectiva entre sus vértices



$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'$$

Tal que los lados y los ángulos correspondientes son congruentes, es decir,

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad \overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$

$$\hat{A} \cong \hat{A'} \quad \hat{B} \cong \hat{B'} \quad \hat{C} \cong \hat{C'}$$

Existe congruencia en dos triángulos si sus lados y sus ángulos correspondientes lo son.

**Criterios** de congruencia de triángulos:

**Criterio – Lado, lado, lado**

Si los **tres lados** de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si los tres ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, ¿son entonces congruentes los triángulos?

---



---



---

**Criterio – Lado, ángulo, lado**

Si **dos lados** y el **ángulo** que forman en un triángulo son respectivamente congruentes a los dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos congruentes, ¿qué podemos expresar de los mismos?

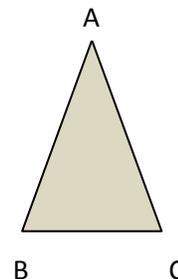
**Criterio – Ángulo, lado, ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen iguales respectivamente un **lado** y los ángulos adyacentes a ese lado.

Dos ángulos son adyacentes a un lado cuando ese lado es común a los **dos ángulos**.

Estos tres criterios de congruencia de triángulos, se aceptan por el momento como axiomas, serán una especie de referencia inicial. Con ellos se podrán demostrar interesantes propiedades de polígonos.

A partir de este triángulo isósceles



Por cierto ¿por qué es isósceles?

1. Traza la mediana AM; en el  $\widehat{BAC}$  (triángulo isósceles de arriba)

2. ¿Qué puedes afirmar?

3. Tomando como referencia el Criterio-De los tres lados ¿qué puedes aseverar?

4. Si los ángulos  $\widehat{AMB}$  y  $\widehat{AMC}$  son congruentes, ¿Qué podemos asegurar de la mediana?

5. De la congruencia de los triángulos mencionados se deduce también que:

$$\angle BMA \cong \angle CMA$$

¿Cuánto miden entre los dos? \_\_\_\_\_

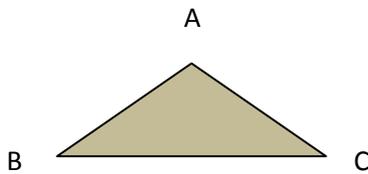
y...¿Cada uno de ellos? \_\_\_\_\_

En este contexto ¿qué podemos sostener de  $\overline{AM}$ ?

Teorema:

En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

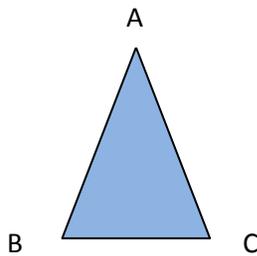
6.



$$AB = AC \quad \angle B = 30^\circ$$

$$\angle C = \quad \angle A =$$

7.

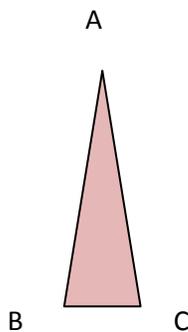


$$\angle C = 70^\circ \quad AB = AC$$

$$\angle A =$$

$$\angle B =$$

8.

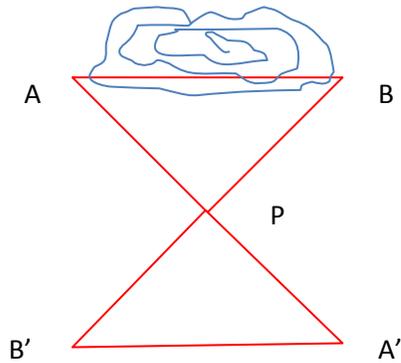


$$\angle A = \quad \angle B = 80^\circ$$

$$\angle C = \quad AB = AC$$

9. Demuéstrese que la distancia  $AB$  de un lado a otro de una laguna puede hallarse así:

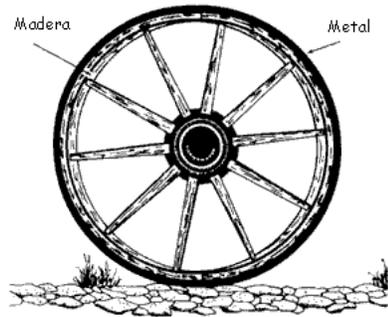
En un punto conveniente  $P$  se clava una vara. Mirando en la dirección a  $AP$ , se hace clavar una estaca en  $A'$ , haciendo  $PA' = PA$ . De igual manera se determina  $B'$ , mirando de  $B$  a  $P$  y haciendo  $PB' = PB$ . Después se mide la distancia  $A'B'$ .



10. ¿Cómo puedes justificar que en el siguiente paralelogramo sus lados opuestos son iguales?



## Posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias.



¿Qué es lo esencial en una rueda?

---

---

---

---

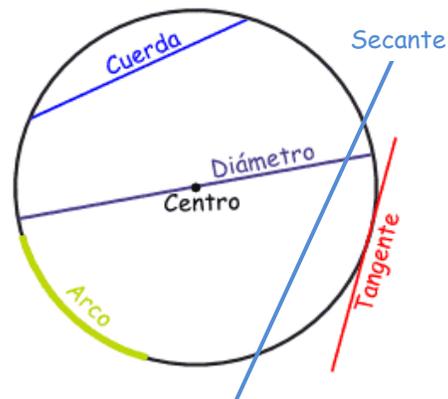
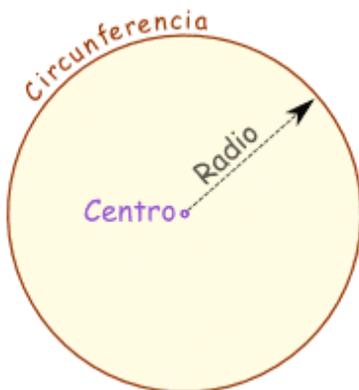
Las figuras geométricas que representan a las ruedas son los círculos.

Definición. Llámese **círculo** una figura plana limitada por una curva cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado **centro**.

La curva se llama **circunferencia**. Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo del plano – el centro.

**Radio**. Segmento rectilíneo que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.  
Longitud constante  $\therefore$  todos los radios de una circunferencia son iguales

La circunferencia queda siempre determinada por su centro y su radio.



**Cuerda.** Segmento rectilíneo que une dos puntos de una circunferencia.

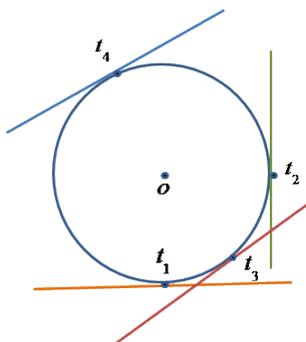
**Arco.** Es una parte cualquiera de la circunferencia comprendida entre dos puntos. Estos dos puntos se llaman extremos del arco. Nomenclatura  $ARCO AB_m$ ,  $ARCO AB_{ma}$ , el subíndice m y ma, hacen referencia a los dos arcos generados por dichos puntos; (m) menor y (ma) mayor respectivamente. Desde luego que si existe un esquema, el arco es explícitamente claro.

**Diámetro.** Es una cuerda que contiene el centro de la circunferencia.

**Secante.** Es cualquier recta que corta una circunferencia de dos puntos.

**Tangente.** Es cualquier recta que contiene uno y sólo un punto de la circunferencia, el cual se llama punto de tangencia y se dice que la recta y la circunferencia son tangentes en ese punto.

De acuerdo a las posiciones de las rectas tangentes a la circunferencia



1. Traza los radios  $OT_1$ ,  $OT_2$ ,  $OT_3$ , y  $OT_4$ . Mide con tu transportador el ángulo que forma cada tangente con el radio por el punto de tangencia y en los espacios siguientes registra la información obtenida.

$T_1$ y $OT_1$	$T_2$ y $OT_2$	$T_3$ y $OT_3$	$T_4$ y $OT_4$
----------------	----------------	----------------	----------------

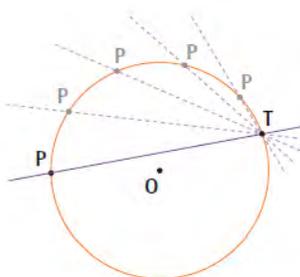
2. En base al ejercicio anterior como defines la recta tangente:

---



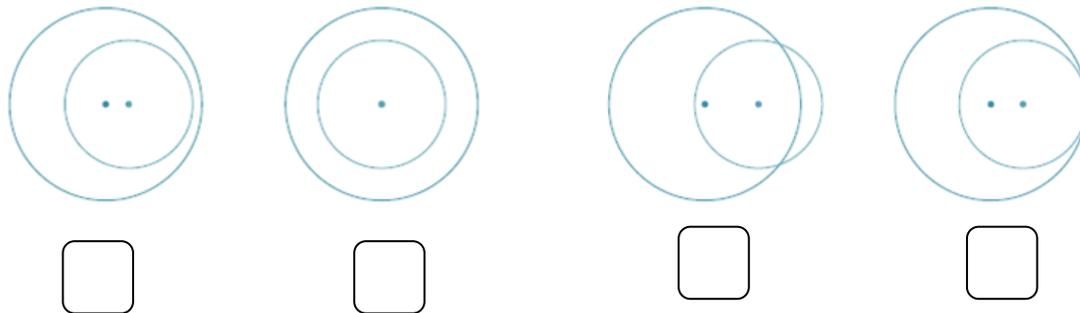
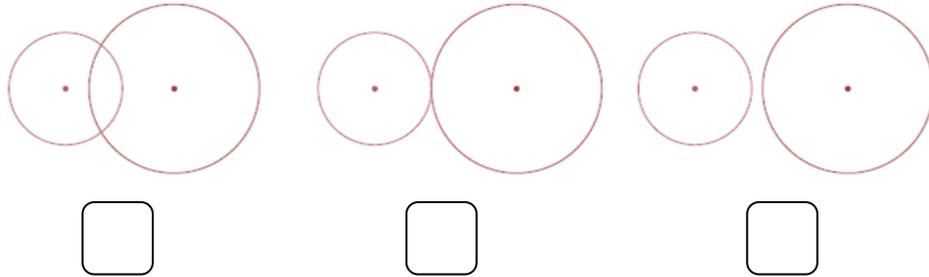
---

3. Observa la siguiente figura



4. ¿Qué sucede con la recta secante cuando el punto  $P$  coincide con el punto  $T$ ?

5. Las siguientes circunferencias manifiestan distintas posiciones, analízalas.

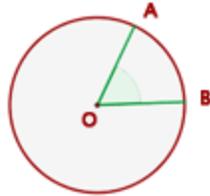


6. Elije el enunciado que corresponda a cada una de las posiciones de las circunferencias y anota su número en el recuadro.

1. Circunferencias secantes	2. Circunferencias ajenas externas	3. Circunferencias ajenas internas
4. Circunferencias concéntricas	5. Circunferencias tangentes externas	6. Circunferencias tangentes internas

## Ángulos en la circunferencia.

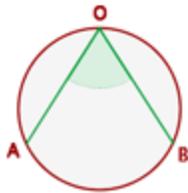
### Ángulo central



**Ubicación:** Vértice en el centro sus lados dos radios.

**Medida:** La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente;  $\angle AOB = \text{ARCO } AB$

### Ángulo inscrito

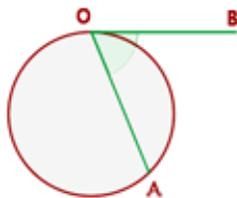


**Ubicación:** Vértice en la circunferencia y sus lados dos secantes.

**Medida:** La mitad del arco que abarca;

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{ARCO } AB.$$

### Ángulo semi-inscrito

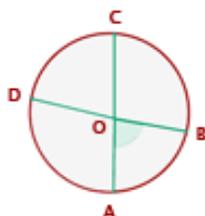


**Ubicación:** Vértice en la circunferencia y sus lados una secantes y una tangente.

**Medida:** La mitad del arco que abarca;

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{ARCO } OA.$$

### Ángulo interior

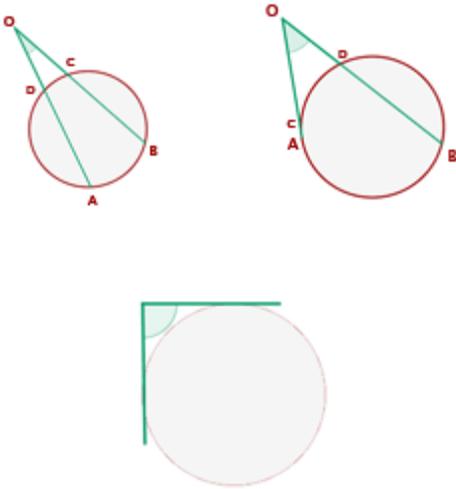


**Ubicación:** Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella.

**Medida:** La mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados;

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{ARCOS } (AB + CD).$$

## Ángulo exterior



**Ubicación:** Vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados son:

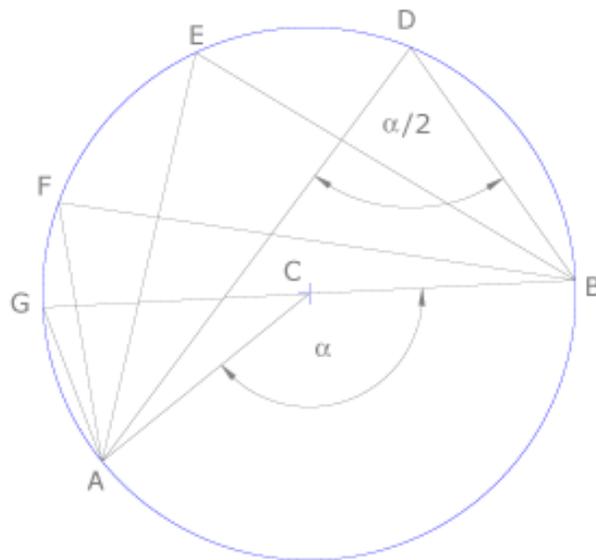
Secantes a ellas.

Uno tangente y otro secante.

Tangentes a ella.

**Medida:** La mitad de la diferencia de los arco que abarcan sus lados sobre la circunferencia;

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{ARCOs} (AB - CD).$$



1. Observa la figura de arriba, identifica ángulos (ubicación y medida) y expresa tu generalización.

---



---



---



---



---

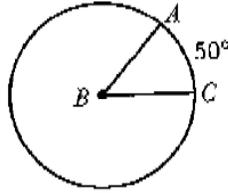


---



---

Ejemplo: Halla el valor de  $x$  si el  $ARCO AC = 50^\circ$  y el  $\angle ABC = (5x + 10)^\circ$



El ángulo  $ABC$  es un ángulo central cuyo arco correspondiente es  $ARCO AC$ ; luego,

$$\angle ABC = ARCO AC$$

$$5x + 10 = 50$$

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

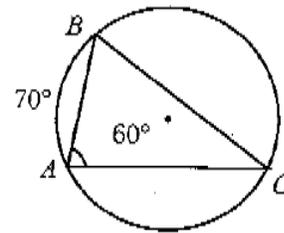
$$5x = 50 - 10$$

$$x = \frac{40}{5}$$

Verificación:  $\angle ABC = (5x + 10)^\circ$   $[5(8) + 10] = (50)^\circ$

Encuentra la medida del ángulo o arco que se te indica.

2. Halla la medida del  $ARCO BC$

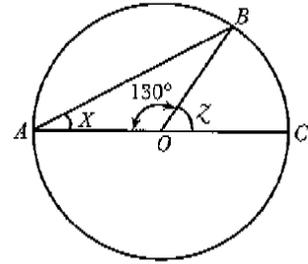


3. Halla la medida del  $\angle C$

4. Halla la medida del  $\angle B$

5. Analiza la figura siguiente, en donde  $\angle AOB = 130^\circ$ , halla:

a) La medida del  $ARCO BC$



b) La medida del  $\angle X$

6. Escribe en los espacios la clasificación que corresponda; ángulo central o ángulo inscrito.

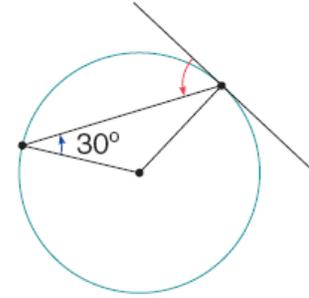
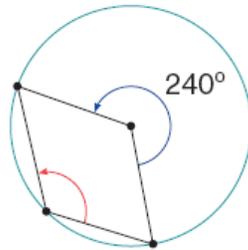
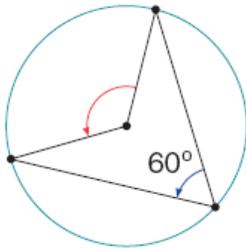
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____

### Cálculo de ángulos, arcos, sectores circulares y de la corona.

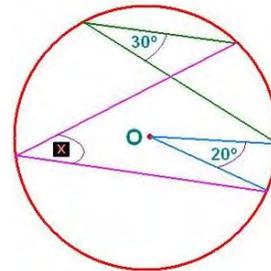
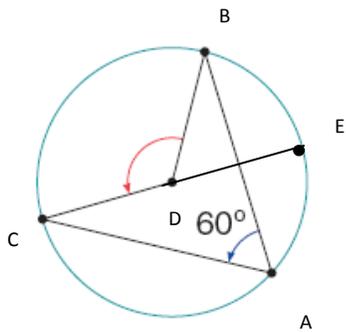
La porción de círculo limitada por dos radios se conoce como sector circular.

El área de un círculo mayor menos el área de un círculo menor, es el área de una corona circular.

1. Determina y anota la medida de cada uno de los ángulos marcados en rojo.



2. Analiza las siguientes figuras y calcula lo que se indica:



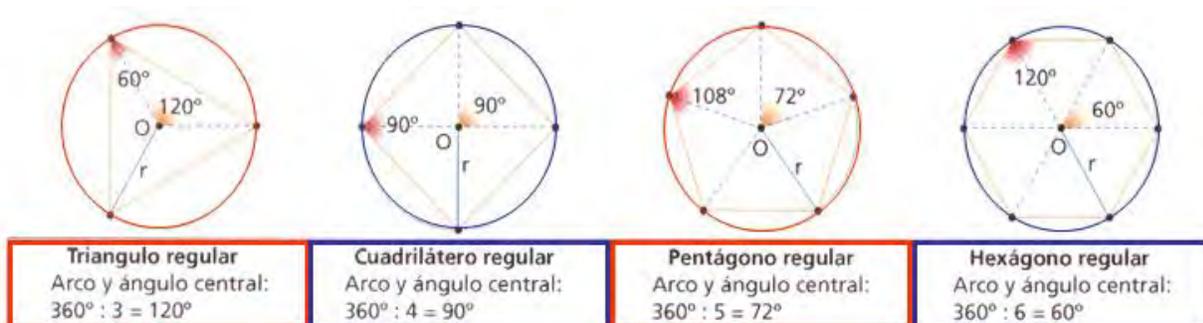
a) Calcula el  $\angle BDE =$

b) Calcula x

3. En las siguientes figuras aparecen cuatro polígonos regulares inscritos en una circunferencia. En cada uno de los polígonos mencionados, la circunferencia se ha dividido en arcos iguales (completar):

Tres de 120°			
--------------	--	--	--

Si la circunferencia tiene una longitud de 60 cm. ¿Cuánto medirá cada uno de los arcos?



--	--	--	--

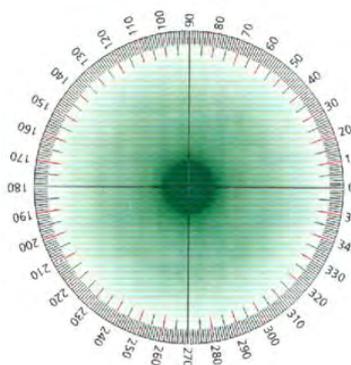
4. ¿Qué puedes afirmar de este cálculo?

---



---

5. En esta figura la circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales. Cada una de estas partes recibe, por definición, el nombre de grado.



Para calcular la longitud del arco de circunferencia que corresponde a un grado, dividimos la longitud de la circunferencia entre 360:

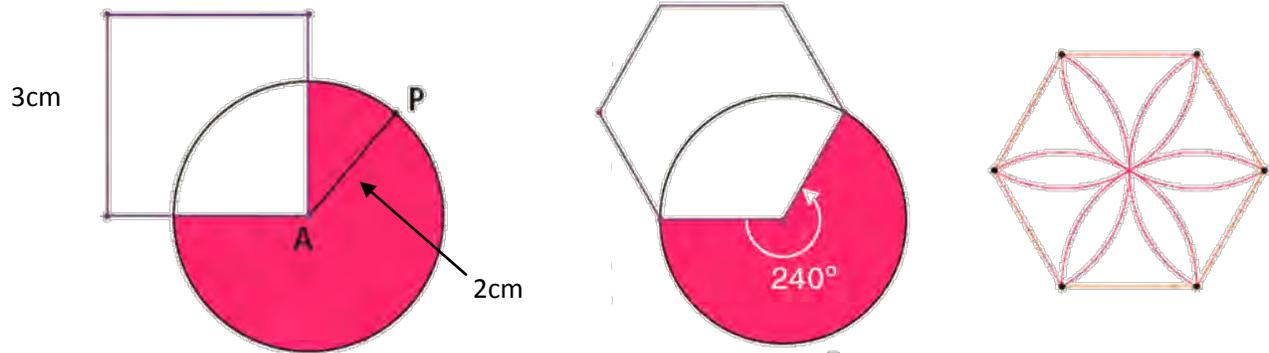
$$L_{ARCO 1^\circ} = \frac{2\pi r}{360}$$

Si el arco de circunferencia midiera  $n$  grados,  $n^\circ$ , su longitud sería:

$$L_{ARCO n^\circ} = \left(\frac{2\pi r}{360}\right)(n^\circ)$$

La longitud de un arco de  $120^\circ$  de una circunferencia de 6 cm de radio es:

6. Calcula la medida de arcos y el área de sectores circulares en circunferencias que tienen su centro en un vértice de un polígono regular y su radio está relacionado al lado del polígono.



a) Indica la figura sombreada que determina el punto P.

b) Expresa el perímetro de la figura anterior.

c) ¿Cuánto mide el área de esa parte de la figura?

d) Determina el área del sector circular que genera el hexágono regular de 2 cm de lado.

e) ¿Cuánto mide el perímetro de la flor? Si el hexágono donde se encuentra inscrita la flor es de 2 cm de lado y 1.73 cm de apotema.

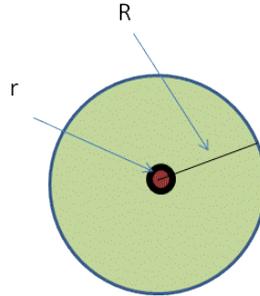
f) ¿Cuánto mide el área de la flor?

7. La fotografía muestra una fuente y las dimensiones de su base.

¿Cuánto mide el área de la superficie de la base de la fuente?



8. En una zona recreativa de forma circular de 120 m de radio, se encuentra una fuente también circular de 4 m de radio, ¿cuál es el área de la zona recreativa?



Recuerda que:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$A = \text{área}$

$\pi = \text{pi}$

$R = \text{Radio mayor}$

$r = \text{radio menor}$

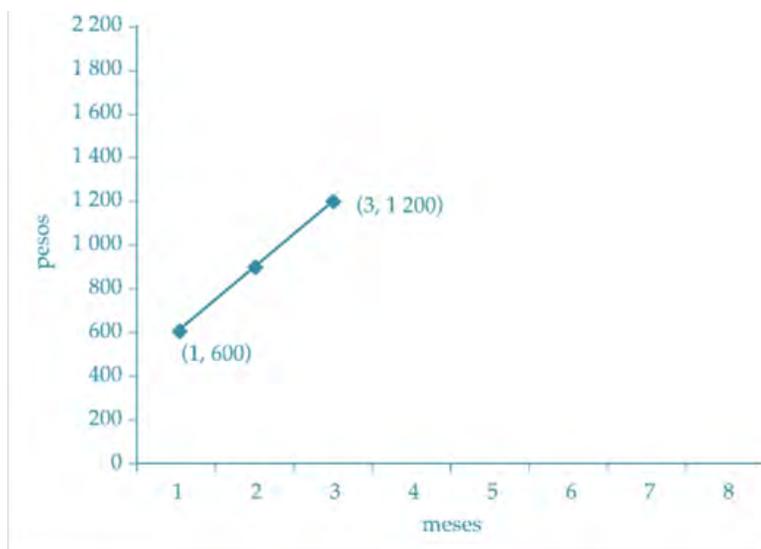
**Manejo de la información.****Razón de cambio.**

Cuando dos conjuntos de cantidades están relacionadas entre sí, se puede estudiar el cambio o incremento de una cantidad respecto al cambio o incremento de la otra.

Al cociente que se obtiene al dividir el incremento de una cantidad entre el incremento correspondiente a la otra se le llama razón de cambio.

Ejemplo: La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año. ¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo, suponiendo que fue el mismo cada mes?

Incremento en el precio de un artículo



En la gráfica el cambio en el precio se indica en la dirección vertical y el cambio en el tiempo en la dirección horizontal.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta \text{ en el precio}}{\Delta \text{ en el tiempo}} = \frac{1200 - 600}{3 - 1} = \frac{600}{2} = 300$$

$\Delta$  símbolo que significa cambio

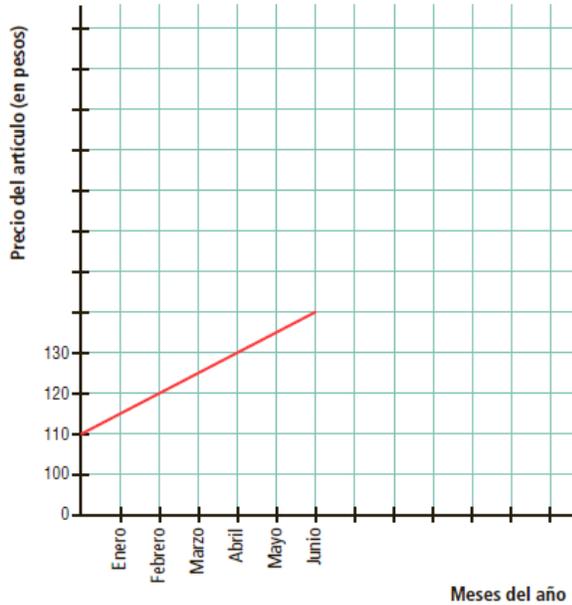
Razón de cambio = pendiente;    Inclinación de la recta

De acuerdo a lo anterior:

1. ¿Cuál será el costo del artículo en el sexto mes?

¿Qué significaría que la pendiente entre el tercero y el cuarto mes fuera mayor?

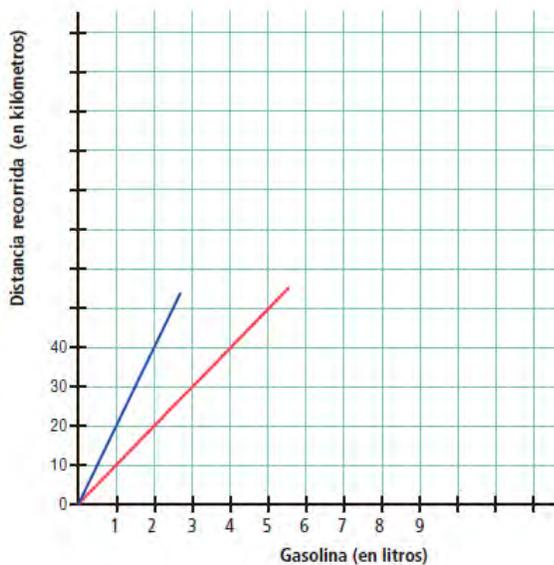
2. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.



a) ¿Cuál es el incremento del artículo por mes?

b) ¿Cuál es la razón de cambio del artículo?

3. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles y la cantidad de gasolina que consumieron.



a) ¿Cuál es la razón de cambio del automóvil rojo?

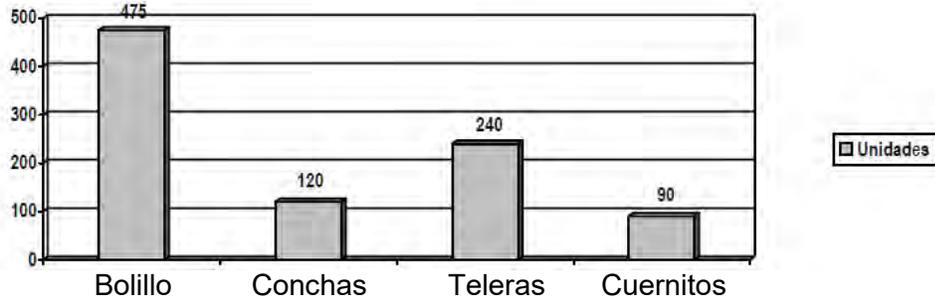
b) ¿Cuál es la razón de cambio del automóvil azul?

c) ¿Qué automóvil tuvo un mejor rendimiento?

## Organización y representación de la información.

En los grados anteriores los alumnos han estudiado diversas representaciones estadísticas (barras, circulares, pictogramas, tablas de frecuencias, polígonos, etc.) y gradualmente las han utilizado para comunicar información proveniente de estudios sencillos o encuestas, diarios o revistas. Realizamos las siguientes actividades para fortalecer esta habilidad.

1. En la panadería “El Pípila” se ha realizado un control de las piezas vendidas en el día y la siguiente gráfica nos muestra los resultados.



¿Cuántas piezas se vendieron en total?

\_\_\_\_\_

¿Cuál es el producto más vendido?

\_\_\_\_\_

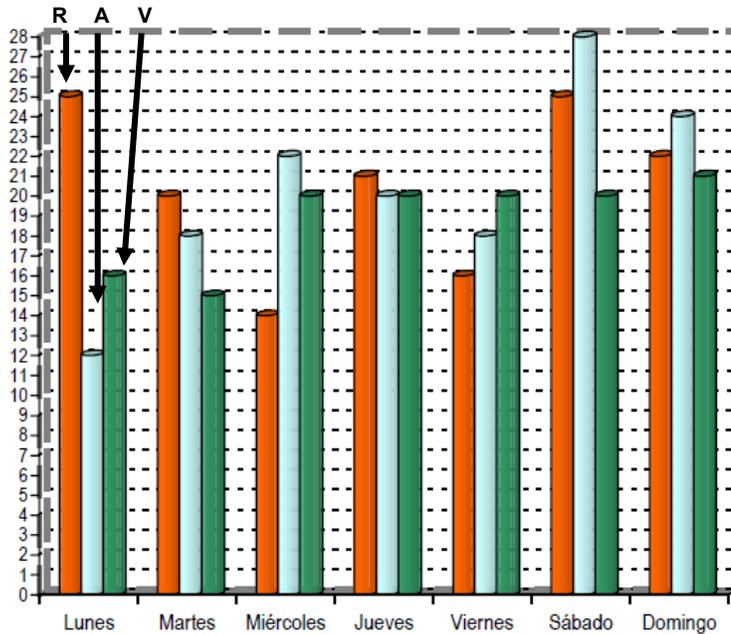
¿Cuál es el producto menos vendido?

\_\_\_\_\_

¿De cuales productos se vendieron más de cien unidades?

\_\_\_\_\_

2. Observa el siguiente gráfico:



R = Carne  
A= Pescado  
V= Verdura

Nota: todas las barras conservan el mismo orden.

En el se muestra el consumo de tres comidas principales durante la semana en un restaurante.

Completa la tabla con los datos que te ofrece la gráfica y posteriormente contesta:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Carne							
Pescado							
Verdura							

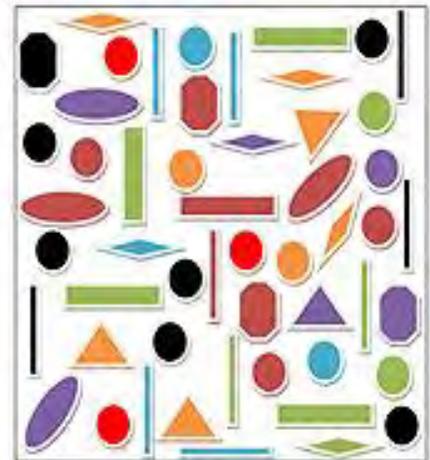
¿Qué día presentó más consumo de pescado? \_\_\_\_\_

¿Cuál días registro menor consumo de verdura? \_\_\_\_\_

¿Qué día se consumió más carne que pescado? \_\_\_\_\_

3. Observa el siguiente conjunto de fichas:

Construye una tabla en donde organices la información:



Elabora el gráfico correspondiente:

**Autoevaluación bloque 1.**1. Subraya el resultado de  $(x + 5)^2$ 

- a)
- $x^2 + 10x + 25$
- b)
- $x^2 + 15x + 25$
- c)
- $x^2 + 25$
- d)
- $x^2 + 10x - 25$

2. Subraya el resultado de  $(2x^2 + y^3)^2$ 

- a)
- $4x^4 + 4x^2y^3 - y^6$
- b)
- $4x^4 + y^6$
- c)
- $4x^4 + 4x^2y^3 + y^6$
- d)
- $4x^4 + 14x^2y^3 + y^6$

3. Subraya el resultado de  $(a - 3b)(a + 3b)$ 

- a)
- $a^2 - 9b$
- b)
- $a^2 - 9b^2$
- c)
- $a^2 + 6ab - 3b^2$
- d)
- $a^2 + 3b^2$

4. Subraya el resultado de  $(x + 8)(x + 1)$ 

- a)
- $x^2 + 8x + 9$
- b)
- $x^2 + 9x + 8$
- c)
- $x^2 - 9$
- d)
- $x^2 + 8$

5. Subraya la factorización que corresponde a  $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$ 

- a)
- $(x^2 + y)(a^2 + 3b)$
- b)
- $(x^2 - y^2)(a^2 + 3b)$
- c)
- $(x + y^2)(a^2 - 3b)$
- d)
- $(x^2 + y^2)(a^2 - 3b)$

6. Subraya la factorización que corresponde a  $x^2 + 4xy + 4y^2$ 

- a)
- $(x + 2y)(x + 2y)$
- b)
- $(x + y)^2$
- c)
- $(x - 2y)^2$
- d)
- $(x + 4y)(x + 4y)$

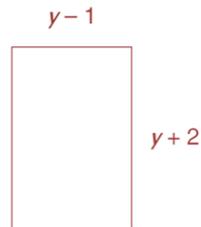
7. Subraya la factorización que corresponde a  $16 - n^2$ 

- a)
- $(2 + n)(8 - n)$
- b)
- $(4 - n)(4 - n)$
- c)
- $(4 + n)(4 - n)$
- d)
- $(4 + n)(4 + n)$

8. Subraya la expresión que representa el área del rectángulo.

- a)
- $y^2 - 2$
- b)
- $y^2 + y - 2$

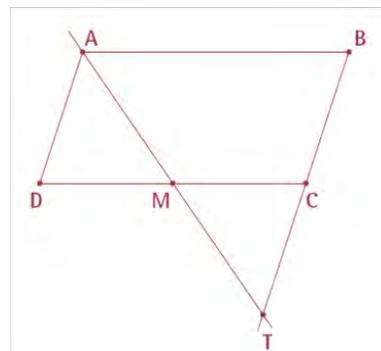
- c)
- $x^2 - 3x - 2$
- d)
- $x^2 - x - 2$



Recuerda subrayar el resultado

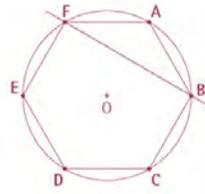
9. En el paralelogramo con vértices **ABCD** se ha denotado con **M** al punto medio del lado **DC**. Se ha prolongado el lado **BC** hasta que se interseque con la recta que pasa por **AM** y al punto de intersección se le ha llamado **T**. Los triángulos **AMD** y **TMC** son congruentes por que criterio.

- a) Criterio de los tres lados  
 b) Criterio alternos internos  
 c) Criterio dos lados un ángulo  
 d) Criterio un lado dos ángulos



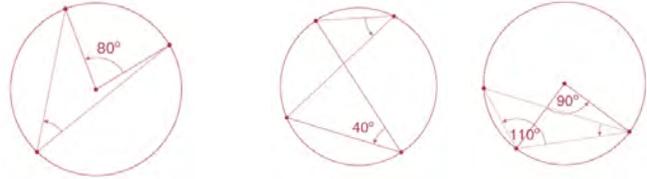
10. En la circunferencia de centro **O** se inscribió el hexágono regular **ABCDEF** y se trazó la recta secante que pasa por los vértices **B** y **F**. Sin utilizar transportador, calcula la medida de **FBO**.

- a)  $60^\circ$       b)  $120^\circ$   
 c)  $30^\circ$       d)  $45^\circ$



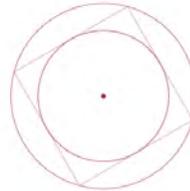
11. Sin utilizar transportador, determina la medida de los ángulos señalados.

- a)  $40^\circ, 30^\circ, 20^\circ$       b)  $40^\circ, 40^\circ, 25^\circ$   
 c)  $35^\circ, 35^\circ, 20^\circ$       d)  $80^\circ, 40^\circ, 25^\circ$



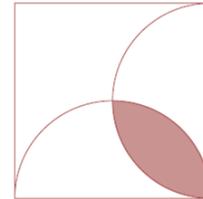
12. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado y la circunferencia mayor tiene radio igual a 2.83 cm. ¿Cuánto mide el área de la corona? (considera  $\pi = 3.14$ )

- a)  $13.0111 \text{ cm}^2$       b)  $12.5879 \text{ cm}^2$   
 c)  $12.5879 \text{ cm}^2$       d)  $12.9873 \text{ cm}^2$



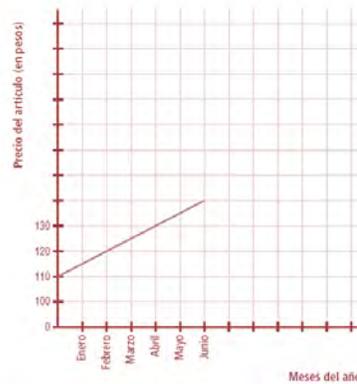
13. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado. Los dos arcos son parte de dos circunferencias. ¿Cuánto mide el área de la figura sombreada? (considera  $\pi = 3.14$ )

- a)  $2\pi - 4 = 2.28 \text{ cm}^2$       b)  $4\pi - 2 = 10.56 \text{ cm}^2$   
 c)  $2\pi - 4 = 2.28 \text{ cm}$       d)  $2\pi - 6 = 0.28 \text{ cm}^2$



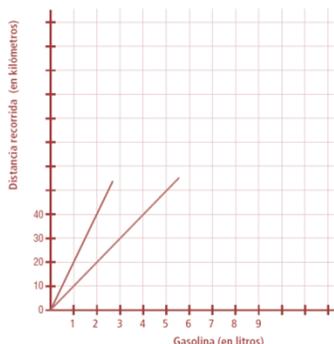
14. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año. ¿Cuál es la razón de cambio del artículo?

- a) 4  
 b) 7  
 c) 3  
 d) 5

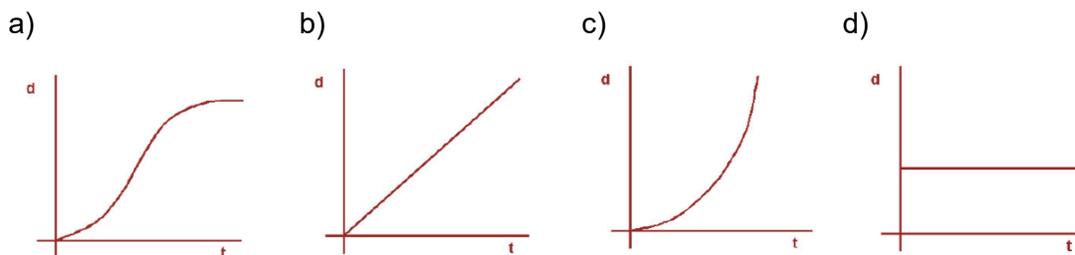


15. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles y la cantidad de gasolina que consumieron. ¿Qué pendiente representa mejor rendimiento?

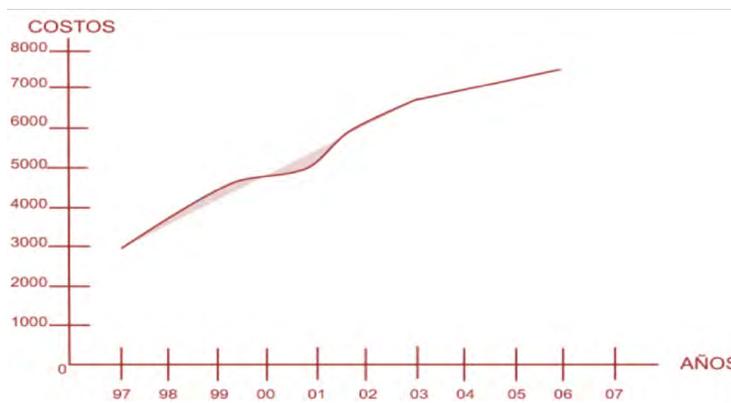
- a) 40
- b) 30
- c) 10
- d) 20



16. Las gráficas que aparecen a continuación representan la distancia recorrida por un automóvil en función del tiempo. ¿Qué gráfica representa el hecho de que el automóvil lleve una velocidad constante en todo momento?



17. De acuerdo con la siguiente gráfica, se muestra la razón de cambio que representa el costo de la gasolina con respecto al tiempo en años. ¿Cuál de las siguientes observaciones es la **correcta**?



- a) Los costos conforme el tiempo avanza disminuyen.
- b) Los costos de la gasolina se han mantenido constantes.
- c) La gasolina ha ido en aumento en estos años.
- d) El tiempo no influye en los costos de la gasolina.

## Bloque 2

### Sentido numérico y pensamiento algebraico.

#### Ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones y funciones cuadráticas desempeñan un papel importante en el estudio de la matemática y la física; por ejemplo, en la **resolución de problemas** sobre áreas de figuras geométricas, en el estudio del movimiento uniformemente acelerado, etc.

Una ecuación con una incógnita es de segundo grado si después de efectuar las operaciones indicadas, quitar paréntesis y denominadores, trasponer términos al primer miembro y simplificar resulta que el mayor exponente de la incógnita es dos.

Ejemplo:

La ecuación  $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{x-1}{x+3}$

$$(2x + 1)(x + 3) = (x - 2)(x - 1)$$

$$2x^2 + 6x + x + 3 = x^2 - x - 2x + 2$$

$$2x^2 + 7x + 3 = x^2 - 3x + 2$$

$$2x^2 - x^2 + 7x + 3x + 3 - 2 = 0$$

$$x^2 + 10x + 1 = 0$$

Reacomoda las siguientes expresiones algebraicas para la identificación de ecuación de segundo grado:

1.  $4x^2 - x = x^2$

2.  $2x^2 - 4 = 28$

3.  $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{17}{15}$

$$4. \frac{x}{3} = \frac{1}{x} + 3$$

$$5. \frac{x+2}{-x-1} = \frac{3x+2}{x+4}$$

$$6. x^2 + 2 = 6x - 6$$

$$7. -x = -\frac{x^2}{9} - 2$$

$$8. \frac{x^2}{2} - 23 = -x + 1$$

$$9. x(2x + 5) = 3$$

$$10. x - 1 = \frac{11-x}{x-5}$$

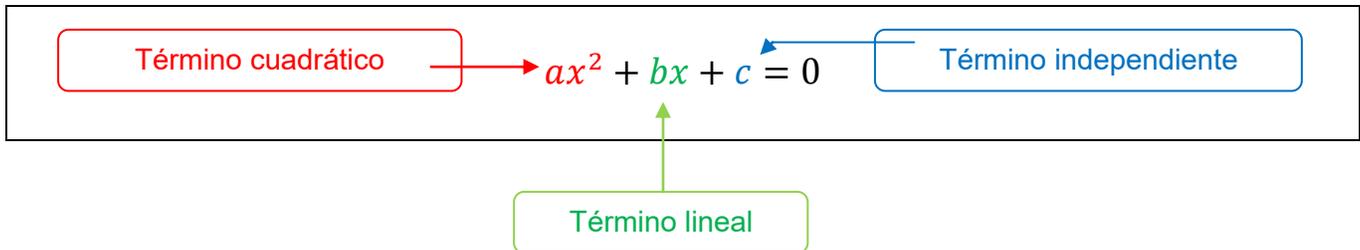
$$11. 4x = \frac{x-1}{x-2}$$

Del ejercicio anterior se advierten dos modelos de ecuaciones de segundo grado:

Ecuación incompleta de segundo grado

Ecuación completa de segundo grado

La ecuación completa de segundo grado suele identificarse también como ecuación cuadrática completa cuya forma general es:



Si una ecuación de segundo grado con una incógnita, después de efectuadas las reducciones posibles, carece de término independiente ( $c = 0$ ) o del término de primer grado (lineal) en  $x$  ( $b = 0$ ) se dice que es incompleta.

$$3x^2 - 8x = 0$$

$$2x^2 - 36 = 0$$

Las formas generales de las ecuaciones incompletas de segundo grado son:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

**Resolución de la ecuación incompleta de segundo grado sin término independiente.**

**Procedimiento:**

1. Se arregla la ecuación en la forma general

$$ax^2 + bx = 0$$

2. Se obtiene  $x$  factor común  $x(ax + b) = 0$ ; como el aprendido en la página 11

3. Una solución es  $x_1 = 0$

4. Se resuelve la ecuación de primer grado que se obtiene igualando a cero el binomio de dentro del paréntesis. La solución ( $x_2$ ) de esta ecuaciones la segunda raíz de la ecuación dada.

Ejemplo: Resolver la ecuación  $2x^2 - 5x = x$

Pasemos  $x$  al primer miembro:

$$2x^2 - 5x - x = 0, \text{ y reduciendo, } 2x^2 - 6x = 0$$

Ya está en la forma  $ax^2 + bx = 0$ , en la que  $a = 2$ ,  $b = -6$ . Saquemos  $x$  factor común  $x(2x - 6) = 0$  una raíz es  $x_1 = 0$  la otra raíz se obtiene resolviendo la ecuación:  $2x - 6 = 0$ ,  $x = \frac{6}{2} \therefore x_2 = 3$

Resuelve:

1.  $x^2 + 6x = 0$

2.  $x^2 - 4x = 0$

3.  $3x^2 + x = 0$

4.  $x^2 - 6x = 0$

5.  $4x^2 - x = x^2$

$$6. 4x(1 + x) = 0$$

$$7. x(6x - 3) = 0$$

$$8. 2x^2 = 9 - x^2$$

**Resolución de la ecuación incompleta de segundo grado sin término en  $x$ .**

**Procedimiento:**

1. Se reacomoda la ecuación a la forma  $ax^2 + c = 0$
2. Se traslada  $c$  al segundo miembro
3. Se divide entre el coeficiente de  $x^2$
4. Se halla la raíz cuadrada del segundo miembro, teniendo en cuenta el doble signo  $\pm$
5. Si el radicando es negativo las raíces son imaginarias.
6. Si el radicando es positivo las raíces son reales, una positiva y otra negativa

Ejemplo                      Resolver la ecuación  $3x^2 - 48 = 0$

Ya está en la forma  $ax^2 + c = 0$ , en la que  $a = 3$ ,  $c = -48$

Traslademos  $-48$  al segundo miembro. Resulta:

$$3x^2 = 48$$

Dividamos entre 3:  $x^2 = \frac{48}{3} = 16$ ;  $x = \pm \sqrt{16}$     Separando las dos raíces:  $x_1 = 4$        $x_2 = -4$

Resuelve:

1.  $2x^2 - 30 = 2$

2.  $2x^2 - 4 = 28$

3.  $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{17}{15}$

4.  $12x^2 - 300 = 0$

5.  $3x^2 - 6 = 2x^2 - 2$

6.  $\frac{x^2}{5} = 5$

7.  $\frac{x^2}{8} = \frac{1}{2}$

Se recomienda continuar en el tema con problemas que permitan plantear ecuaciones, por lo que se ofrece un modelo de apoyo para resolver problemas; basado en los estudios de George Polya.

**Modelo de apoyo para resolver problemas.**

**1.** Entender qué es un problema.

Problema en matemáticas se define como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide resolver.

**2.** La competencia planteamiento y resolución de problemas implica:



**3.** La mejor manera de fortalecer la habilidad práctica es:



**4.** Fases del proceso



**5.** Conductas requeridas

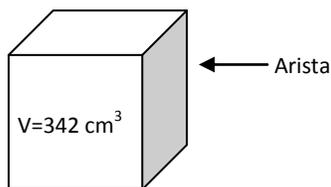
1.- Observación	2.- Organización	3.- Formación de diagramas
4.- Exploración	5.- Deliberación	6.- Toma de decisiones
7.- Formulación	8.- Operación	9.- Verificación

Es significativo que te familiarices con los problemas y que intentes darles solución. En el transcurso del cuadernillo, contarás con más información conceptual pertinente que te ayude a resolver problemas.

Es importante identificar cuál de las dos soluciones es válida, porque las dos soluciones resuelven la ecuación pero no siempre el problema.

Resuelve los siguientes problemas:

- 1- Pensé un número y lo elevé al cuadrado. Al resultado lo multipliqué por 4 y al final obtuve 100. Si no pensé en el 5, ¿de qué número se trata?
2. El cuadrado del dinero que tengo, aumentado en su cuádruple y disminuido en 160 es igual a \$8 000.00 ¿Cuánto dinero tengo?
3. Tres veces el cuadrado de un número se le sumó 8. Como resultado se obtuvo 83.
4. El largo de un terreno rectangular mide el doble del ancho. El terreno tiene  $162 \text{ m}^2$  de área.
5. ¿Cuál es la medida de la arista de un cubo cuyo volumen es de  $343 \text{ cm}^3$ ?

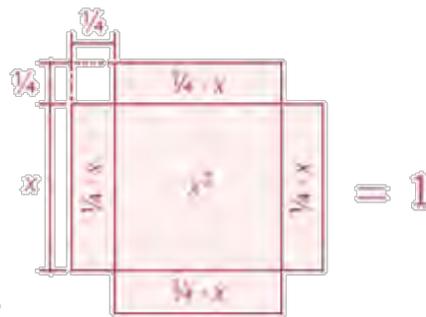


Ejemplo de solución de la ecuación cuadrática  $x^2 + x - 1 = 0$  con la aplicación de construcciones geométricas a la usanza del precursor en resolución de ecuaciones Mohammed ibn Musa al-Jwarizmi (siglo IX D.C.)

1. Reacomodo para operar con coeficientes positivos

$$x^2 + x = 1$$

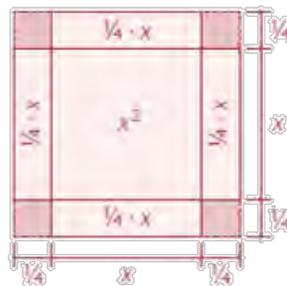
2. Visualización geométrica



3. La ecuación podemos expresarla de la siguiente manera

$$x^2 + 4 \left(\frac{1}{4}\right)x = 1$$

4. Completemos la figura anterior, añadiendo cuatro cuadrados de  $\frac{1}{4}$  de lado en los extremos



5. Del cuadrado nuevo, su área es:

$$1 + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{1}{16}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

6. La longitud de un lado del anterior cuadrado es: 1.118

7. Esta longitud se puede expresar  $x + 0.25 + 0.25 = x + 0.5$ , con la siguiente igualdad

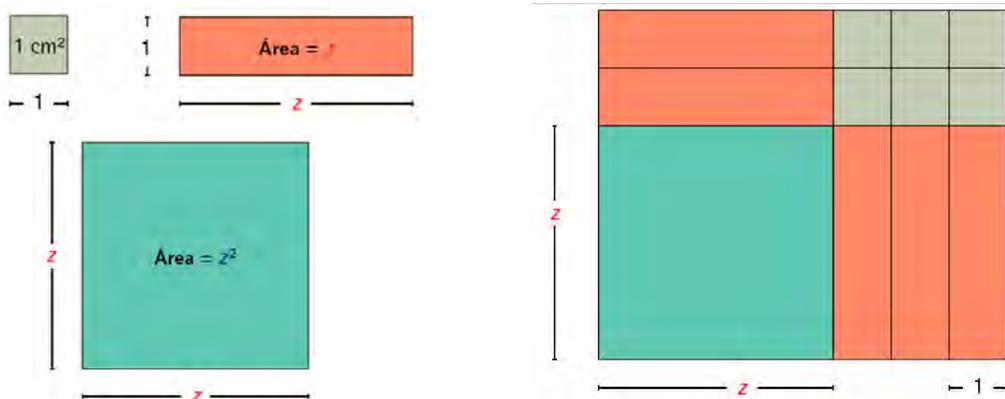
$$x + 0.5 = 1.118$$

8. Se transforma así nuestra ecuación original, con el procedimiento de reducción de al-Jwarizmi para obtener el valor de  $x$ :

$$x = 0.618$$

### Factorización en la resolución de ecuaciones.

Con las primeras figuras se puede formar un rectángulo como el siguiente, cuyo trinomio que representa su área es:  $z^2 + 5z + 6$



1.- Representa la expresión algebraica que corresponde a la base. \_\_\_\_\_

2. Da la expresión algebraica que corresponde a la altura \_\_\_\_\_

El área del rectángulo es de  $42 \text{ cm}^2$

3. ¿Cuál es la ecuación que se tiene que resolver para obtener el valor de  $z$ ? \_\_\_\_\_

4. ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación resuelve el problema? \_\_\_\_\_

5. ¿Cuántos centímetros mide  $z$ ? \_\_\_\_\_

**Resolución de una ecuación completa de segundo grado por factorización; correspondiente a la factorización estudiada en la página 19 (Trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ )**

#### Procedimiento:

1. La factorización encontrada se iguala a cero.

2. Se iguala cada factor a cero y se obtienen las raíces.

Ejemplo

a. Sea la ecuación  $x^2 + 5x + 6 = 0$

El primer miembro es el producto de dos factores binomio:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

La ecuación puede escribirse así:

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

Para que este producto sea igual a cero, debe serlo uno de los factores, es decir, es cero

$$\text{cuando } x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\text{y cuando } x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Las dos raíces de la ecuación  $x^2 + 5x + 6 = 0$  son:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2$$

b. La ecuación  $x^2 + 3x - 4 = 0$

El trinomio del primer miembro es igual a  $(x + 4)(x - 1)$

Luego la ecuación es:  $(x + 4)(x - 1) = 0$  de donde  $x_1 = -4, \quad x_2 = 1$

Resuelve:

1.  $x^2 - x - 6 = 0$

2.  $x^2 + 7x = 18$

3.  $8x - 65 = -x^2$

4.  $x^2 = 108 - 3x$

5.  $2x^2 + 7x - 4 = 0$

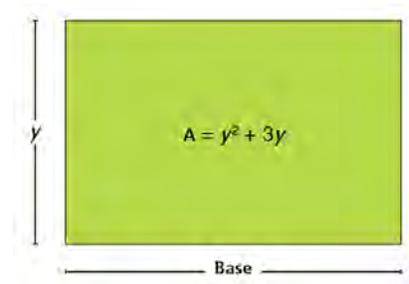
6.  $6x^2 = 10 - 11x$

7.  $20x^2 - 27x = 14$

8.  $7x = 15 - 30x^2$

9.  $x(x - 1) - 5(x - 2) = 2$

10. Imagina que el rectángulo siguiente tiene un área de  $54 \text{ cm}^2$ . ¿Cuánto mide su base y su altura?



Escribe la expresión algebraica que representa su base

\_\_\_\_\_

Sin medir, encuentra la longitud de la altura y la base resolviendo:

$$y^2 + 3y = 54$$

**Forma, espacio y medida.**

**Figuras semejantes.**

1. Indica con un **si** o un **no** los relojes que no estén a escala con respecto a este

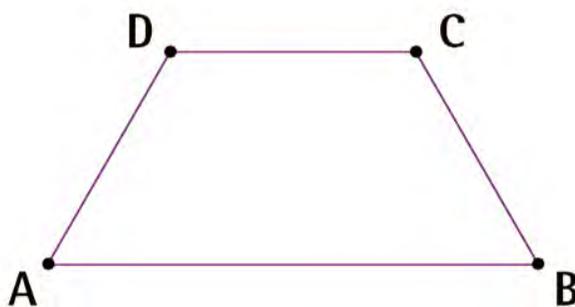


Cuando dos figuras están a escala, las medidas de los lados de una de las figuras son proporcionales a las medidas de los lados de la otra.

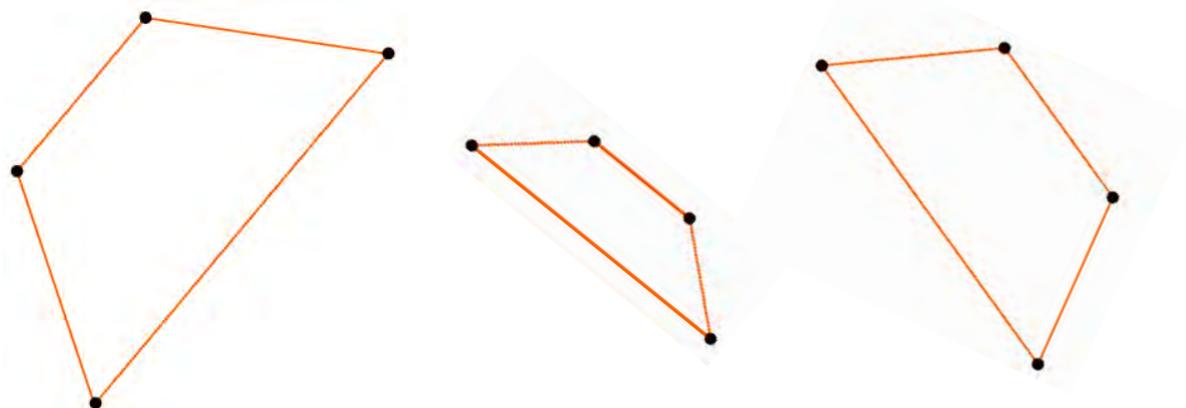
2. Se quiere ampliar la siguiente fotografía de  $6 \times 3 \text{ cm}$ , de tal manera que el homólogo del lado que mide  $6 \text{ cm}$  mida  $12 \text{ cm}$ . ¿Cuánto debe medir el otro lado?



3. En base a la siguiente figura y utilizando instrumentos de medición, contesta:



De los siguientes trapecios, ¿cuál está hecho a escala respecto al anterior? Identifica, en el trapecio a escala, los vértices correspondientes a **A**, **B**, **C**, **D** y anótales **A'**, **B'**, **C'** y **D'** respectivamente.



¿En qué te fijaste para elegir el trapecio hecho a escala?

\_\_\_\_\_

Mide los segmentos y luego calcula las siguientes razones o cocientes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} =$$

¿Cómo son entre sí los cocientes: iguales o diferentes?

\_\_\_\_\_

Anoten la medida de los ángulos interiores:

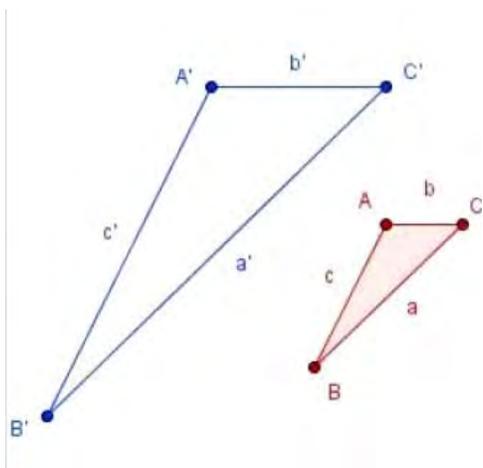
$$\angle A = \underline{\quad} \quad \angle B = \underline{\quad} \quad \angle C = \underline{\quad} \quad \angle D = \underline{\quad}$$

$$\angle A' = \underline{\quad} \quad \angle B' = \underline{\quad} \quad \angle C' = \underline{\quad} \quad \angle D' = \underline{\quad}$$

## Criterios de semejanza de triángulos.

### Criterio - De dos ángulos

Si **dos ángulos** de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.



Demostración: Supongamos que  $\angle A \cong \angle A$ ,  $\angle B \cong \angle B$

1. Marcamos  $B$  y  $C$  en los lados del  $\triangle A'B'C'$  de tal manera que  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  y  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ . Entonces, el  $\angle A \cong \angle A$  por el axioma C-LAL de congruencia de triángulos afirmar que el  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

2. Sabemos que  $\angle B \cong \angle B$  y por hipótesis  $\angle B \cong \angle B$  resulta que  $\angle B \cong \angle B$ .

3. Por **teorema de Tales**:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Los  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.

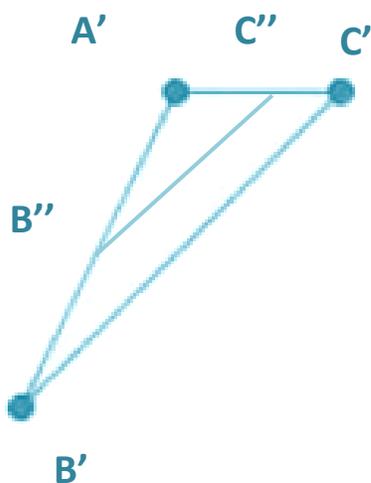
Corolario. Si  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

$\rightarrow BC \parallel B'C'$  y los  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes.

4. Podemos afirmar que:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

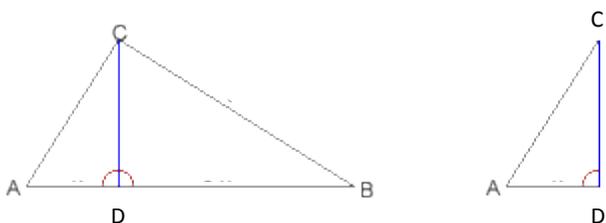
es decir, los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales y los ángulos correspondientes de los triángulos son:

$$\angle A \cong \angle A, \quad \angle B \cong \angle B, \quad \angle C \cong \angle C$$



Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces dichos triángulos son semejantes.

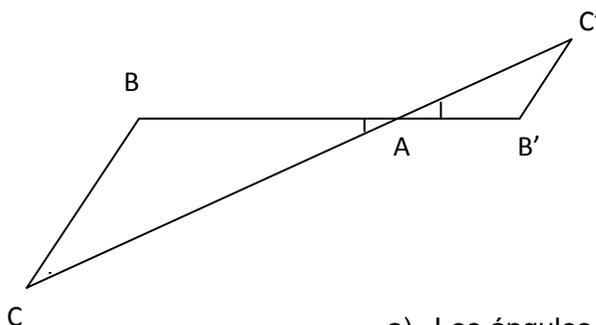
1. En el triángulo rectángulo siguiente se ha trazado la altura. Por lo tanto, el triángulo ADC es rectángulo.



¿Por qué el  $\Delta ABC$  es semejante al  $\Delta ACD$ ? Localiza los lados correspondientes y completa las siguientes igualdades:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{AC}$$

2. En la siguiente figura  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$



- Los ángulos marcados con una línea son congruentes. ¿Por qué?
- Los ángulos  $BCA$  y  $AC'B'$  son congruentes. ¿Por qué?
- ¿Por qué son congruentes los triángulos?
- Escribe las proporciones entre los lados.
- Si  $AB = 2$ ,  $AB = 1$  y  $BC = 0.8$ , ¿cuánto mide  $BC'$ ?
- Si  $AC = 3$  ¿cuánto mide  $AC'$ ?

a	b	c
d	e	f

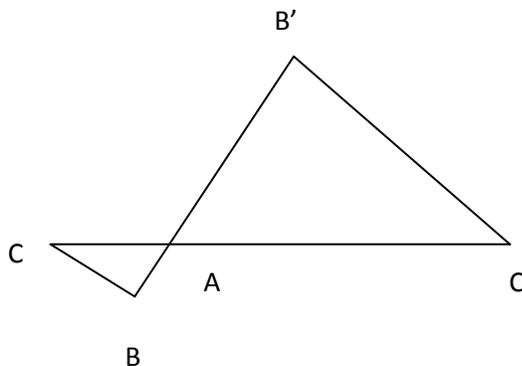
**Criterio – De dos lados**

Si en dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  se tiene que:

$\angle A \cong \angle A'$  y  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ , entonces los triángulos son semejantes.

3. En la siguiente figura se sabe que:

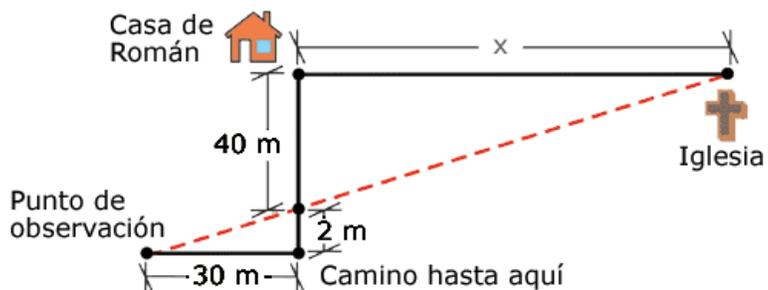
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 3$$



- ¿Son semejantes  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$ ? ¿Por qué?
- Si  $BC = 2.4$ , ¿cuánto mide  $B'C'$ ?
- Si  $AB = 1.9$ , ¿cuánto mide  $A'B'$ ?
- $\angle C \cong$                        $\angle B' \cong$

a	b
c	d

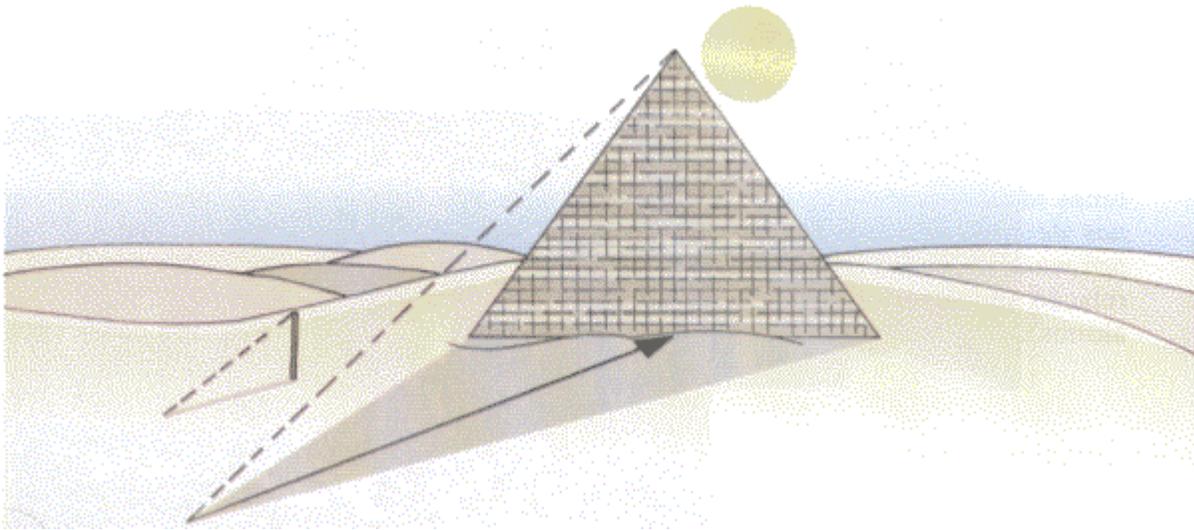
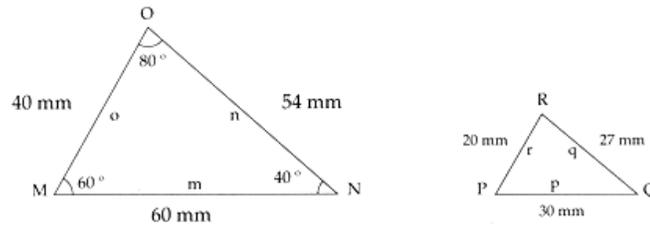
4. Identifica la variable a buscar y resuelve el problema:



## Criterio – De tres lados

Si los **tres lados** de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro, entonces los triángulos son semejantes.

$$\frac{RP}{OM} = \frac{RQ}{ON} = \frac{PQ}{MN} \rightarrow \angle M \cong \angle P, \angle N \cong \angle Q, \angle O \cong \angle R$$



La Gran Pirámide de Guiza, construida por Keops (Jufu), es una de las siete Maravillas del Mundo.

Cuenta la leyenda que Tales visitó Egipto, según testimonio de Josepho y de Aecio, quien le atribuye, además, una teoría sobre las crecidas del Nilo (*De placitis reliquiae*, IV, 1, 1). Refuerzan esta noticia Plinio (*Hist. Nat.* XXXVI, 82) y Plutarco (*Septem sapientium convivium*, 147a) que informan que Tales descubrió la forma de conocer la altura de las pirámides.

5. En base a la siguiente información, calcula la altura de la pirámide. La sombra que proyecta la pirámide es de 153.5m, la sombra del bastón de 1.5m es de 1.7m.

**Manejo de la información.****Índices de diversas situaciones.**

Llámesese índice a los números indicadores, que describen los cambios o evolución de una variable.

Frecuentemente los índices están asociados a cantidades que representan precios o valor, pero también se utilizan para analizar cambios en variables como el tiempo, la situación geográfica, ingresos económicos o cualquier otra característica.

Ejemplo: Supongamos que te ofrecen la siguiente información: Para la producción de granos en una comunidad agrícola de Valle de Santiago Gto., se tiene la cantidad de toneladas producidas en ciertos meses, el precio por tonelada y como valor, el producto de las toneladas producidas por el precio de cada tonelada.

Mes	Cantidad de toneladas ( $q$ )	Precio en miles de pesos ( $p$ )	Valor ( $p \times q$ )
Enero	120	2	240
Febrero	150	3.5	525
Marzo	210	3.8	798
Abril	114	3.9	444.6

Para saber la evolución de la cantidad de toneladas de grano en cada mes, o del precio por tonelada o del valor del producto, será necesario establecer un punto de partida, es decir, el mes desde el cual se iniciarán las mediciones de los cambios. Si se toma como referencia el mes de enero, se tendrá una tabla de porcentajes como la siguiente (completa los datos):

Mes	Cantidad de toneladas ( $q$ )	Precio en miles de pesos ( $p$ )	Valor ( $p \times q$ )
Enero	100%	100%	100%
Febrero		175%	
Marzo			
Abril	95%		

En este sentido, un número índice es una cantidad porcentual relativa a un periodo base determinado y sirve para medir la evolución de una variable.

Con los datos de las siguientes tablas define números índices; tres índices por tabla.

1. Matrícula universitaria.

		Facultad						Total
		Agronomía	Arquitectura	Bellas artes	Economía	Ingeniería	Pedagogía	
Sexo	Mujer	240	3	2	140	40	15	440
	Hombre	190	12	3	210	250	2	667
Total		430	15	5	350	290	17	1 107

Completa las celdas de las siguientes tablas:

Índice matrícula total	Total	Porcentaje que representa	Índice matrícula por sexo	Hombres
(IMT)			39.74%	

Índice de mayor matrícula por facultad	Agronomía	Economía				
	38.84%					

2. Religión. Sugerencia utiliza los totales del campo que consideres.

		Región económica						Total
		África	América latina	Asia/Pacífico	Europa oriental	OCDE	Oriente medio	
Religión mayoritaria	Animista	4	0	0	0	0	0	4
	Budista	0	0	7	0	0	0	7
	Católica	5	20	1	5	10	0	41
	Hindú	0	0	1	0	0	0	1
	Judía	0	0	0	0	0	1	1
	Musulmana	6	0	5	1	0	15	27
	Ortodoxa	0	0	0	6	1	1	8
	Protestante	2	1	1	2	10	0	16
	Taoísta	0	0	2	0	0	0	2
	Tribal	1	0	0	0	0	0	1
Total		18	21	17	14	21	17	108

## 3. Nivel de felicidad.

		Nivel de felicidad			Total
		Alto	Medio	Bajo	
Región del país	Norte	185	412	76	673
	Sureste	149	215	47	411
	Oeste	133	245	42	420
Total		467	872	165	1 504



Es importante que el recurso de simulación considere los mismos resultados posibles y las mismas probabilidades que las de la situación original, razón por la cual el concepto y cálculo de los valores de la probabilidad frecuencial son necesarios.

En relación a los resultados obtenidos, ¿cuál es el resultado que más veces apareció?

\_\_\_\_\_

2. De acuerdo a los resultados de la simulación, ¿cuál es la probabilidad de realizar dos ventas?

\_\_\_\_\_

3. ¿Cuál es la probabilidad de hacer solo una venta?

\_\_\_\_\_

4. Si consideras los resultados de la simulación con la ruleta ¿cuál es la probabilidad de realizar solo una venta?

\_\_\_\_\_

5. En la fábrica de focos A, se sabe que la producción tiene un 20% de focos defectuosos; mientras que la de la fábrica B tiene un 25%. Si se junta el mismo número de focos de cada fábrica y se escoge uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el foco escogido sea de la fábrica A y no tenga defecto?

Genera una simulación del problema anterior

**Autoevaluación bloque 2.**

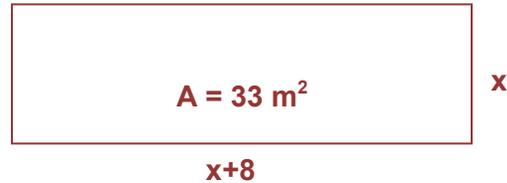
Recuerda que se subraya el resultado.

1. Hallar un número, diferente de cero, sabiendo que su cuadrado es igual al duplo del número multiplicado por 6.

- a) 11      b) 10      c) 21      d) 12

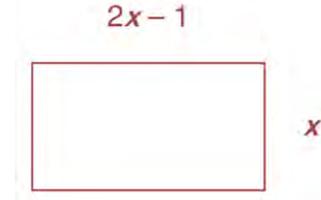
2. El área de un rectángulo es de  $33 \text{ m}^2$  y la base mide 8 m más que la altura. Calcular las dimensiones.

- a) 3, 11      b) 4, 12  
c) 2, 18      d) 3, 15



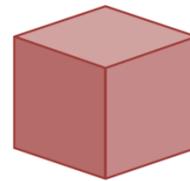
3. El área del rectángulo es  $120 \text{ u}^2$ . Subraya la ecuación que hay que resolver para saber cuántas unidades mide su altura.

- a)  $3x - 1 = 120$       b)  $2x^2 - 1 = 120$   
c)  $x^2 = 120$       d)  $2x^2 - x = 120$



4. El volumen del cubo es  $125 \text{ cm}^3$ . El área de una de sus caras es:

- a)  $5 \text{ cm}^2$       b)  $25 \text{ cm}^2$   
c)  $20 \text{ cm}^2$       d)  $50 \text{ cm}^2$



5. Subraya el resultado de  $x^2 + 5x + 6 = 0$

- a)  $(x + 3)(x - 2) = 0$ ;  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 2$       b)  $(x - 5)(x - 3) = 0$ ;  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = 3$   
c)  $(x + 3)(x + 2) = 0$ ;  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = -2$       d)  $(x + 4)(x - 6) = 0$ ;  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = 6$

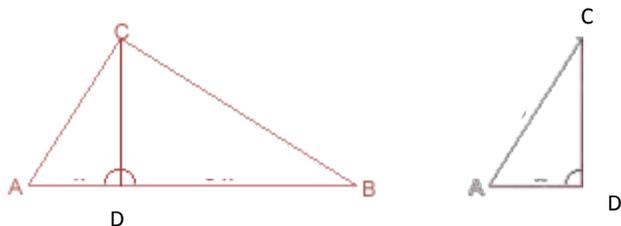
6. Subraya el resultado de  $x^2 - 2x - 48 = 0$

- a)  $(x + 8)(x - 6) = 0$ ;  $x_1 = -8$ ;  $x_2 = 6$       b)  $(x - 6)(x - 10) = 0$ ;  $x_1 = 6$ ;  $x_2 = 10$   
c)  $(x - 2)(x + 4) = 0$ ;  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -4$       d)  $(x - 8)(x + 6) = 0$ ;  $x_1 = 8$ ;  $x_2 = -6$

7. Se quiere ampliar la siguiente fotografía de  $4 \times 2 \text{ cm}$ , de tal manera que el homólogo del lado que mide  $4 \text{ cm}$  mida  $7 \text{ cm}$ . ¿Cuánto debe medir el otro lado?

- a) 3.5      b) 4  
c) 2.5      d) 5

8. Subraya las igualdades que corresponden a la semejanza de de estos triángulos.

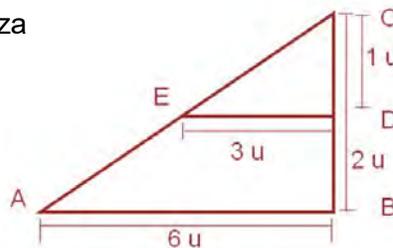


- a)  $\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{CB} = \frac{AC}{AB}$       b)  $\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{AB} = \frac{AC}{AB}$       c)  $\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{CB} = \frac{AC}{AB}$       d)  $\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{AC}$

9. Araceli encontró la razón de semejanza correcta en los triángulos ABC y CDE que se representan en la siguiente figura:

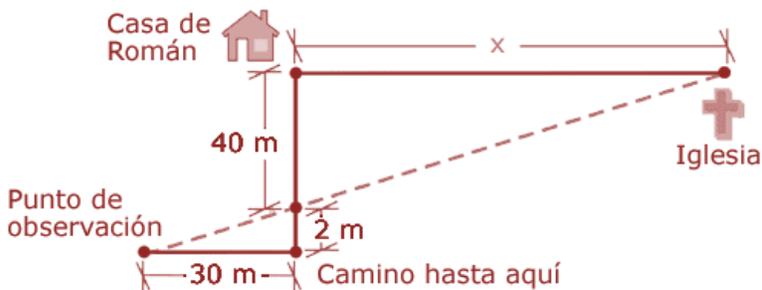
¿Cuál de las siguientes opciones muestra la relación de semejanza que obtuvo Araceli?

- a)  $\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$       b)  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$   
 c)  $\frac{6}{3} = \frac{3}{1}$       d)  $\frac{6}{2} = \frac{1}{3}$



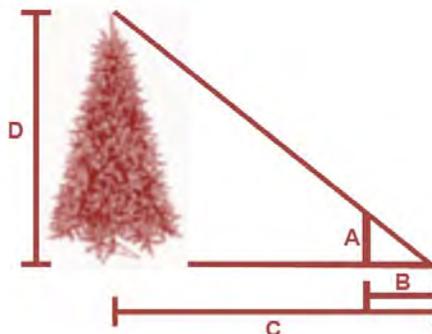
10. ¿Cuál es la distancia de la casa de Román al punto de observación, siguiendo el recorrido?

- a) 70  
 b) 400  
 c) 72  
 d) 600



11. Observa el siguiente dibujo y de acuerdo con los datos proporcionados en él, indica con cuál de las siguientes expresiones podemos calcular la altura (D) del árbol.

- a)  $D = (C + B)A$   
 b)  $D = (A)(B) + C$   
 c)  $D = C \left( \frac{A}{B} \right)$   
 d)  $D = \frac{BA}{C}$





15. En la fábrica de focos A, se sabe que la producción tiene un 20% de focos defectuosos; mientras que la de la fábrica B tiene un 25%. Si se junta el mismo número de focos de cada fábrica y se escoge uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el foco escogido sea de la fábrica A y no tenga defecto?

¿Cuál de los siguientes experimentos simula el problema anterior?

- a) Una bolsa con 200 canicas: 20 rojas, 25 azules y 155 amarillas; se extrae una canica, se anota el color y se regresa la canica a la bolsa.
- b) Una bolsa con 200 canicas: 100 rojas y 100 azules, 20 de las canicas rojas y 25 de las azules están marcadas con una “d”; se extrae una canica, se anota el color y si tiene o no la letra “d”; luego se regresa la canica a la bolsa.
- c) Dos bolsas de canicas: la primera tiene 20 canicas azules y 80 rojas, y la segunda bolsa tiene 25 canicas azules y 75 canicas rojas; se extrae una canica de cada bolsa, se anota el color y se regresan.
- d) Dos bolsas de canicas: la primera tiene 100 canicas rojas, 20 están marcadas con una “d”, y la segunda bolsa tiene 100 canicas azules y 25 están marcadas con una “d”; se extrae una canica de cada bolsa, se anota el color de cada una y si tiene o no la letra “d”; luego se regresan las canicas a la bolsa.

16. Una camioneta de transporte colectivo realiza un recorrido en el que hay 10 paradas fijas. Si al salir de la terminal se han subido cuatro personas desconocidas entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que dos personas bajen en una misma parada?

¿Cuál de los siguientes experimentos simula el problema anterior?

- a) En una bolsa se ponen cuatro papelitos numerados del 1 al 4. En otra bolsa, se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito de cada bolsa, se anotan los números y se regresa cada uno a su bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- b) En una bolsa se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito, se anota el número y el papelito no se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- c) En una bolsa se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito, se anota el número y se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- d) En una bolsa se ponen cuatro papelitos numerados del 1 al 4. Se extrae un papelito, se anota el número y se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.

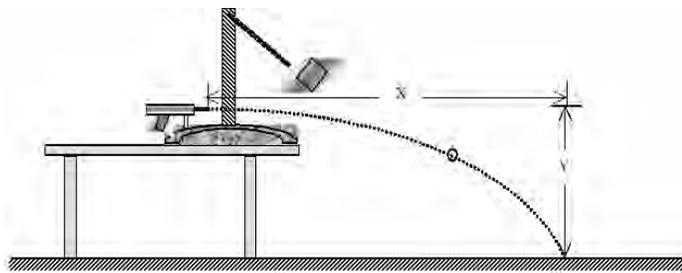
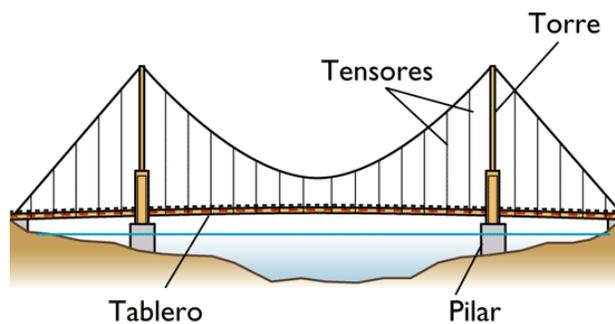
**Bloque 3.****Sentido numérico y pensamiento algebraico.****Funciones y expresiones algebraicas.**

$$\text{La función } y = ax^2 + bx + c$$

Un trinomio de segundo grado define una función haciendo corresponder a cada número real  $x$ , el valor numérico del polinomio  $ax^2 + bx + c$ . Esta función recibe el nombre de función cuadrática. Representando el valor numérico del polinomio por  $y$ . Se obtiene la función:

$$y = ax^2 + bx + c$$

La gráfica de esta función es una curva llamada parábola. La trayectoria de un proyectil, el cable que sostiene un puente colgante, etc., son ejemplos de figuras parabólicas



## Procedimiento:

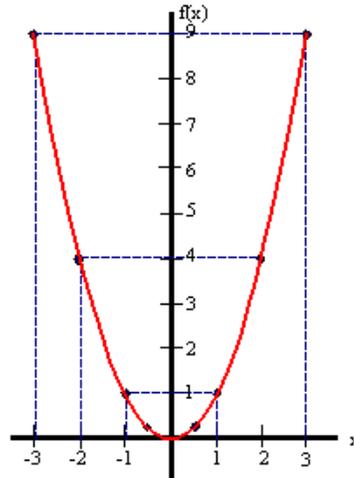
1. Se construye una tabla de valores
2. Se llevan los puntos sobre un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares
3. Se unen los puntos mediante una curva continua

### Ejemplo

Representar gráficamente la función  $y = x^2$

Construyamos una tabla de valores dando a  $x$  una serie de valores crecientes y calculando los correspondientes de  $y$ . Cada par de valores correspondientes se representa gráficamente por un punto y el conjunto de todos los puntos es la gráfica.

x	y	puntos
-4	16	(-4,16)
-3	9	(-3,9)
-2	4	(-2,4)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)
3	9	(3,9)
4	16	(4,16)



Esta parábola tiene las siguientes características: pasa por el origen, es tangente al eje de las  $x$ , es simétrica respecto al eje de las  $y$  y se abre hacia arriba, es decir, dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje de las  $y$ .

1. Resuelve el siguiente ejercicio: las tablas siguientes muestran las relaciones entre números de acuerdo a un enunciado algebraico. Selecciona la expresión que corresponda a la relación de números de cada tabla.

Tabla 1	
Valor <sub>1</sub>	Valor <sub>2</sub>
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Tabla 2	
Valor <sub>1</sub>	Valor <sub>2</sub>
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

Tabla 3	
Valor <sub>1</sub>	Valor <sub>2</sub>
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

Tabla 4	
Valor <sub>1</sub>	Valor <sub>2</sub>
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21

Fórmula	Tabla
$x^3$	
$\frac{n(n+1)}{2}$	
$2x+3$	
$n^2+1$	

Representa con una expresión algebraica, la regla que rige la variación de los siguientes casos:

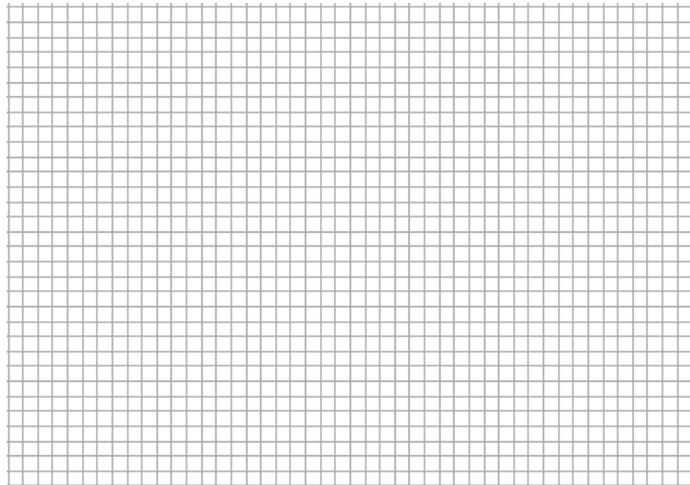
2. La distancia **y** recorrida por un automóvil que va a una velocidad constante durante un tiempo **t**.

3. El área del círculo en función del radio **r**.

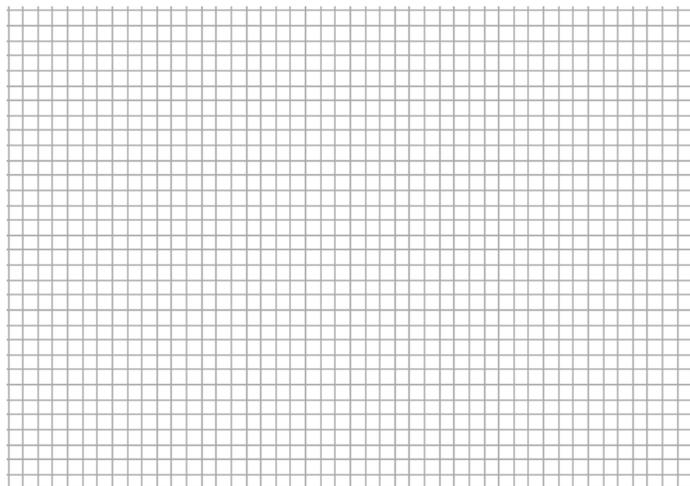
4. El área del círculo en función del diámetro **d**.

5. El área del círculo en función de la circunferencia **c**.

6. Representar gráficamente la función  $y = \frac{x^2-2}{2}$

7. Representar gráficamente la función  $y = -2x^2 - x + 6$

**Fórmula general.****Resolución de una ecuación completa de segundo grado completando cuadrados**

(Antecedentes para entender y conocer la fórmula general).

Este nuevo método consiste en hacer que el binomio formado por los dos términos que contienen a la incógnita quede en el primer miembro y completarlo para obtener un trinomio cuadrado perfecto, resolviendo después la ecuación por descomposición en factores.

**Procedimiento:**

1. Se traslada el término independiente al segundo miembro
2. Si el coeficiente de  $x^2$  es distinto de la unidad, se dividen los dos miembros entre dicho coeficiente
3. Se agrega a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de  $x$ , obteniéndose así, en el primer miembro, un trinomio cuadrado perfecto
4. Se expresa el primer miembro como el cuadrado de un binomio
5. Se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros
6. Se despeja el valor de  $x$  obteniéndose las dos raíces de la ecuación
7. Se comprueban las raíces

**Ejemplo**

Sea la ecuación  $x^2 - 5x - 14 = 0$

$$x^2 - 5x = 14$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 14 + \frac{25}{4}$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{81}{4}$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Las raíces son:  $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Resuelve:

1.  $x^2 + x - 6 = 0$

2.  $x^2 - 8x + 15 = 0$

3.  $x^2 - 13x + 42 = 0$

4.  $x^2 - 2x - 3 = 0$

5.  $2x^2 - 7x + 3 = 0$

6.  $3x^2 + 11x - 4 = 0$

$$7. 4x^2 - 7x - 2 = 0$$

$$8. 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

### Resolución de la ecuación completa de segundo grado aplicando la fórmula general.

A partir de la ecuación completa  $ax^2 + bx + c = 0$ , la fórmula que permite resolver rápidamente la ecuación es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración de la fórmula a partir del procedimiento anterior, ya estudiado.

$$\text{Ecuación } ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right] = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

**Procedimiento:**

1. Se lleva la ecuación a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

2. Se identifican los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , con su respectivo signo

3. Se hallan las raíces de la ecuación aplicando la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo Resolver la ecuación  $x^2 + 10x - 24 = 0$  aplicando la fórmula general

Comparando esta ecuación con la fórmula general, se tiene:

$$a = 1, \quad b = 10, \quad c = -24$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula resulta:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$\therefore x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2a} = \frac{-10 \pm 14}{2}$$

Separando las raíces:

$$x_1 = \frac{-10+14}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-10-14}{2} = -12$$

Resuelve:

1.  $3x^2 - 5x + 2 = 0$

2.  $4x^2 + 3x - 22 = 0$

3.  $x^2 + 11x = -24$

4.  $x^2 = 16x - 63$

5.  $12x - 4 - 9x^2 = 0$

6.  $5x^2 - 7x - 90 = 0$

7.  $6x^2 = x + 222 = 0$

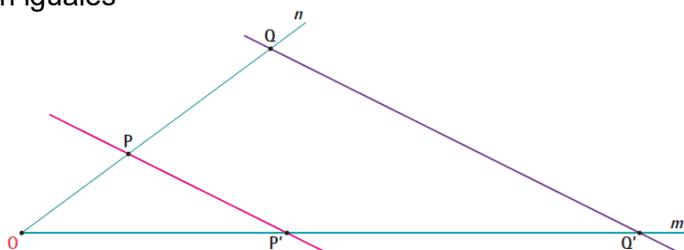
**Forma, espacio y medida.**

**Teorema de Tales.**

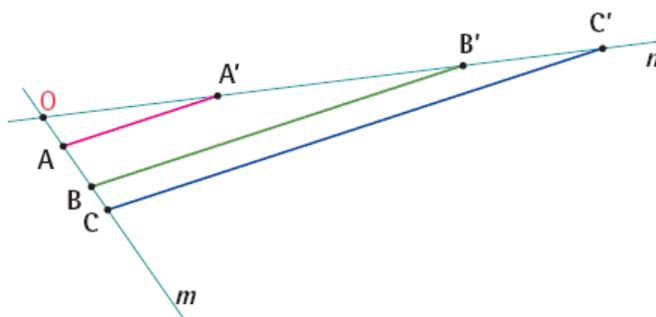
**Teorema de Tales**

Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes formados por las paralelas que intersecan a la otra.

Ejemplo: El triángulo OPP' es semejante al triángulo OQQ' porque sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos son iguales



1. Observa la siguiente figura.



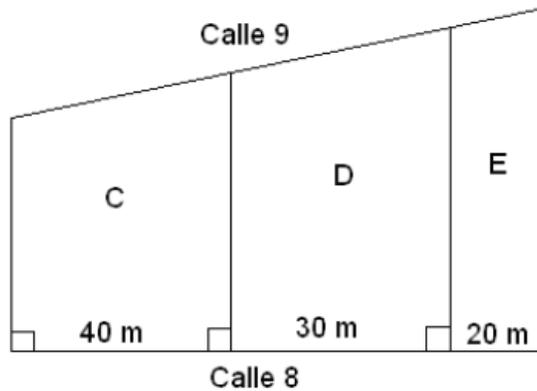
2. Considera las medidas que se dan de algunos de los segmentos y completa la tabla.

Recta m	Recta n	Razón entre las medidas de los segmentos formados por las paralelas	
$\overline{OA} = 4$	$\overline{OA'} = 16$	$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} =$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OA'}} =$
$\overline{OB} = 10$	$\overline{OB'} =$	$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} =$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC} - \overline{OB}}{\overline{OC'} - \overline{OB'}} =$
$\overline{OC} =$	$\overline{OC'} = 48$	$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} =$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} =$

3. Divide un segmento AB en dos partes tales que la razón entre las medidas de las dos partes sea 2:3.

4. Divide un segmento cualquiera en partes cuya razón sea, respectivamente:  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{4}{3}$ ;  $\frac{1}{10}$ ; 1 a 0.25; 1 a 7.

5. El siguiente esquema muestra tres terrenos que colindan uno a uno. Los límites laterales son segmentos perpendiculares a la calle 8 y el frente total de los tres terrenos en la calle 9 mide 120 metros. Determina la longitud de cada uno de los lotes de la calle 9.

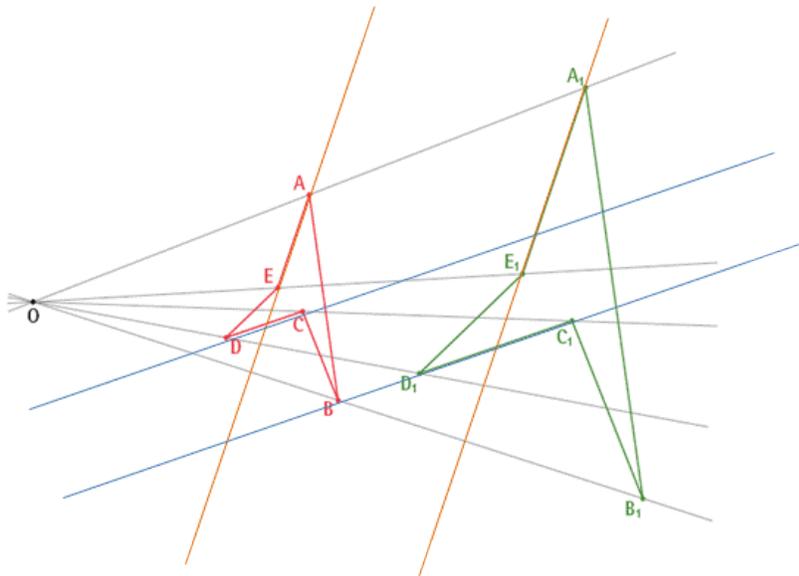


## Homotecia de figura.

El concepto de **homotecia** es un subconjunto del de semejanza.

Ejemplo dos figuras son homotéticas si:

- A. Sus lados correspondientes son proporcionales.
- B. Sus ángulos correspondientes son iguales.
- C. Sus lados correspondientes (homólogos) son paralelos.
- D. Por sus puntos homólogos (vértices) hacemos pasar una recta, observamos que todas las rectas se intersecan en un mismo punto llamado centro de homotecia.

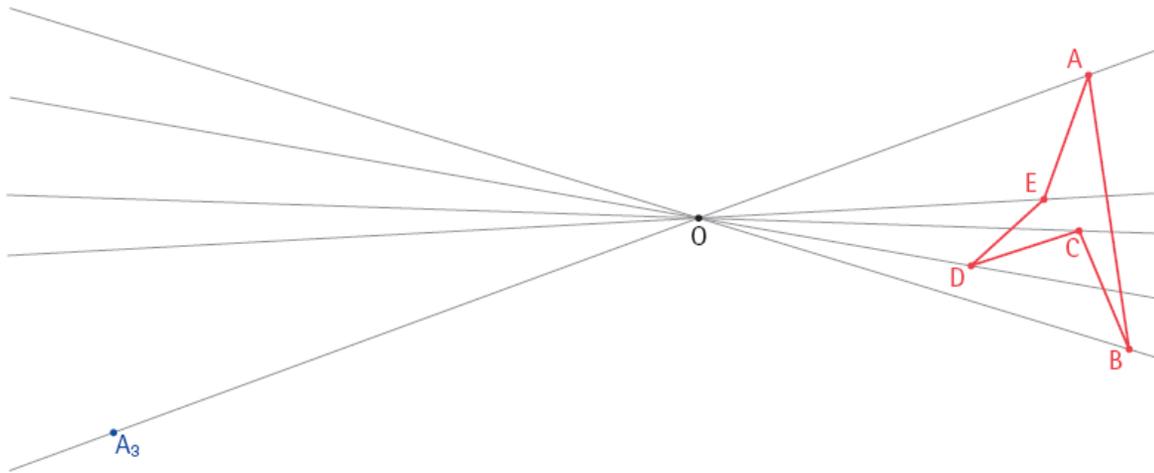


1. Identifica las **propiedades** A, B, C y D en la figura anterior; escribe la letra correspondiente sobre la figura anterior.

Para la **construcción** de figuras homotéticas.

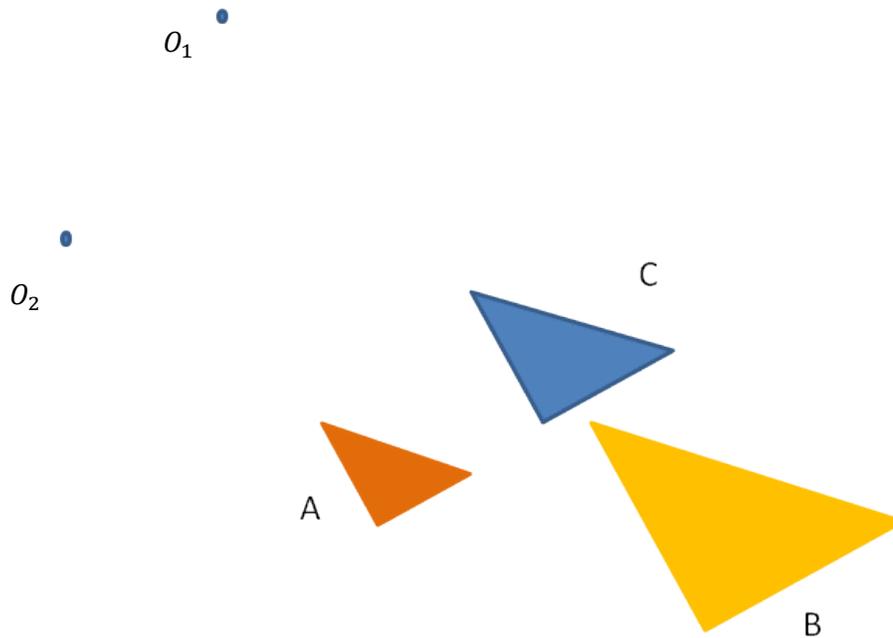
- Elegimos un espacio en el plano y colocamos el centro de homotecia, cercano a la figura original.
- Trazamos una recta, desde cada uno de los vértices de dicha figura al centro de homotecia.
- Reproducimos nuevos puntos sobre estas rectas, a una distancia proporcional (razón homotética) de los vértices de la figura origen hacia el punto de homotecia. Desde luego podemos extender las rectas pasando la figura origen o hacia el otro lado del centro de homotecia y construir otra u otras figuras homotéticas. Si las figuras están situadas del mismo lado del centro de homotecia, se dice que esta homotecia es directa y si están situadas del otro lado, hablamos de homotecia inversa.

2. Construye una figura homotética, aplicando una razón homotética inversa (negativa) al pentágono ABCDE, el vértice correspondiente (homólogo) al vértice A es  $A_3$ .



- ¿Cuánto mide  $OA_3$ ?
- ¿Por cuál número tienes que multiplicar  $OA$  para obtener  $OA_3$ ?
- Con la mecánica anterior, localiza los demás puntos.

3. Identifica y construye figuras homotéticas en el siguiente ejercicio, a partir de las propiedades revisadas.

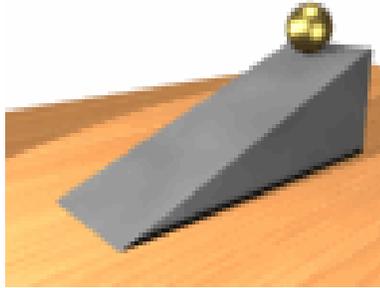


**Manejo de la información.****Gráficas de relaciones funcionales.**

La gráfica asociada a la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo con aceleración constante, es una curva conocida como parábola.

Por otro lado, cuando la gráfica es una parábola, la relación es cuadrática.

1. El siguiente dibujo muestra una canica a punto de caer por una rampa (plano inclinado) de 400 cm de largo.



Usando fotografía de estroboscopo, se mide la distancia que la canica ha recorrido en cada segundo transcurrido desde que se soltó. En la tabla que se muestra a continuación se indica el resultado de esta medición.

Tiempo	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s
Distancia	0 cm	10 cm	40 cm	90 cm	160 cm	250 cm

¿Cuál de estas gráficas representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por la canica?



a



b

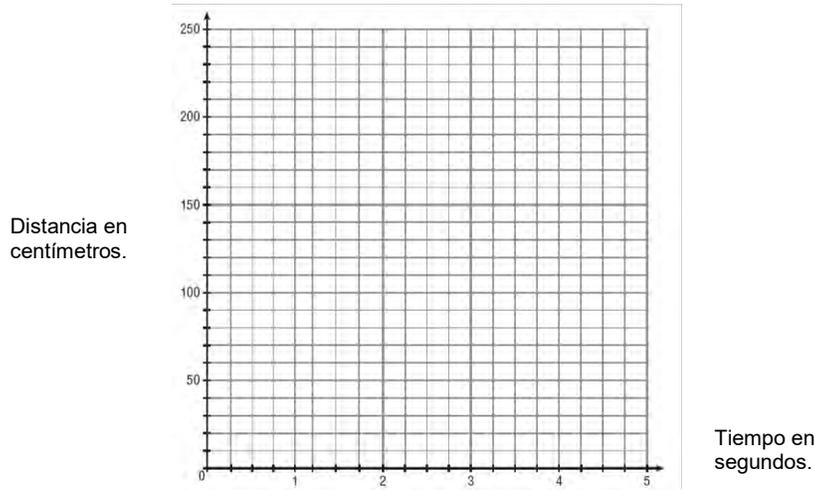


c



d

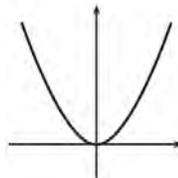
2. Localiza los puntos relacionados de la tabla anterior en el siguiente plano cartesiano. Posteriormente dibuja la gráfica.



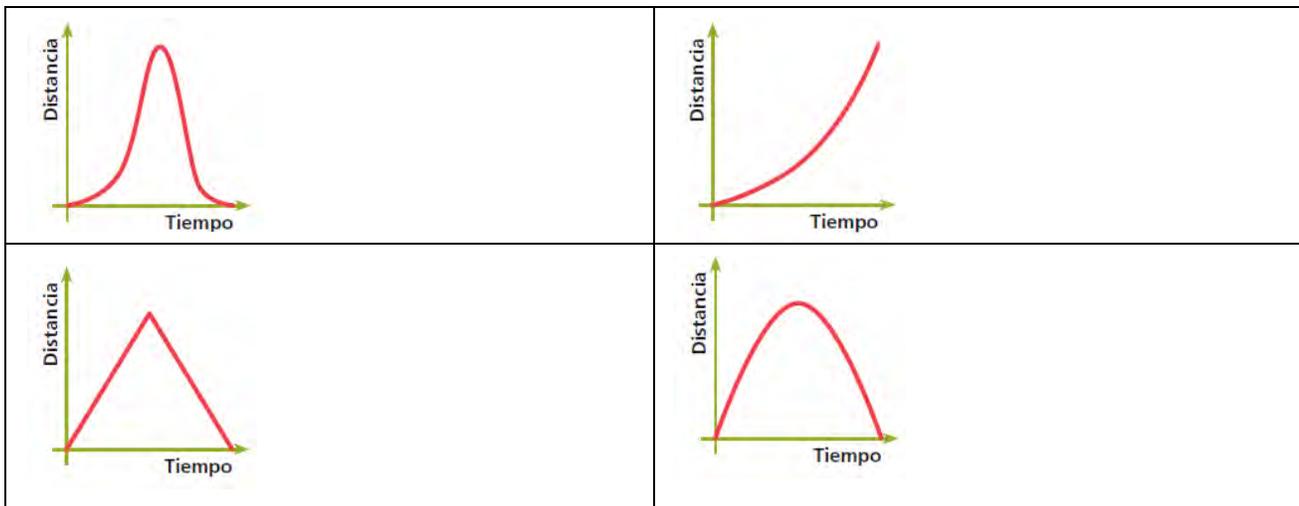
3. En base a la gráfica; aproximadamente, ¿qué distancia lleva recorrida la canica cuando han transcurrido 2.5 segundos? \_\_\_\_\_

4. ¿Qué distancia lleva recorrida la canica cuando han transcurrido 3.5 segundos? \_\_\_\_\_

La gráfica asociada a la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo con aceleración constante (por ejemplo, la caída de una canica en un plano inclinado) es una curva conocida como parábola. En la siguiente gráfica se ha dibujado una parábola. La gráfica que corresponde al ejemplo de la canica es la parte derecha de una parábola.



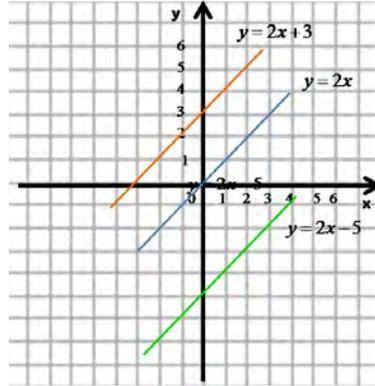
5. De las siguientes gráficas ¿cuál describe el movimiento de una canica en un plano inclinado, impulsada desde abajo hacia arriba?:



## Forma y posición de la curva.

En las gráficas de las funciones cuadráticas, hay valores en la expresión que hacen que la forma y posición de los puntos sobre la grafica se modifiquen.

Ejemplo: En una familia de rectas que tienen la misma pendiente (a constante) y distinta ordenada al origen (b diferente) entonces todas las rectas son paralelas.



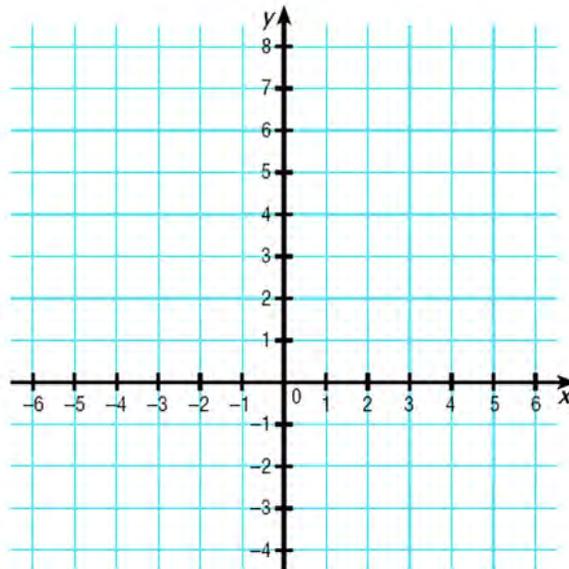
1. Completa las tablas calculando los valores de **y** para cada uno de los valores de **x**.

$x$	$y = 2x^2 - 2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

$x$	$y = x^2 - 2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

$x$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

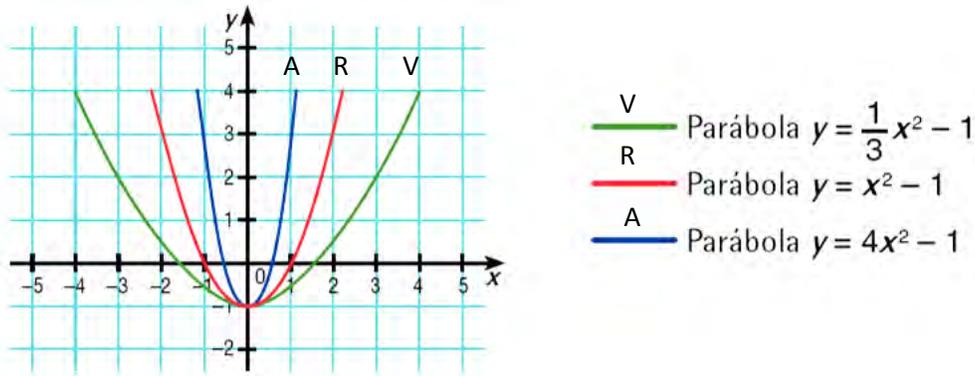
2. Ubica en el plano cartesiano los puntos de las coordenadas (**x,y**) que obtuviste en las tablas anteriores y traza las gráficas de las expresiones correspondientes.



3. La intersección de las tres gráficas, ¿en qué punto es? \_\_\_\_\_

En la expresión correspondiente a una parábola, el número b es llamado **ordenada al origen**.

4. En el plano cartesiano siguiente se encuentran las gráficas de tres parábolas



Se dice que la parábola rosa está **más abierta** que la parábola azul y **más cerrada** que la parábola verde

5. En base a la información de las gráficas anteriores completa la tabla siguiente:

Expresión algebraica	$y = \frac{1}{3}x^2 - 1$	$y = x^2 - 1$	$y = 4x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
Ordenada al origen					
Coefficiente del término de segundo grado					

¿Qué parábola está más abierta,  $y = 2x^2$  o bien  $y = 4x^2 - 17$

¿Por qué?

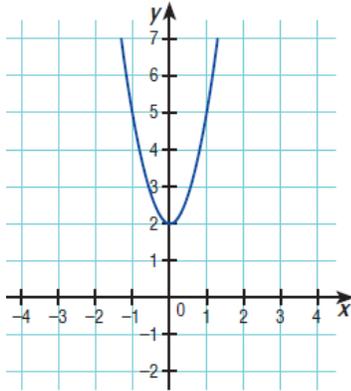
¿En que expresión el coeficiente del término de segundo grado es mayor, en  $y = 2x^2 - 1$  o bien en  $y = 4x^2 - 1$ ?

¿Qué parábola está más abierta que todas las demás?

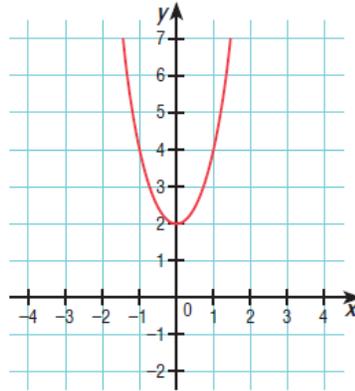
¿Qué coeficiente del término de segundo grado tiene esa parábola?

6.-Las siguientes gráficas muestran los cambios en el parámetro  $a$  de la expresión  $y = ax^2 + b$ , pon bajo la gráfica la expresión que le corresponde a cada una de las gráficas.

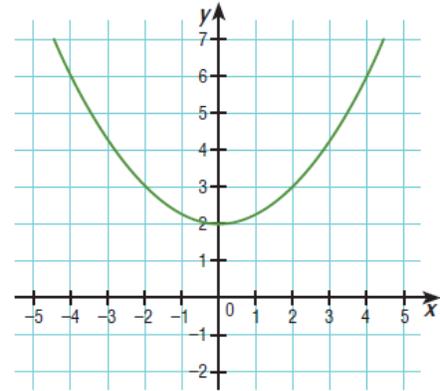
$$y = 2x^2 + 2$$



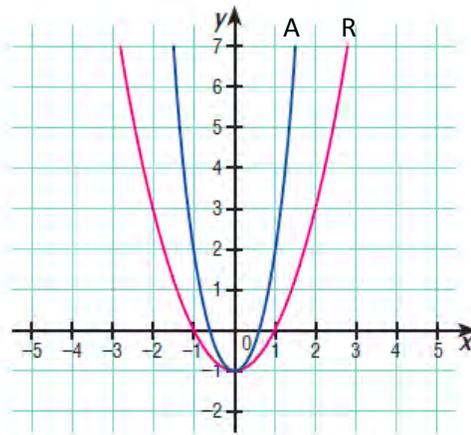
$$y = \frac{x^2}{4} + 2$$



$$y = 3x^2 + 2$$



7. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las graficas de las expresiones:  $y = x^2 - 1$ ;  $y = 3x^2 - 1$



a) ¿La gráfica de la parábola  $y = x^2 - 1$  estará más abierta o más cerrada que la parábola  $y = 3x^2 - 1$ ?

b) ¿A qué expresión corresponde la parábola rosa?

8. Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de las parábolas.

Parábola	Ordenada al origen	Coficiente del término de segundo grado	Para dónde abre la parábola (hacia arriba o hacia abajo)	Vértices
$y = -3x^2 - 1$				
$y = -3x^2 + 2$				
$y = \frac{x^2}{2} - 4$				
$y = -x^2 + \frac{1}{2}$				

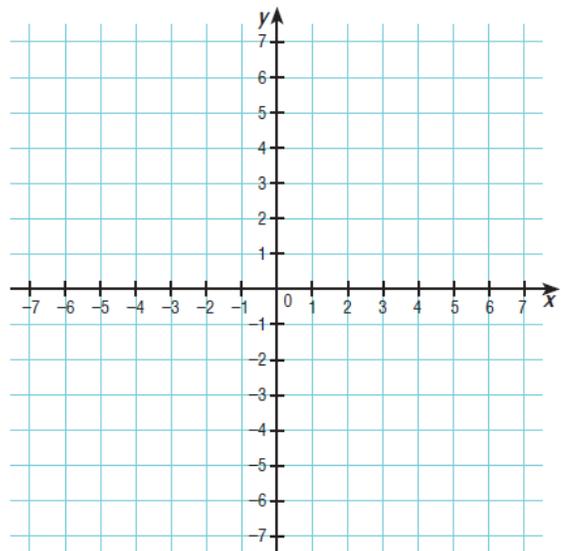
9. Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de las parábolas.

Parábola	Ordenada al origen	Coficiente del término de segundo grado	Para dónde abre la parábola (hacia arriba o hacia abajo)	Vértices
$y = 3x^2 + 1$				
$y = -3x^2 - 2$				
$y = \frac{x^2}{4} + 4$				
$y = -x^2 + \frac{1}{3}$				

10. Haz la gráfica de la parábola  $y = (x - 2)^2 + 1$  y responde lo que se pide.

a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la parábola?

b) ¿Cuál es vértice de la parábola?



### Gráficas formadas por secciones rectas y curvas.

Con frecuencia encontramos situaciones en las que la gráfica asociada a dos cantidades que varían una respecto de la otra resulta ser la unión de dos o más segmentos de líneas rectas y curvas.

Ejemplo:

Para este recipiente



La gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto al tiempo es:



Para este recipiente



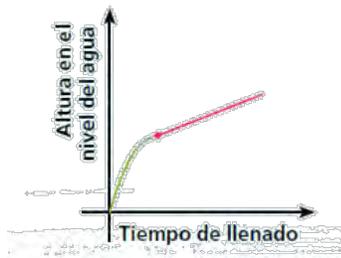
La gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto al tiempo es:



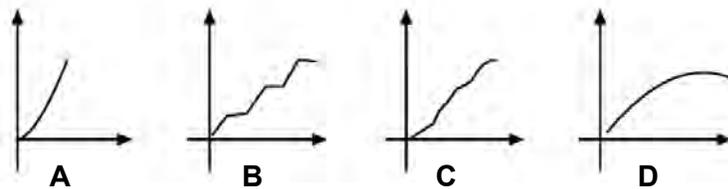
Y para el recipiente formado con la unión de los recipientes anteriores



La gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es la unión de las gráficas correspondientes a cada una de las partes.

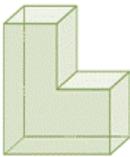
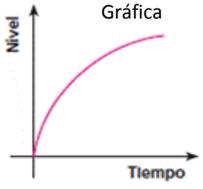
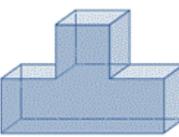
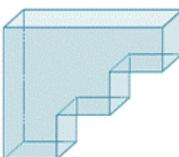
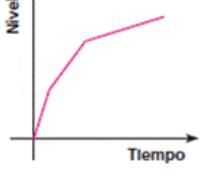
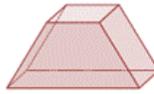
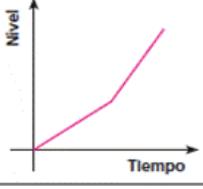
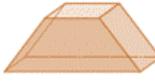
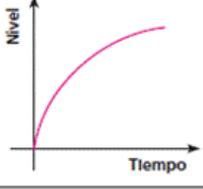
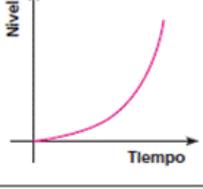
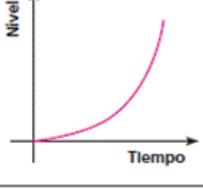
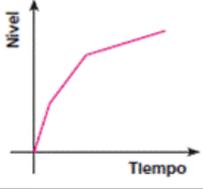
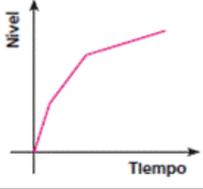


1. Las gráficas que aparecen a continuación representan la altura que alcanza un elevador en movimiento en función del tiempo.

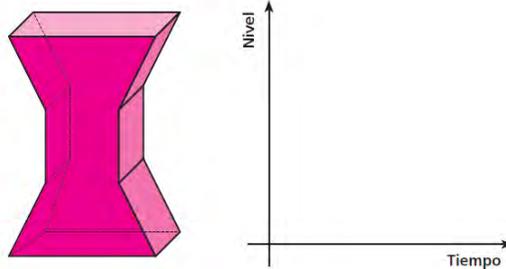


Indica ¿qué gráfica representa el hecho de que el elevador se detuvo en cada piso? \_\_\_\_\_

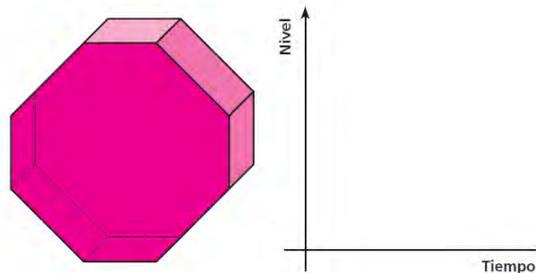
2. Relaciona el llenado de cada recipiente con una de las gráficas.

<p>a</p> 	<p>Gráfica</p> 	<p>a</p> 	<p>Gráfica</p> 
<p>b</p> 		<p>b</p> 	
<p>c</p> 		<p>c</p> 	
			

3. Realiza un bosquejo de la gráfica que corresponde al llenado del siguiente recipiente, suponiendo que el agua cae de manera constante.



4. Realiza un bosquejo de la gráfica que corresponde al llenado del siguiente recipiente, suponiendo que el agua cae de manera constante.



**Autoevaluación bloque 3.**

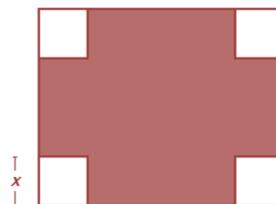
Subrayar el resultado

1. Representa con una expresión algebraica, la regla que rige la variación del siguiente caso. El volumen de un cubo ( $y$ ) en función de la longitud de la arista ( $x$ ).

- a)  $y = vt$       b)  $y = ax^2$       c)  $y = 2x$       d)  $y = x^3$

2. A un cartón rectangular cuyos lados miden 4 cm y 5 cm se le ha recortado en cada esquina un cuadrado de lado  $x$ . De las siguientes expresiones, ¿cuál permite calcular el área  $y$  del cartón sin las esquinas?

- a)  $y = 4x^2$                       b)  $y = 20 - 4x$   
 c)  $y = 20 - 4x^2$                 d)  $y = 4(20 - x)$



3. En la ecuación  $x^2 + 10x - 24 = 0$  aplicando la fórmula general ¿Cuál es el valor de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?

- a)  $a = 1$ ,       $b = 10$ ,       $c = -24$                       b)  $a = 2$ ,       $b = 11$ ,       $c = -22$   
 c)  $a = 1$ ,       $b = -9$ ,       $c = 6$                       d)  $a = -1$ ,       $b = -8$ ,       $c = 12$

4. Resolver la ecuación  $x^2 + 10x - 24 = 0$  aplicando la fórmula general.

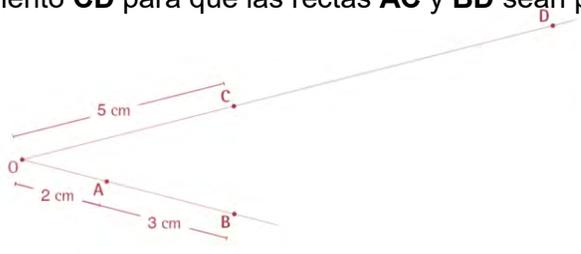
- a)  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 7$       b)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -12$       c)  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = 8$       d)  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 12$

5. Resolver la ecuación  $x^2 = 16x - 63$  aplicando la fórmula general.

- a)  $x_1 = 9$ ;  $x_2 = 7$       b)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 11$       c)  $x_1 = -9$ ;  $x_2 = -7$       d)  $x_1 = 8$ ;  $x_2 = -12$

6. Determina lo que debe medir el segmento **CD** para que las rectas **AC** y **BD** sean paralelas.

- a) 8      b) 4.5  
 c) 9      d) 7.5

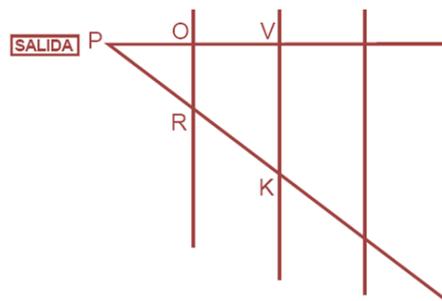


7. Dos niños participarán en una prueba de velocidad en un circuito como el que se muestra en la figura:

Ambos salen del punto P y el primero tiene que llegar al punto V, pasando por el punto O. El segundo tiene que llegar al punto K pasando por el punto R. ¿Cuántos metros recorre el segundo niño cuando va del punto R al punto K.

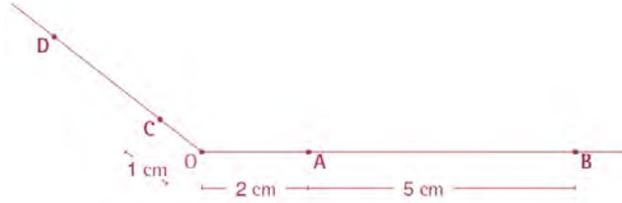
Considera:  $PR = 6.4$  m,  $PO = 5$  m y  $OV = 5$  m

- a) 5.0 m      b) 6.4 m      c) 10.0 m      d) 11.4 m

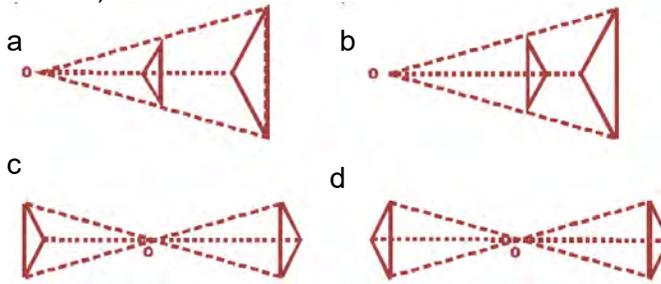


8. Determina lo que debe medir el segmento **CD** para que las rectas **AC** y **BD** sean paralelas.

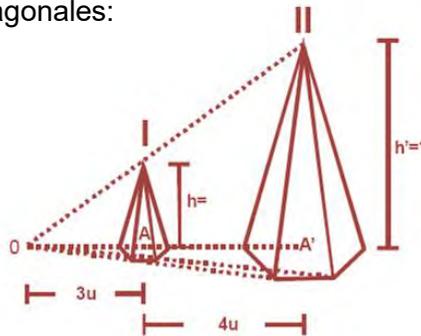
- a) 3.5      b) 2.5  
c) 6          d) 4



9. ¿Cuál de las siguientes figura enta una homotecia con valor de  $-1$ ? (considera el punto O como el centro de homotecia)



10. Observa las siguientes pirámides hexagonales:



Si la distancia del centro de homotecia (O) al punto marcado con la letra A en la figura I es de  $3u$  y su altura ( $h$ ) es de  $6u$ , ¿cuál será la medida de la altura ( $h'$ ) de la pirámide II si la distancia de el punto A de la figura I al punto A' de la figura II es  $4u$ ?

- a)  $8u$       b)  $12u$       c)  $14u$       d)  $18u$

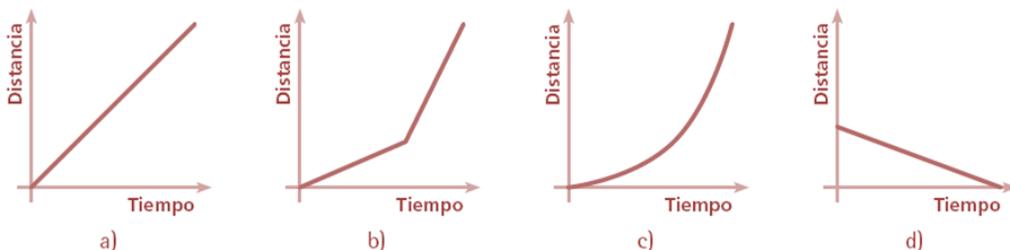
11. El siguiente dibujo se muestra una canica a punto de caer por una rampa (plano inclinado) de  $300$  cm de largo.

Usando fotografía de estroboscopia, se mide la distancia que la canica ha recorrido en cada segundo transcurrido desde que se soltó. En la tabla que se muestra a continuación se indica el resultado de esta medición.

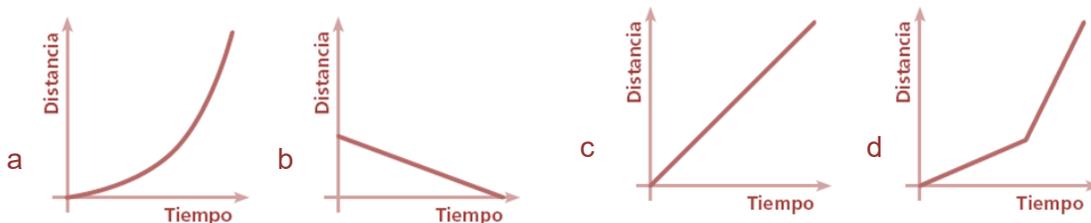


Tiempo	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s
Distancia	0 cm	10 cm	30 cm	80 cm	150 cm	230 cm

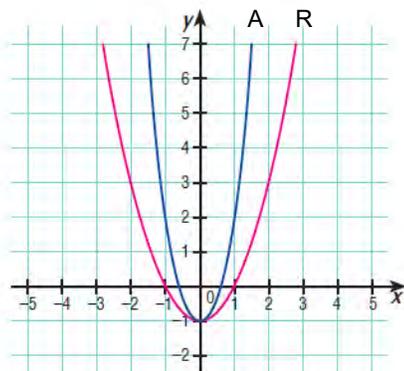
¿Cuál de estas gráficas representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por la canica?



12. ¿Cuál de las siguientes representaciones corresponden a la distancia recorrida por un objeto en caída libre al vacío?



13. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las graficas de las expresiones:  $y = x^2 - 1$   
 $y = 3x^2 - 1$



R=Rosa  
A=Azul

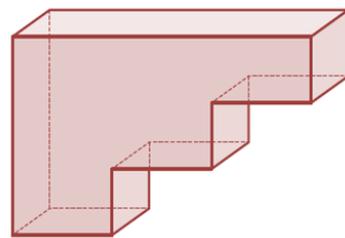
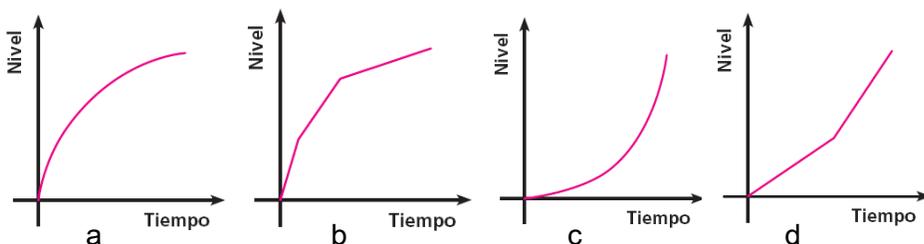
¿A qué expresión corresponde la parábola rosa?

- a)  $y = 3x^2 - 1$       b)  $y = x^2 - 1$       c)  $y = x^2 + 2$       d)  $y = 2x^2 - 1$

14. En la expresión  $y = 6x^2 - 1$ , ¿cuál es la ordenada al origen?

- a) 1      b) -6      c) 6      d) -1

15. Relaciona el llenado del siguiente recipiente con una de las gráficas.



## Bloque 4

### Sentido numérico y pensamiento algebraico.

#### Sucesiones numéricas y figurativas.

Se entiende por sucesión a un conjunto de números o figuras que se encuentran en algún orden.

Existen problemas en los que se trata de predecir el término que sigue en una sucesión como la mostrada: 6, 13, 20, 27, 34, ..., ... Sin embargo, hay sucesiones que presentan mayor dificultad para hallar el número siguiente, como en: 5, 11, 21, 35, 53, ... En estos casos puede aplicarse el llamado **método de diferencias**.

5		
	6	
11		4
	10	
21		4
	14	
35		4
	18	
53		4
	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Para que el patrón continúe en la tercera columna, ¿qué número debe venir después del 18 en la segunda columna? ¿Qué número debe venir después del 53 en la primera columna?

Este método de encontrar términos faltantes de una sucesión se le llama **método de diferencias**

1. Completar los procesos de encontrar el sexto y séptimo término de la sucesión

a. 3, 6, 11, 18, 27, , ...

3  
6  
11  
18  
27

b. 4, 13, 28, 49, 76, , ...

4  
13  
28  
49  
76

c. 4, 8, 14, 22, 32,  , ...

4  
8  
14  
22  
32

d. 3, 3, 5, 9, 15,  , ...

3  
3  
5  
9  
15

2.  $3n-1$  es la regla de una sucesión. Obtén los primeros cinco términos de esta sucesión y encuentra sus diferencias. ¿Cuántas columnas se deben calcular para encontrar una de valores constantes?

$n$	$3n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

3.  $n^2+2n-1$ ;  $n^3-1$  son las reglas de sucesiones. Encuentra la columna donde estén los valores constantes

$n$	$n^2 + 2n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

$n$	$n^3 - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

$n$	$7n - 6$
1	
2	
3	
4	
5	

$n$	$3n^2$
1	
2	
3	
4	
5	

¿Qué relación observas entre los valores constantes y las expresiones?

---



---



---



---



---

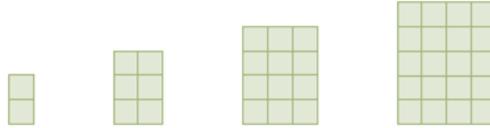
Las funciones cuadráticas pueden servir para generar sucesiones de números. La siguiente tabla tiene una lista de algunos números figurativos.

Configuración	Número poligonal	Cálculo del enésimo término	Sucesión
	Triangulares	$\frac{n(n+1)}{2}$	1, 3, 6, 10, ...
	Cuadrados	$n^2$	1, 4, 9, 16, ...
	Pentagonales	$\frac{n(3n-1)}{2}$	1, 5, 12, 22, ...
	Hexagonales	$n(2n-1)$	1, 6, 15, 28, ...

#### 4. Llenar las celdas vacías

Número figurativo	Enésimo término Como expresión de segundo grado	Valores de a, b y c
Triangulares	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} y c = 0$
Cuadrados		
Pentagonales		
Hexagonales		

5. Observa la siguiente sucesión de figuras.



Escribe la sucesión de medidas de las bases de los rectángulos

--	--	--	--	--	--

Escribe la sucesión de números con las alturas de los rectángulos

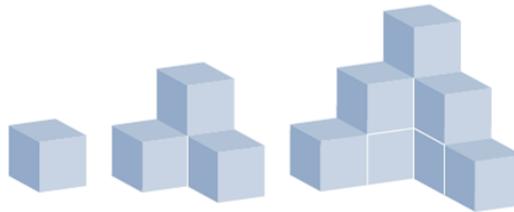
--	--	--	--	--	--

Encuentra la sucesión de números correspondientes a las áreas de la sucesión de figuras.

--	--	--	--	--	--

¿Cuántos cuadritos formarán la figura que se halla en la posición  $n$ ?

6. Reflexiona en la siguiente disposición de cubos.



Enuncia la expresión algebraica que establece el número de cubos que forman la figura que ocupa la  $n$ ésima posición de la sucesión.

7. Encuentra las formulas para obtener cualquier término de las siguientes sucesiones:

Sucesión	Diferencia	Expresión general
2, 4, 6, 8, 10,...		
3, 5, 7, 9, 11,...		
2, 7, 12, 17, 22,...		
2, 5, 8, 11, 14,...		
5, 2, -1, -4, -7,...		

**Forma, espacio y medida.**

**Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.**

**Teorema de Pitágoras**

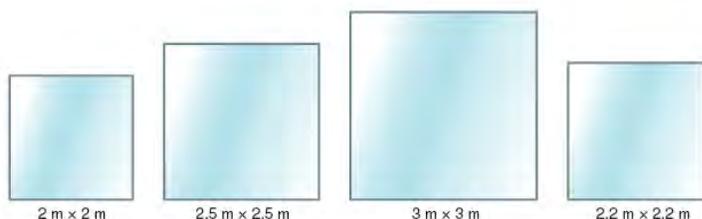
En todo triángulo rectángulo, si  $a$  y  $b$  son las medidas de los catetos y  $c$  la medida de la hipotenusa se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Es decir, el área del cuadrado de lado  $c$  (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados del lado  $a$  y el lado  $b$  (catetos).

1. En una escuela se quiere adaptar un salón para las clases de danza. Se han comprado algunos espejos para el salón con las siguientes medidas:

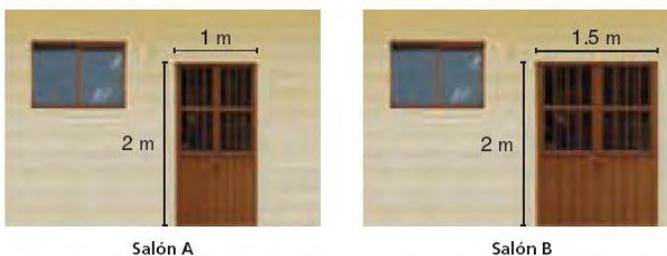


Existe un inconveniente: la entrada del salón mide 2m de alto y 1m de ancho.

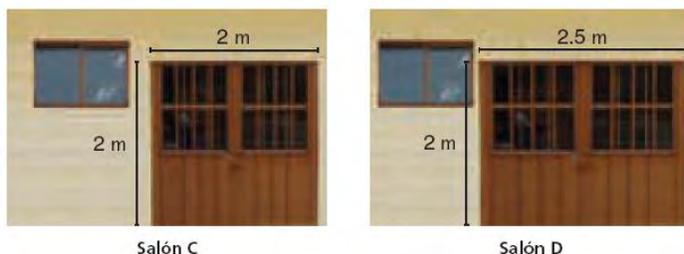
a) ¿Cuáles son los espejos que pueden pasar por esta entrada?

b) ¿Cómo lo puedes determinar?

c) Si la media del largo de los espejos que se compraron es de 2.5m, ¿cuál es la medida máxima del ancho que puede tener un espejo para pasar por esa entrada?



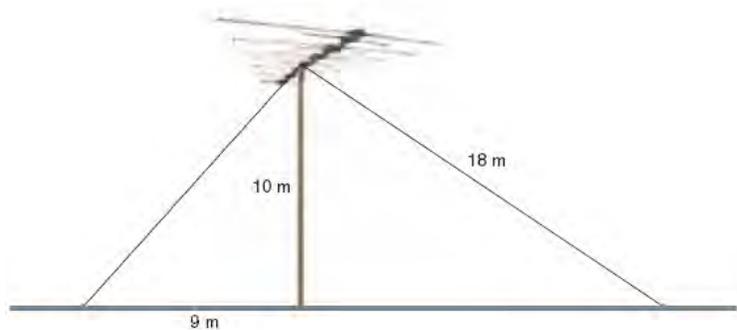
Se quiere colocar un espejo de 2.5m x 2.5m en uno de los salones de la escuela. Los salones tienen una única entrada con las siguientes dimensiones.



d) ¿En qué salones es posible que entre el espejo?

e) ¿Por qué?

2 . Una antena de TV mide 10m de altura y está fijada con alambres, uno de los cuales mide 18m.



a) ¿A qué distancia de la base de la antena queda fijo el alambre de 18m sobre el piso, si se usa toda la longitud del alambre?

b) En la misma antena de TV, otro de los alambres está fijo al piso a una distancia de 9m de la base. ¿Cuál es la longitud de ese alambre?

3 . El tamaño de una pantalla de televisión se define como la longitud de la diagonal de la pantalla en pulgadas.



a) Una pantalla mide 56" de ancho y 42" de alto, ¿qué longitud mide la diagonal de esta pantalla?

b) ¿Si la diagonal de una pantalla es de 25''? Da por lo menos dos combinaciones de medidas.

### Razones trigonométricas.

El Canadarm 2; un brazo manipulador robótico gigantesco de la estación Espacial Internacional, es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las **funciones trigonométricas** de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

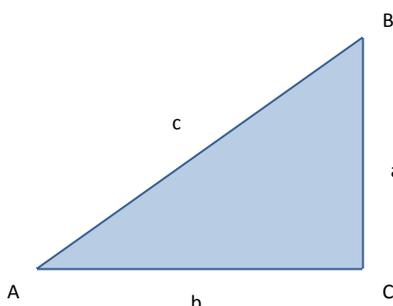


<http://www.aexa.tv>

$$\text{sen } A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$



$$\text{cosec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

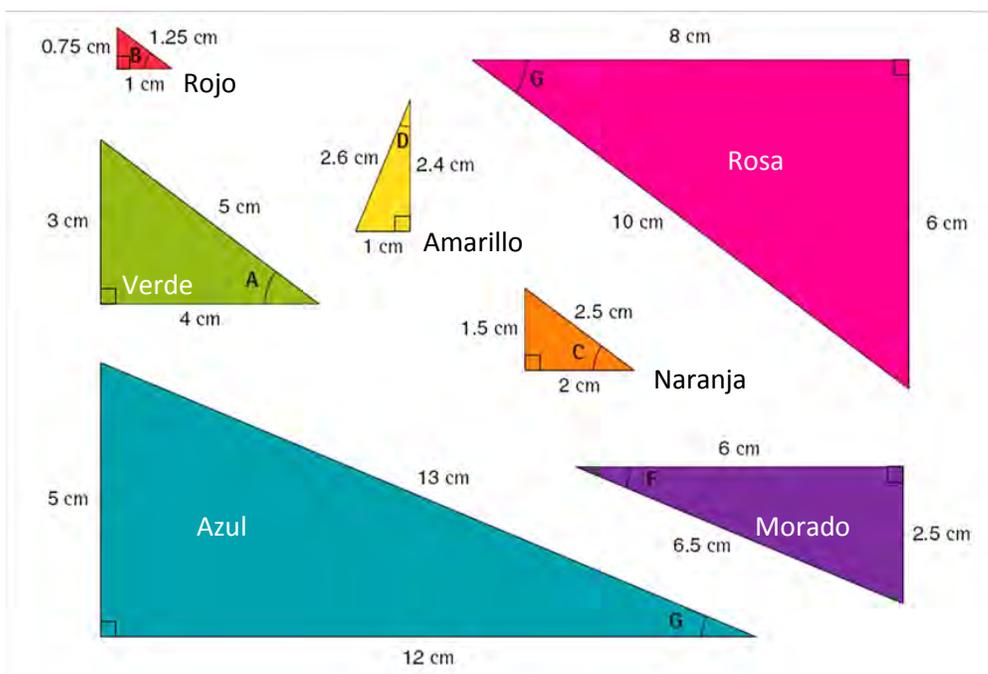
$$\text{sec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cotan } A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

El seno de un ángulo es igual al inverso multiplicativo de la cosecante del mismo ángulo.

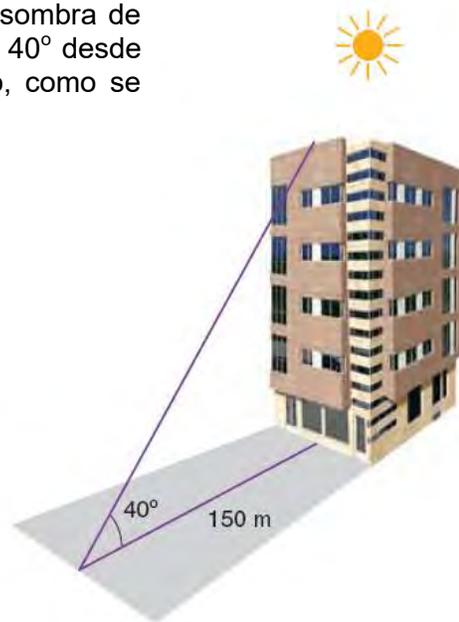
El valor de estas **razones** está relacionado con el del ángulo, de tal modo que a cada valor corresponde un valor único de la razón. Es decir, que estas razones son funciones del ángulo. A estas razones se las conoce como **funciones trigonométricas** de los ángulos.

1. De estos siete triángulos en donde se distinguen los ángulos A, B, C, D, E, F y G. Completa la tabla posterior.



	Cateto adyacente (cm)	Cateto opuesto (cm)	Hipotenusa (cm)	$\text{Coseno} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
Triángulo verde (ángulo A)					
Triángulo rojo (ángulo B)					
Triángulo naranja (ángulo C)					
Triángulo amarillo (ángulo D)					
Triángulo azul (ángulo E)					
Triángulo morado (ángulo F)					
Triángulo rosa (ángulo G)					

2. A determinada hora del día un edificio proyecta una sombra de 150m sobre un punto en el piso formando un ángulo de  $40^\circ$  desde el punto en el piso hasta la parte más alta del edificio, como se muestra en la figura. ¿Qué altura tiene el edificio?

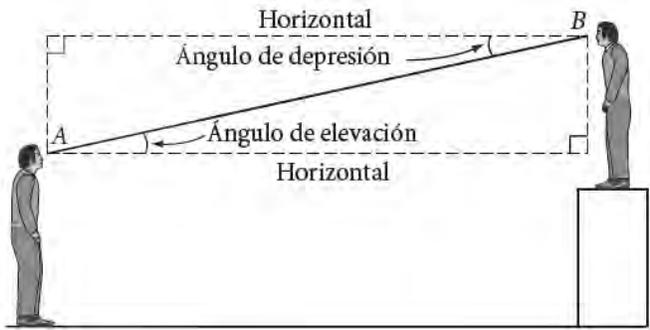


3. En un faro situado a 40m sobre el nivel del mar, se observa un barco bajo un ángulo de  $24^\circ$ , como se muestra en la figura. ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?

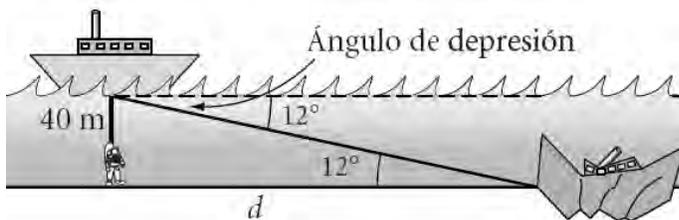
4. El ángulo desde la horizontal hasta tu recta visión presenta dos casos:

a) Si miras hacia arriba, medirás el **ángulo de elevación**.

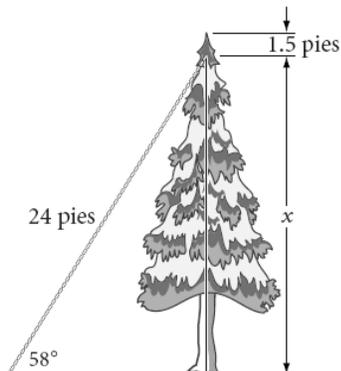
b) Si miras hacia abajo, medirás el **ángulo de depresión**.



El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de  $12^\circ$ . Un buzo es bajado 40m hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?



5. Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de  $58^\circ$  con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?



## Manejo de la información.

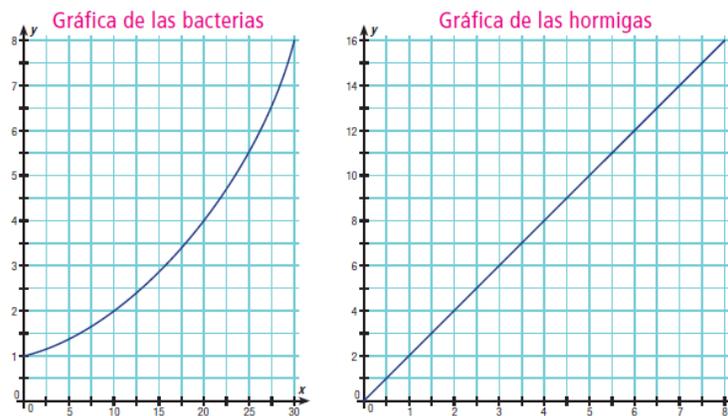
### Crecimiento aritmético y geométrico.

En la naturaleza se pueden encontrar distintas formas de reproducción de las especies, lo que nos ha llevado a vincular dichas generaciones con los crecimientos exponenciales y proporcionales; relacionados a su vez con sucesiones geométricas y aritméticas respectivamente.

En las sucesiones geométricas sus términos son el resultado de multiplicar el término anterior por un número fijo, llamado razón común; este número, se puede obtener también elevándolo a algún exponente.

En las sucesiones aritméticas sus términos son el resultado de sumar al término anterior un número fijo llamado diferencia común; de esta forma se da un crecimiento lineal y proporcional.

Ejemplo gráfico de crecimiento exponencial y lineal.



1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones crece exponencialmente?

- a) 5, 15, 45, 135...
- b) 2, 6, 9, 12...
- c) 3, 12, 27, 48...
- d) 5, 10, 15, 20...

2. ¿Cuál de las siguientes sucesiones crece exponencialmente?

- a) 5, 8, 11, 14...
- b) 2, 6, 18, 54...
- c) 3, 12, 27, 48...
- d) 2, 6, 10, 14...

3. Se sabe que una población de conejos aumenta el 10% cada año. Si actualmente hay 1 000 conejos en esa población, ¿cuántos conejos habrá dentro de 3 años?

4. Se sabe que una población de conejos aumenta el 5% cada año. Si actualmente hay 2 000 conejos en esa población, ¿cuántos conejos habrá dentro de 3 años?

5. Juan planea invertir \$10 000 pesos por 3 años. El banco ha ofrecido pagarle el 10% de intereses cada año y una empresa le ha ofrecido pagar 1 100 pesos cada año. ¿Con cuál de las dos ofertas ganará más dinero?

6. María planea invertir \$10 000 pesos por 3 años. El banco ha ofrecido pagarle el 20% de intereses cada año y una empresa le ha ofrecido pagar 2 500 pesos cada año. ¿Con cuál de las dos ofertas ganará más dinero?

## Representación de la información.

Para tener idea del comportamiento de un fenómeno es necesario consultar datos sobre diversos aspectos de ese fenómeno. Así, por ejemplo, alrededor del crecimiento de estalactitas y estalagmitas en una gruta se pueden plantear y analizar diversas preguntas, como las siguientes:

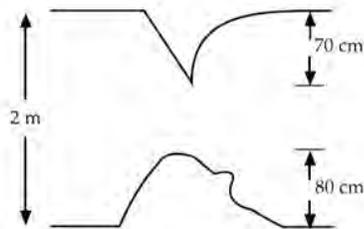
1. ¿Qué son y cómo crecen las estalactitas y las estalagmitas?

Las siguientes tablas muestran cómo han crecido una estalactita y su correspondiente estalagmita durante los últimos 6 años.

Estalactita							
Número de años desde la primera medición	0	1	2	3	4	5	6
Longitud en cm	70	72	75	76	78	80	82

Estalagmita							
Número de años desde la primera medición	0	1	2	3	4	5	6
Longitud en cm	80	83	85	88	90	92	94

La cueva tiene 2 m de alto. Cuando se midió por primera vez se observó un perfil como el siguiente:



2. Transcurridos dos años desde la primera medición, ¿qué tan cerca estarán las dos puntas?
3. ¿Y en seis años?
4. Realiza una predicción acerca del momento en que se unirán las estalactitas y las estalagmitas. Justifica tu respuesta.

Algunos aspectos a estudiar con respecto a la población.

5. Para dar respuesta a las preguntas siguientes, tienes que investigar sobre los campos de la tabla posterior; ¡pero del censo anterior! y comparar.

Población	Guanajuato	Estados Unidos Mexicanos
 Población total, 2010	5,486,372	112,336,538
 Población total hombres, 2010	2,639,425	54,855,231
 Población total mujeres, 2010	2,846,947	57,481,307
 Relación hombres-mujeres, 2010	92.7	95.4
 Hogares, 2010	1,266,772	28,159,373
 Hogares con jefe hombre, 2010	964,206	21,243,167
 Hogares con jefe mujer, 2010	302,566	6,916,206
 Tamaño promedio de los hogares, 2010	4.3	3.9

6. ¿En qué porcentaje se incrementó la población de México y del estado de Guanajuato en relación al censo anterior?

En relación a los hogares:

7. ¿Qué podemos analizar respecto a la diferencia que existe entre el país y el estado?

8.- Comparando estos datos con el censo anterior ¿qué ha ocurrido?

**Autoevaluación bloque 4.**

Subrayar el resultado

1. ¿Cuál es el sexto término de la siguiente sucesión? 3, 6, 11, 18, 27, , ...

- a) 38      b) 29      c) 31      d) 36

2. ¿Cuál es el sexto y séptimo término de la siguiente sucesión? 4, 8, 14, 22, 32, , , ...

- a) 35, 40      b) 34, 45      c) 44, 58      d) 36, 41

3.  $3n-1$  es la regla de una sucesión. Obtén los primeros cinco términos de esta sucesión y encuentra sus diferencias. ¿Cuántas columnas se deben calcular para encontrar una de valores constantes?

a) 2

b) 0

c) 1

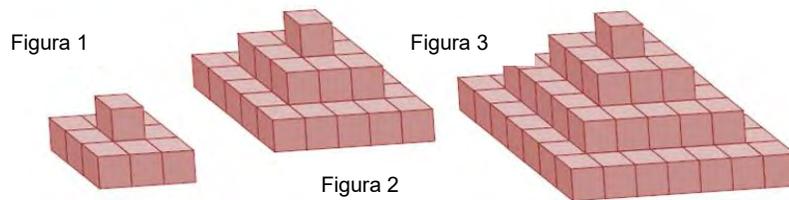
d) 3

$n$	$3n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	

4. ¿Cuántos cubos tendría la cuarta sucesión figurativa?

a) 165      b) 180

c) 84      d) 170

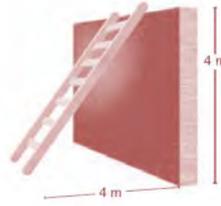


5. ¿Cuál es la fórmula para obtener la siguiente sucesión? 2, 7, 12, 17, 22, ...

a)  $2n+1$ b)  $5n - 3$ c)  $3n - 1$ d)  $-3n + 8$

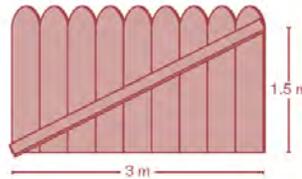
6. Una escalera está recargada sobre una pared de 4 m de altura y el pie de la escalera está a 4 m de la barda. ¿Cuánto mide la escalera?

- a) 4.70 m      b) 6.5 m  
c) 10 m        d) 5.65 m



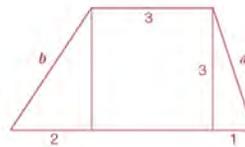
7. A una cerca de madera se le necesita colocar un travesaño para reforzarla. ¿Cuál es la longitud que debe tener el travesaño, si la cerca tiene 3 m de largo y 1.5 m de alto?

- a) 2.75 m      b) 4.5 m  
c) 3.35 m      d) 3.85 m



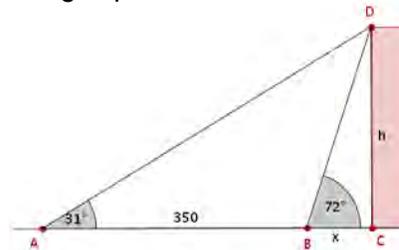
8. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?

- a) 12.85      b) 15.76  
c) 13.40      d) 17.35



9. Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo de  $72^\circ$  sobre la horizontal. Si nos alejamos 350 metros, lo vemos bajo un ángulo de  $31^\circ$ . ¿A qué altura se encuentra la torre?

- a) 260.3      b) 161.3  
c) 261.3      d) 84.9



10. Encuentra la altura de la torre y la longitud del tirante que la sostiene.

- a) Altura de la torre 64.33m. Longitud del tirante 70.98m  
b) Altura de la torre 70.20m. Longitud del tirante 80.88m  
c) Altura de la torre 66.20m. Longitud del tirante 71.60m  
d) Altura de la torre 60.30m. Longitud del tirante 70.98m



11. ¿Cuál de las siguientes sucesiones crece exponencialmente?

- a) 5, 15, 45, 135 ...    b) 2. 6. 9. 12 ...    c) 3, 12, 27, 48 ...    d) 5, 10, 15, 20 ...

12. Se sabe que una población de conejos aumenta el 10% cada año. Si actualmente hay 1 000 conejos en esa población, ¿cuántos conejos habrá dentro de 3 años?

- a) 1 120    b) 1 400    c) 1 331    d) 1 321

13. María planea invertir 7 500 pesos por 3 años. El banco ha ofrecido pagarle el 20% de intereses cada año y una empresa le ha ofrecido pagar 2 500 pesos cada año. ¿Con cuál de las dos ofertas ganará más dinero?

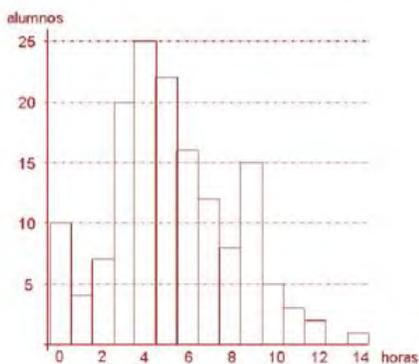
- a) Con la empresa 7 500. Con el banco 7 280    b) Con la empresa 7 400. Con el banco 7 300  
 c) Con la empresa 7 500. Con el banco 7 000    d) Con la empresa 8 000. Con el banco 7 280

14. La siguiente tabla muestra el número de horas a la semana que ven televisión los alumnos de una escuela:

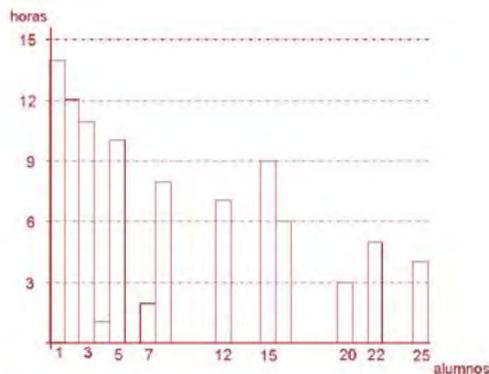
Horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Alumnos	10	4	7	20	25	22	16	12	8	15	5	3	2	0	1

De las siguientes gráficas, ¿cuál representa mejor esta situación?

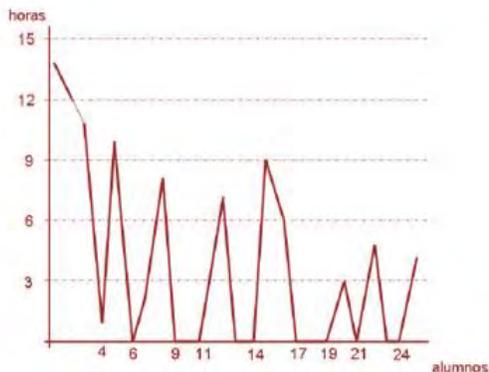
a



b



c



d



**Bloque 5****Sentido numérico y pensamiento algebraico.****Ecuación lineal, cuadrática y sistema de ecuaciones.**

Plantear y resolver problemas mediante el uso de ecuaciones resulta ser uno de los objetivos de la competencia matemática, por lo que es importante desarrollar esta capacidad.

Ejemplo:

Hallar un número, diferente de cero, sabiendo que su cuadrado es igual al duplo del número multiplicado por 6.

- Sea  $x$  el número que buscamos.
- El cuadrado del número es  $x^2$
- El duplo es  $2x$

La ecuación, de acuerdo con el problema es:

$$x^2 = (2x)6$$

$$x^2 = 12x$$

y pasando al primer miembro  $x^2 - 12x = 0$

Resolviendo la ecuación, que es una ecuación incompleta del tipo  $x^2 + bx = 0$

$$x(x - 12) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 12$$

De las dos soluciones, sólo es válida, de acuerdo con las condiciones del problema, la segunda, o sea,  $x_2 = 12$ . El número buscado es 12

Comprobación.

El número = 12

Duplo del número  $12 \times 2 = 24$

Cuadrado del número  $= 12^2 = 144$

Duplo del número por 6  $= 2(12)6 = 24(6)144$

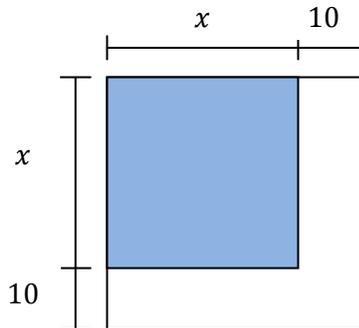
$$144 \equiv 144$$

Recuerda utilizar el **Modelo de apoyo para resolver problemas**, ¡no olvides verificar!

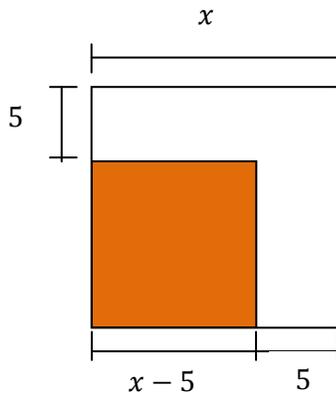
Resuelve:

1. El área de un rectángulo es de  $33 m^2$  y la base mide  $8 m$  más que la altura. Calcular las dimensiones.
2. Diversas personas se deben repartir un premio de \$200 en partes iguales. Al hacer el reparto, cinco de ellas desisten a su parte a favor de las demás y entonces a cada una de las restantes le corresponde \$20 más. ¿Cuántas personas eran antes de realizar el reparto?
3. Hallar tres números enteros consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los dos menores sea igual al cuadrado del mayor, más doce unidades.
4. En una tienda un artículo de \$56 se vende, en barata; rebajado en un tanto por ciento igual al precio de venta. ¿Cuál es el precio de venta?
5. Hallar un número distinto de cero, tal que el triple de su cuadrado sea igual a 6 veces el mismo número.
6. Un número es igual al cuadrado de otro y la suma de ambos es 42 ¿cuáles son estos números?
7. Hallar dos números pares consecutivos, cuyo producto sea igual a 224.

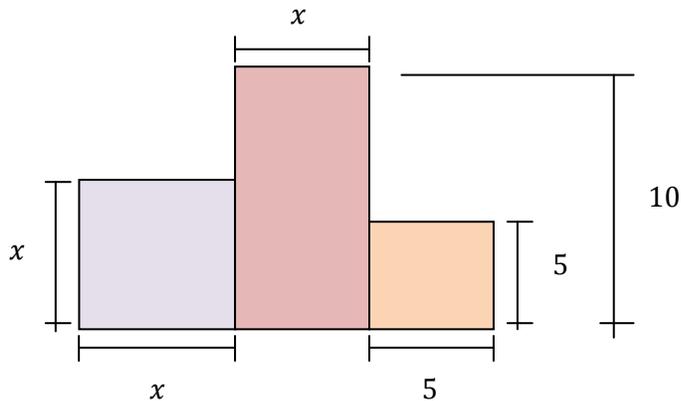
8. El terreno cuadrado que se ilustra abajo tiene un área de  $2\,500\text{ m}^2$ , se desea utilizar únicamente la parte que aparece coloreada en la figura. Si  $x$  es la medida del lado de ese cuadrado que se va a usar, ¿qué medida es  $x$ ?



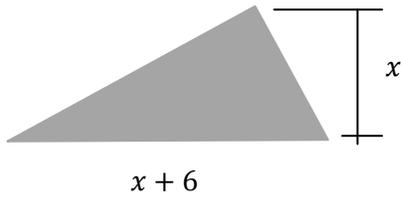
9. El área del cuadrado de color, en la siguiente ilustración, es de  $225\text{ m}^2$ . ¿Cuánto mide el lado del cuadrado mayor?



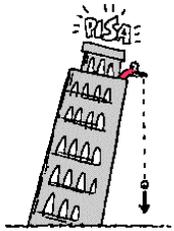
10. En el plano de la fachada de un edificio antiguo, un arqueólogo observa que algunos datos se han borrado. (Ver la figura siguiente) ¿Cuáles son esos datos, si se sabe que todas las medidas que faltan son iguales y que además el área de todas las fachadas es  $144\text{ m}^2$ ?



11. La base de un triángulo mide  $6\text{ m}$  más que la altura y el área es de  $20\text{ m}^2$ . Calcular la base y la altura.



En su libro “Diálogos sobre dos nuevas ciencias” (1637) Galileo Galilei estudia por primera vez con toda precisión la caída libre de los cuerpos y señala fórmulas para resolver problemas relativos a dicho movimiento. Por ejemplo, para calcular el tiempo  $t$  que tarda en caer un objeto que ha sido lanzado desde una altura  $a$ , con una velocidad inicial  $v$ , aplicaba la fórmula:



$$5t^2 + vt - a = 0$$

12. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo un objeto que es lanzado desde la Torre de Pisa (40 m de altura) con una velocidad inicial de 10 m por segundo?

13. Una pelota con una rapidez horizontal de  $2.25\frac{\text{m}}{\text{s}}$  rueda por una mesa con una altura de  $1.20\text{ m}$ . ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al suelo? ¿Qué tan lejos llegará de un punto en el piso directamente abajo del borde de la mesa?

14. Encontrar dos números cuya suma es 11 y el producto 30.

15. Se necesitan 76m de tela para la confección de cortinas. Si la tela encoge un 5%, ¿cuántos metros deberán comprarse?

16. Un objeto se vende en barata en \$105.40 con una rebaja del 15% del precio normal. ¿Cuál era el precio normal?

17. Al comenzar el año escolar un alumno compra 6 libros y 7 cuadernos por \$199.00 Para completar su equipo de trabajo le faltan 2 libros y 3 cuadernos que compra posteriormente por \$71.00 ¿Cuánto le cuesta cada libro y cada cuaderno suponiendo que todos los libros tienen el mismo precio y todos los cuadernos también?

18. En una función de cine se recaudaron \$2 500.00 Si hay boletos de \$10.00 y \$6.00, ¿cuántos boletos se vendieron de cada clase, si en total asistieron 350 personas?

**Forma, espacio y medida.****Cilindros, conos y esferas.**

Un **cilindro sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un rectángulo gira en torno a uno de sus lados o a un segmento paralelo a ellos. Por tal motivo, es un **sólido de revolución** y se le llama así porque un significado de revolución es vuelta o giro. Un **cono sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un triángulo isósceles gira en torno a su eje de simetría. La **esfera** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un círculo se gira en torno a uno de sus ejes. Por tal motivo, el cono y la esfera también son **sólidos de revolución**.

**Cilindro**

**Superficie cilíndrica.** Denomínese superficie cilíndrica la engendrada por una recta que se mueve de tal modo que es siempre paralela a una recta fija y pasa por una curva fija cuyo plano no contiene la recta fija.

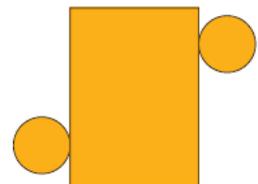
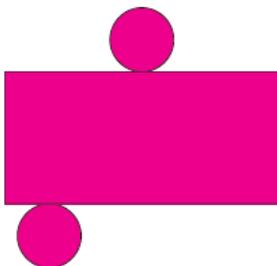
**Generatriz.** Llámese generatriz de una superficie cilíndrica tanto la recta que la engendra como toda recta que representa ésta en una de sus posiciones.

**Cilindro.** Llámese cilindro un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas.

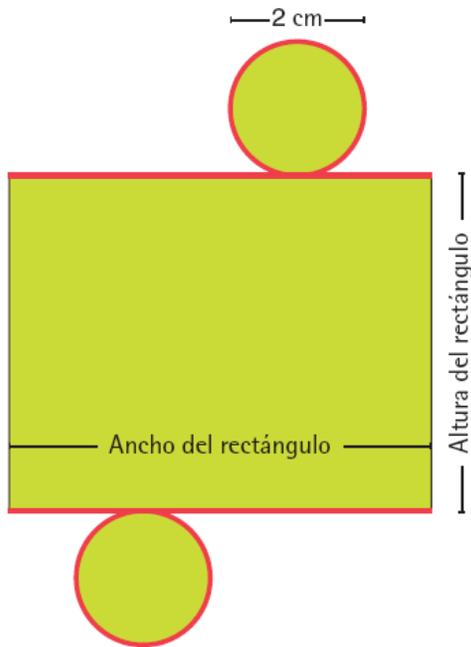
La sección de un cilindro determinada por un plano que contiene una generatriz es un paralelogramo.

Las bases de un cilindro son iguales.

1. Marca en el recuadro los desarrollos planos con los que se puede construir un cilindro recto sin que se desperdicie papel.



2. Ten presente el siguiente desarrollo para armar un cilindro.



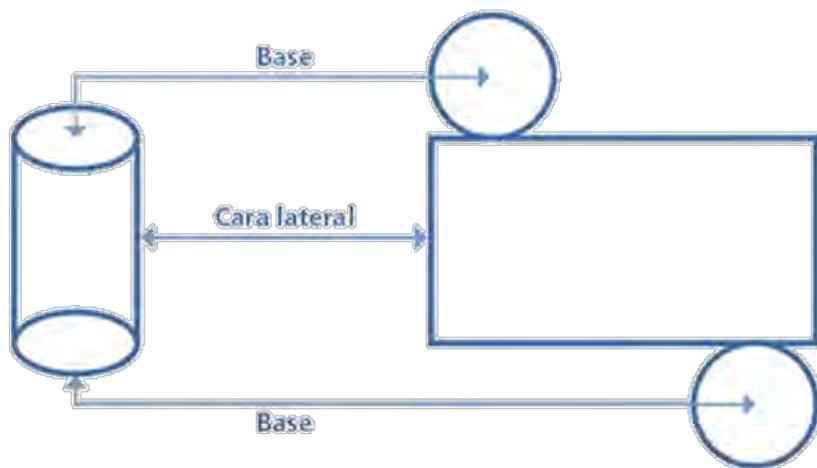
a) Obtén el perímetro del círculo

b) ¿Cuánto debe medir el ancho del rectángulo?

c) ¿Qué relación debe existir entre el ancho del rectángulo y el perímetro del círculo?

Recuerda agregar pestañas para poder pegar todas las secciones planas.

El desarrollo plano del cilindro está constituido por dos secciones planas circulares llamadas bases y una superficie curva que es un rectángulo.



El ancho del rectángulo tiene de medida  $2\pi r$ , donde  $r$  es el radio de las bases y la altura del rectángulo corresponde a la altura del cilindro. Construye un cilindro

Cono

**Superficie cónica.** Llámese superficie cónica toda superficie engendrada por una recta que se mueve de tal modo que siempre corta una curva plana fija y pasa por un punto exterior al plano de esta curva. La curva fija se llama directriz; el punto fijo, vértice.

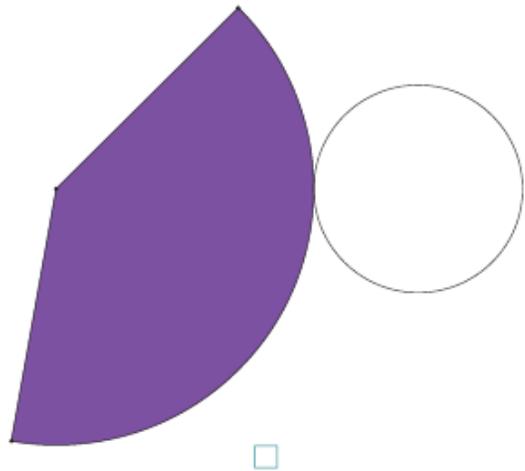
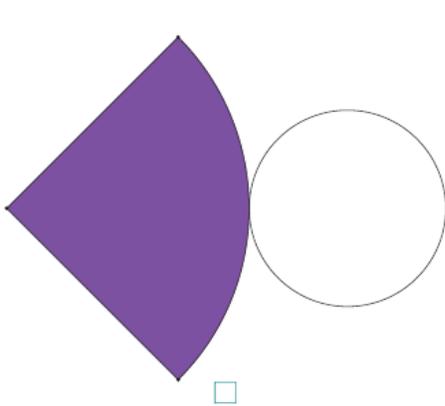
**Generatriz.** Llámese generatriz de una superficie cónica la recta que engendra la superficie y también toda recta que representa una de las posiciones por que pasa aquélla; esto es, toda recta que va del vértice a la directriz.

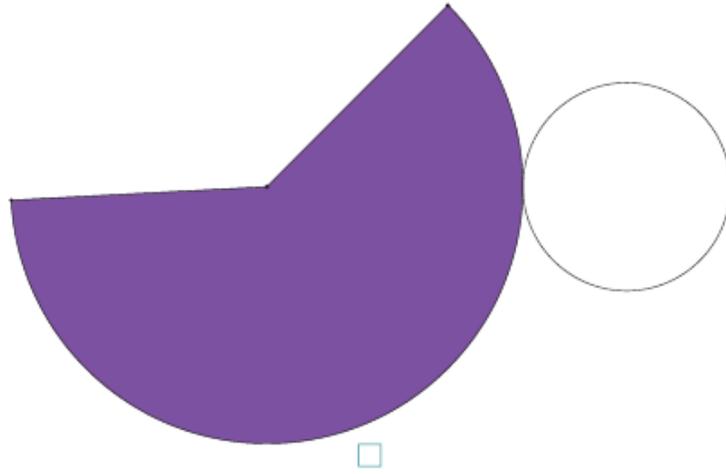
**Cono.** Llámese cono todo sólido limitado por una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices.

Toda sección de un cono determinada por un plano que pasa por el vértice es un triángulo.

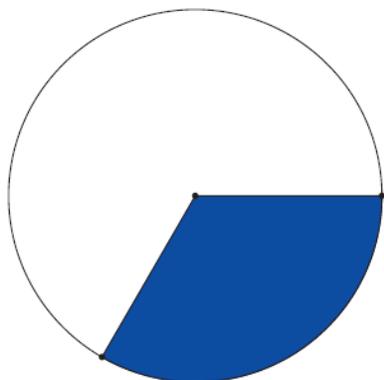
Toda sección paralela a la base de un cono circular es un círculo.

1. Marca en el recuadro los desarrollos planos con los que se puede construir un cono sin que se desperdicie papel.



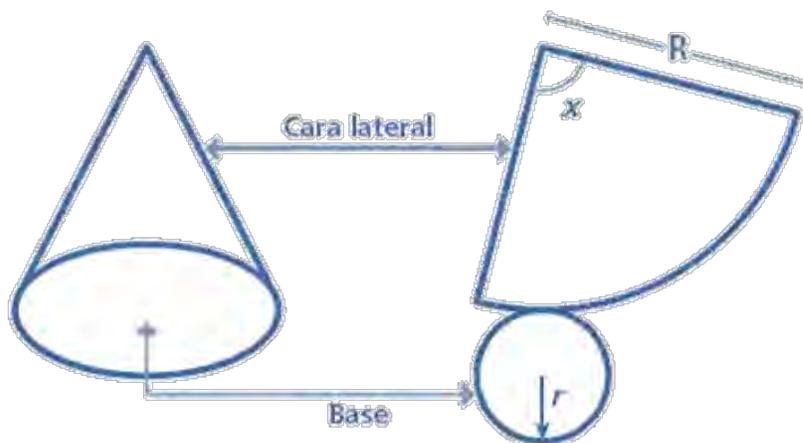


2. La circunferencia siguiente es de 3cm de radio y el sector circular sombreado es de un ángulo central de  $120^\circ$ .



a) ¿Cuál es la medida de la circunferencia	
b) ¿Qué proporción de la circunferencia completa es el arco del sector circular?	
c) ¿Cuál es la medida del arco del sector circular?	
d) La superficie lateral del cono es generada por el sector circular ¿cuánto debe medir el perímetro de la base del cono	
e) El radio de la base del cono ¿cuánto debe medir?	

El desarrollo plano del cono está formado por una superficie plana circular llamada base y una superficie lateral curva que es un sector circular.



Si consideramos  $R$  al radio del sector circular que forma la superficie lateral del cono y  $r$  al radio de la base del cono, para calcular el ángulo del circular ( $x$ ) se establece la siguiente proporción:

$2\pi R$  corresponde a  $360^\circ$

$$\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{360^\circ}{x^\circ}; \quad x^\circ = \frac{(2\pi R)(360^\circ)}{2\pi r}$$

$2\pi r$  corresponde a  $x^\circ$

Construye un cono.

## Esfera

**Esfera.** Llámese esfera un sólido limitado por una superficie en donde todos sus puntos equidistan de un punto interior.

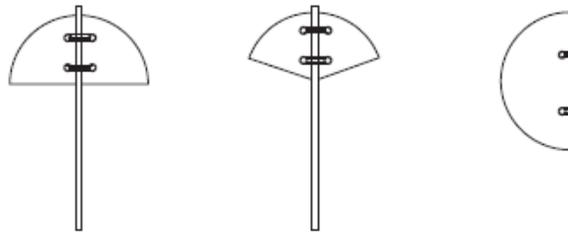
Este punto se llama centro. La superficie se llama superficie esférica, y a veces esfera también. La mitad de una esfera se llama hemisferio o semiesfera. Los términos radio y diámetro tienen significados análogos a los dados al tratar el círculo.

**Igualdad de los radios y diámetros.** Es claro que todos los radio de una esfera son iguales y que también los son todos los diámetros; que esferas iguales tienen radios iguales y que esferas de radios iguales son iguales.

Toda sección plana de una esfera es un círculo.

Todos los puntos de un círculo de una esfera equidistan de cada polo del círculo.

1. ¿Cuál de los siguientes objetos genera una esfera al girar entorno al eje?



No es posible hacer de forma exacta el desarrollo plano de una esfera. Los mapas de la tierra que vemos frecuentemente son desarrollos aproximados.

Sin embargo existen varias maneras de “aplanar” una esfera, pero hay una en particular que tiene buenas propiedades, como la de conservar ángulos. Es la denominada *proyección estereográfica*.

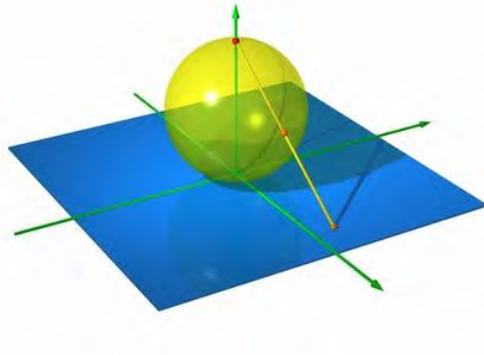
Consideremos la esfera 2-dimensional de radio 1 (con centro el origen de coordenadas  $(0, 0, 0)$ ):

$$s^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Le quitamos el polo norte  $(0, 0, 1)$ . Consideremos también un plano tangente al polo sur  $(0, 0, -1)$  (podríamos considerar en su lugar el plano que contiene al ecuador).

La idea es proyectar cada punto de la esfera sobre el plano, de la siguiente manera: Tomamos un punto de la esfera y trazamos una línea recta que una el polo norte con este punto hasta cortar con el plano. ¡El punto de corte es el que buscamos!

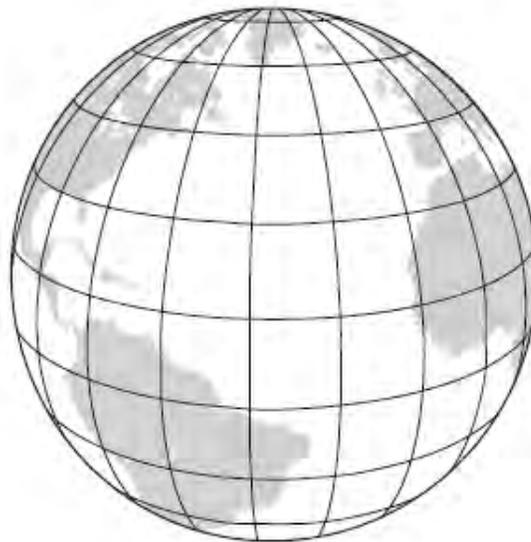
Para que quede más claro puedes ver la siguiente imagen:



2. Esfera terrestre. La Tierra tiene forma de esfera, y presenta unos elementos imaginarios que sirven para situar puntos sobre su superficie.

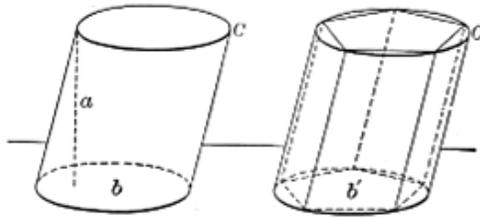
Sobre el siguiente dibujo de la esfera terrestre, señala.

- a) Los polos.
- b) El eje terrestre.
- c) De rojo, el meridiano cero.
- d) De azul, dos meridianos.
- e) De verde, el ecuador.
- f) De amarillo, dos paralelos.



**Justificación de fórmulas.**

El volumen de un cilindro circular es igual al producto de la base por la altura.



Sea C un cilindro circular de base  $b$ , altura  $h$  y volumen  $V$ .

Demostrar que  $V = bh$ .

Ejemplo:

**Demostración.** Supóngase inscrito en C un prisma de base regular  $b'$  y volumen  $V'$ .

$$V' = b' h$$

Cuando se aumenta indefinidamente el número de caras,

$V'$  tiende hacia  $V$ ,  
 $b'$  tiende hacia  $b$ .

Ahora bien,  $V'$  es siempre igual a  $b' h$ ;

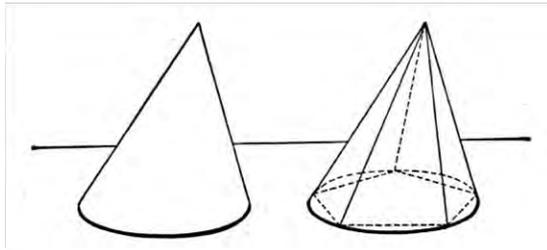
por tanto,  $b' h$  tiende hacia  $bh$ .

$$\therefore V = bh \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Corolario. El volumen de un cilindro de revolución de radio  $r$  y altura  $h$  es  $\pi r^2 h$ .

1. Justificar que  $V_c = \pi r^2 h$

El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de la base por la altura.



Sea  $V$  el volumen de un cono circular de base  $b$  y altura  $h$ .

$$\text{Demostrar que } V = \frac{1}{3}bh$$

Ejemplo:

**Demostración.** Supóngase inscrita en el cono una pirámide de base regular  $b'$  y volumen  $V'$ .

$$V' = \frac{1}{3}b'h$$

Si el número de caras de la pirámide se aumenta indefinidamente,

*$V'$  tiende hacia  $V$ ,  
 $b'$  tiende hacia  $b$ .*

Y por tanto  $b'h$  tiende hacia  $bh$ .

$$\therefore V = \frac{1}{3}bh \quad \text{L.Q.Q.D}$$

Corolario. En todo cono circular de radio  $r$  y altura  $h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

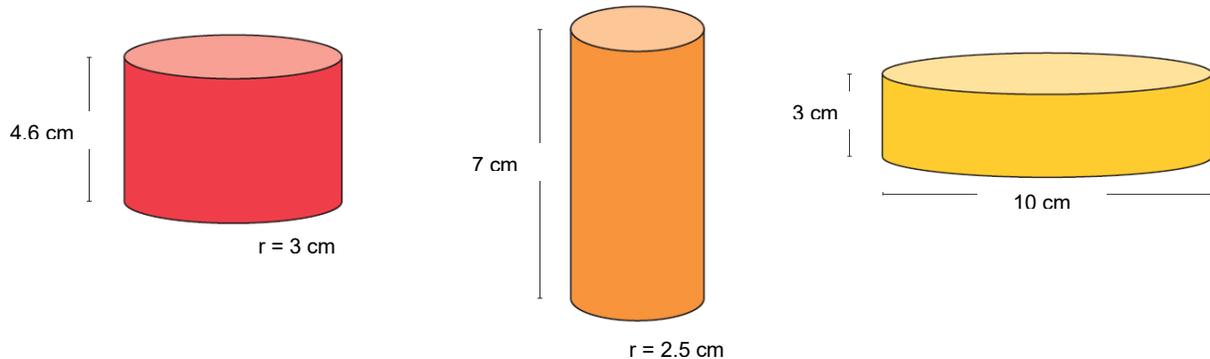
2. Justificar que  $V_{co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

**Estimar y calcular volúmenes.**

$$V_c = \pi r^2 h$$

El **Volumen de un cilindro**, al igual que el de un prisma, se multiplica el área de su base por su altura. Dado que la base de un cilindro siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de  $\pi$  por el radio al cuadrado y por la altura.

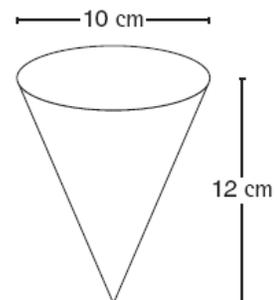
1. Calcula el volumen de los siguientes cilindros.



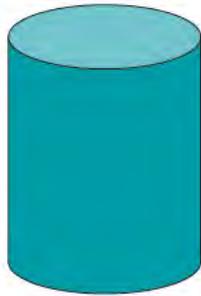
$$V_{co} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

El **volumen de un cono**, al igual que el de una pirámide, es la tercera parte del área de su base por su altura. Dado que la base de un cono siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de  $\pi$  por el radio al cuadrado y por la altura y el resultado se divide entre tres.

2. ¿Qué cantidad de agua consideras que le cabe a un cono de papel con las medidas indicadas.



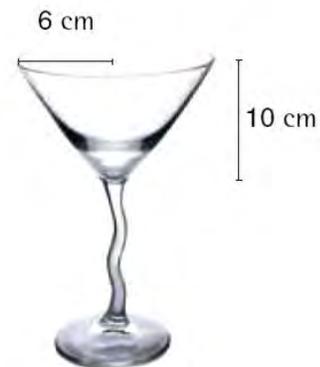
3. Los siguientes cuerpos con superficies curvas tienen exactamente la misma medida de la base y la altura.



a) ¿Cuál tiene mayor volumen?

b) ¿Cuántas veces más volumen crees que tenga?

4. Una copa en forma de cono mide 6 cm de radio en la base del cono y 10 cm de altura.



Carlos pide que le sirvan sólo la mitad de lo que le cabe a la copa. La persona que sirve pone líquido hasta la mitad de la altura. Carlos se molesta porque le sirvieron menos líquido del que había pedido.

a) ¿Cómo supo Carlos que le sirvieron menos?

b) ¿Cuánto líquido le dieron de menos?

5. Un vaso en forma de cilindro mide 6 cm de diámetro y 12 cm de altura. Al vaso le cabe...\_\_\_\_\_

a) menos de un cuarto de litro de leche.

b) más de un cuarto de litro de leche.

c) exactamente un cuarto de litro de leche.

d) más de medio litro de leche.

6. Una jarra en forma de cilindro mide 12 cm de diámetro y 20 cm de altura. A la jarra le caben ...\_\_\_\_\_

a) más de 2 litros de agua.

b) menos de 2 litros de agua.

c) exactamente 2 litros de agua.

d) más de 3 litros de agua.

## Manejo de la información.

### Gráficas de caja-brazos.

Los **procedimientos gráficos**, son útiles para ofrecer un rápido resumen visual de una gran cantidad de medidas; en suficientes ocasiones un dibujo vale más que mil datos numéricos.

La gráfica estadística llamada **caja-brazos** (boxplot o de bigotes) se construye a partir de la mediana.

La **mediana** es una de las medidas de tendencia central y **se define** como el valor que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan de menor a mayor. Por lo tanto, la mediana divide los datos ordenados en dos conjuntos de igual número de datos.

Una gráfica caja-brazos es una representación que divide en cuatro partes el total de datos.

### Construcción de la gráfica en tres pasos:

Paso 1



Se determina el valor de la mediana ( $Me$ ) y a partir de él, se forman dos grupos de datos: La primera mitad (de 0 a 50% de los datos) y la segunda mitad (de 51% a 100%).

Paso 2

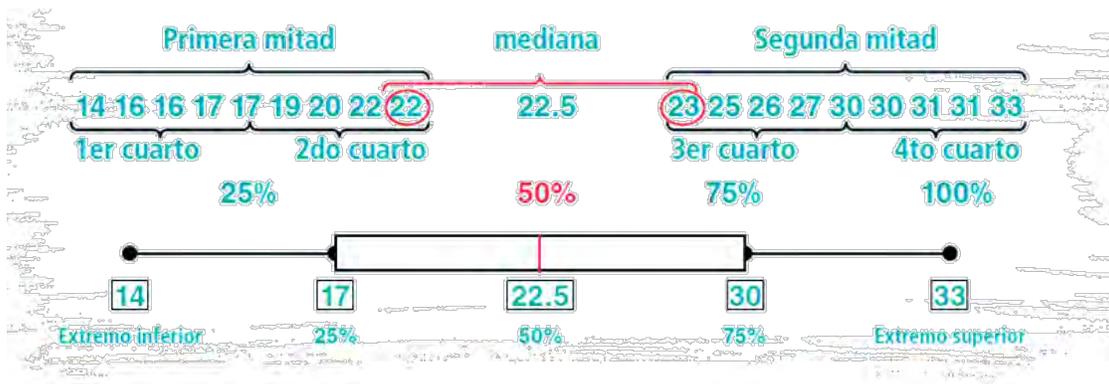


Cada mitad se divide en dos grupos, en los que se identificará también su mediana. Cada grupo corresponde a un 25% de los datos.

Paso 3



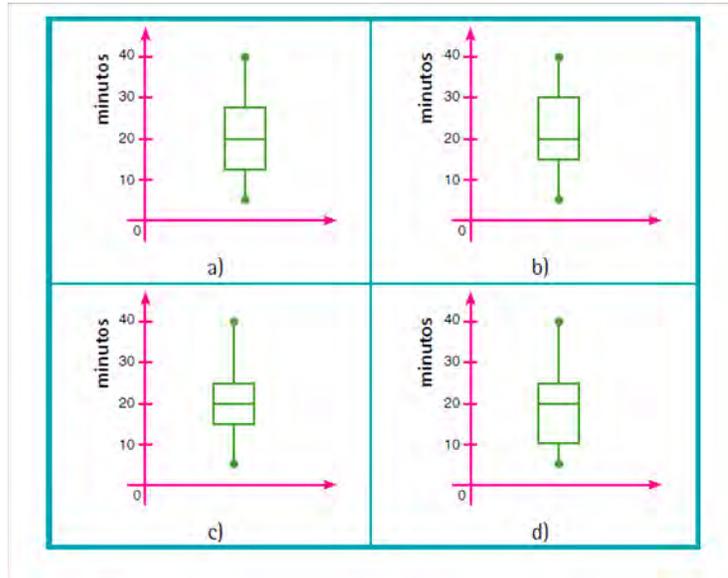
Se identifican el valor más pequeño de los datos que es el extremo inferior y el valor más grande que es el extremo superior.



1. A los 20 alumnos de un grupo se les preguntó acerca del tiempo que requieren para desplazarse de su casa a la escuela. Los tiempos en minutos fueron:

20, 20, 15, 5, 30, 15, 25, 10, 20, 5, 40, 35, 30, 30, 20, 10, 10, 25, 15, 25

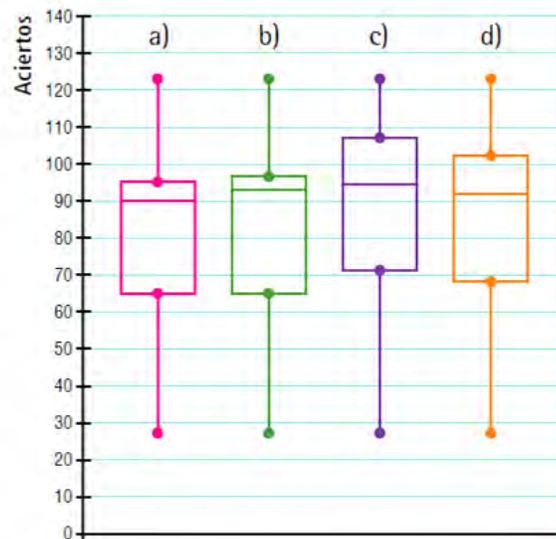
¿Cuál de las siguientes gráficas caja-brazos representa este conjunto de datos?



2. El número de aciertos que un grupo de alumnos obtuvo en la prueba de ingreso a preparatoria fue el siguiente:

75, 97, 71, 65, 84, 27, 108, 91, 122, 82, 96, 58, 94, 43, 116, 123, 91, 120, 94, 43

¿Cuál de las siguientes gráficas caja-brazos representa este conjunto de datos?



3. A un grupo de alumnos se les preguntó:

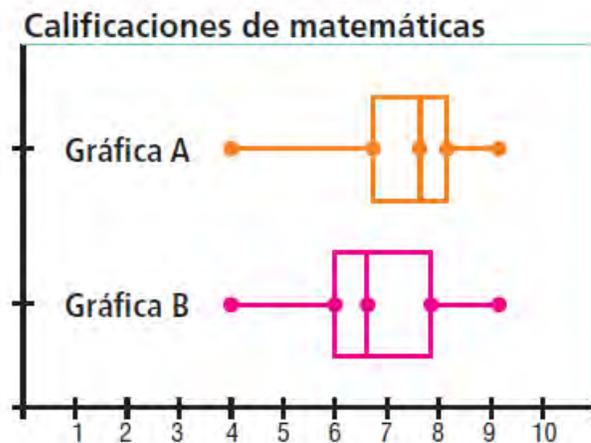
¿Cuántas horas al día de su tiempo libre dedican a la lectura, sin tomar en cuenta las que dedican a sus libros de texto?

Los siguientes datos corresponden a los resultados de esa pregunta:

Valor mínimo (extremo inferior)	25%	Mediana 50%	75%	Valor máximo (extremo superior)
0 horas al día	2 horas al día	4 horas al día	6 horas al día	8 horas al día

a) Construye la gráfica caja-brazos con los datos anteriores

4. Sabemos que el 75% de los alumnos de un grupo obtuvo una calificación menor a 8 en el examen de matemáticas. ¿Cuál de las siguientes opciones representa los resultados del grupo?



- a) Gráfica A
- b) Gráfica B
- c) Cualquiera de las dos gráficas
- d) Ninguna de las dos gráficas

**Medidas de localización del centro:**

- ❖ La media
- ❖ La mediana
- ❖ La moda

**Media** (media aritmética, promedio)

La media aritmética ( $\bar{x}$ ) de un conjunto de  $n$  medidas es simplemente su suma dividida entre  $n$

Si los pesos, con aproximación de kilogramos de cinco hombres son 72, 83, 94, 69, 80 kilogramos encuentre la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{72 + 83 + 94 + 69 + 80}{5} = \frac{398}{5} = 79.6$$

**Mediana** (me)

La mediana de una colección de datos ordenados en orden de magnitud es el valor medio o la media aritmética de los dos valores medios.



Sean los números 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 la mediana es 6

Sean los números 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18; su mediana es  $\frac{1}{2}(9 + 11) = 10$

**Moda** (mo)

La moda de una serie de números es aquel valor que se presenta con mayor frecuencia, es decir, es el valor más común. La moda puede no existir, incluso si existe puede no ser única.

El sistema 2, 2, 5, 7,  $\overbrace{9, 9, 9}$ , 10, 10, 11, 12, 18 tiene de moda 9

El sistema 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 no tiene moda

El sistema 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 tiene dos modas, 4 y 7 por lo que se llama bimodal; una distribución que tiene una sola moda se llama unimodal.

Hasta el momento se han repasado los valores centrales de la distribución, pero también es importante conocer si los valores en general están cerca o alejados de estos valores centrales, es por lo que surge la necesidad de estudiar medidas de **dispersión**.

## Rango

Es la primera medida que vamos a estudiar, se define como la diferencia existente entre el valor mayor y el menor de la distribución. Lo notaremos como **R**. Realmente no es una medida muy significativa en la mayoría de los casos, pero indudablemente es muy fácil de calcular.

## Desviación media o desviación promedio ( $D\bar{x}$ )

Es el promedio de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media de la muestra.

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 3 + 4 + 6 + 7}{6} = 4$$

La primera desviación es:  $|1 - 4| = 3$        $\therefore D\bar{x} = \frac{3+1+1+0+2+3}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$

## Varianza (V)

La varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones de la media

$$V = \frac{3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

## Desviación estándar ( $D_s$ )

La desviación estándar es quizá la medida más importante de dispersión usada en la teoría estadística y se define como la raíz cuadrada de la varianza

$$D_s = \sqrt{4} = 2$$

4. De acuerdo a la siguiente tabla obtén las medidas de tendencia central y de dispersión de uno de los cuatro municipios referidos en el periodo 2005. Construye la gráfica boxplot.

TEMPERATURA MEDIA MENSUAL (Grados centígrados)		CUADRO 1.6.2.1											
ESTACIÓN CONCEPTO	PERIODO	MES											
		E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
IRAPUATO	2005	16.5	18.3	19.3	23.7	23.7	24.0	22.8	21.2	20.7	20.8	18.6	17.2
PROMEDIO	De 1922 a 2005	16.1	17.7	19.9	22.2	23.7	23.2	21.9	21.7	21.2	20.0	18.2	16.5
AÑO MÁS FRÍO	1924	14.0	14.6	14.4	19.5	21.2	20.2	19.4	18.7	18.7	16.4	14.9	14.7
AÑO MÁS CALUROSO	1969	18.4	20.3	22.0	23.8	25.6	27.6	23.9	23.0	22.9	21.1	20.2	18.4
GUANAJUATO	2005	15.2	16.9	17.8	22.7	22.8	23.6	21.9	20.8	21.1	19.9	17.5	15.9
PROMEDIO	De 1921 a 2005	14.3	15.8	18.2	20.2	21.4	20.6	19.3	19.4	18.8	17.8	16.1	14.8
AÑO MÁS FRÍO	1956	12.7	16.1	18.5	20.2	19.2	18.3	18.0	18.1	17.3	17.6	15.3	14.7
AÑO MÁS CALUROSO	1988	17.0	18.8	17.1	22.1	24.5	21.9	20.9	20.3	19.4	20.3	17.1	18.5
CELAYA	2005	17.0	18.7	19.3	23.0	22.8	24.1	21.6	21.1	21.0	20.5	18.5	17.5
PROMEDIO	De 1921 a 2005	15.5	17.2	19.7	22.3	23.9	23.4	22.2	21.9	21.2	19.7	17.7	15.9
AÑO MÁS FRÍO	1968	13.7	13.1	15.0	19.5	21.5	20.7	19.7	19.8	19.4	17.7	15.5	14.2
AÑO MÁS CALUROSO	1930	16.8	17.9	23.3	25.0	28.3	26.8	26.2	26.1	25.7	22.4	17.9	16.5
VICTORIA	2004	11.3	12.0	13.8	14.4	18.0	17.2	17.2	18.0	17.0	16.7	14.7	11.7
PROMEDIO	De 1961 a 2004	12.0	13.3	16.0	18.6	19.8	18.8	17.6	17.5	17.0	15.4	13.5	11.8
AÑO MÁS FRÍO	1976	10.1	11.5	16.8	17.2	18.9	17.6	16.1	16.1	17.1	14.7	10.8	10.8
AÑO MÁS CALUROSO	1961	14.4	15.8	18.3	21.1	22.7	20.6	20.1	19.4	20.8	17.9	16.6	15.2

FUENTE: CNA. Registro Mensual de Temperatura Media en °C. Inédito.



**Autoevaluación del bloque 5.**

Subrayar el resultado

1. El área de un rectángulo es de  $33m^2$  y la base mide 8 m más que la altura. Calcular las dimensiones.

- a) Altura = 4m. Base = 14m      b) Altura = 2m. Base = 8m  
c) Altura = 3m. Base = 11m      d) Altura = 5m. Base = 13m

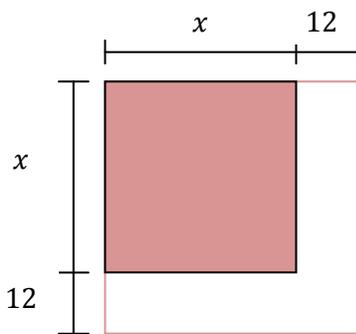
2. Hallar tres números enteros consecutivos, tales que la suma de los cuadrados de los dos menores sea igual al cuadrado del mayor, más doce unidades.

- a) 7, 8, 9      b) 5, 6, 7      c) 2, 3, 4      d) -3, -2, -1

3. El rendimiento de un automóvil es de 8 km por litro de gasolina en la ciudad y de 12 km por litro en autopista. Si recorrió en total 472 km y consumió 42 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros se recorrieron en la ciudad y cuántos en autopista?

- a) En la ciudad = 64 km. En la autopista = 408 km  
b) En la ciudad = 74 km. En la autopista = 418 km  
c) En la ciudad = 32 km. En la autopista = 223 km  
d) En la ciudad = 408 km. En la autopista = 64 km

4. El terreno cuadrado que se ilustra abajo tiene un área de  $4\,225\,m^2$ , se desea utilizar únicamente la parte que aparece coloreada en la figura. Si  $x$  es la medida del lado de ese cuadrado que se va a usar, ¿qué medida es  $x$ ?

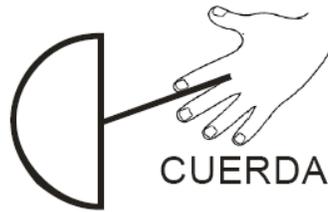


- a) 53 m      b) 77 m      c) 30 m      d) 65 m

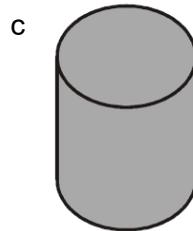
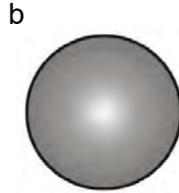
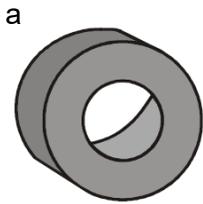
5. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo un objeto que es lanzado desde la Torre de Pisa (40m de altura) con una velocidad inicial de 10m por segundo?

- a) 4 s  
b) 3 s  
c) 5 s  
d) 2 s

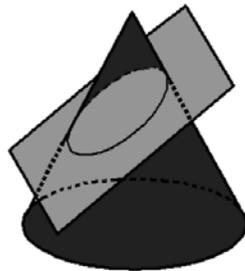
6. Carlos amarró con una cuerda un medio círculo como se muestra abajo.



Tomó el otro extremo de la cuerda, la trasladó alrededor de su cabeza rápidamente y notó que se formaba un cuerpo geométrico. ¿Cuál de las siguientes figuras representa el cuerpo geométrico que Carlos vio?



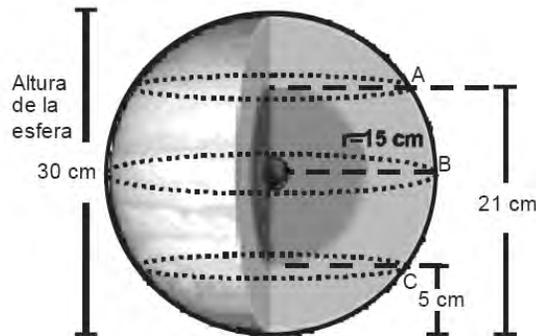
7. Tenemos sobre una mesa una gelatina en forma de cono recto a la cual se le realiza un corte con una cuchilla, tal como se muestra en el dibujo:



¿Cuál es la figura que se puede ver en el corte hecho por la cuchilla?

- a) Una parábola
- b) Una hipérbola
- c) Una elipse
- d) Un círculo

8. Observa el siguiente dibujo que representa un planeta de juguete al que se le hicieron algunos cortes a diferentes distancias:



Si se representa la variación de la longitud de los radios de los círculos obtenidos con respecto a las diferentes alturas en la esfera, entonces, ¿cuál de las siguientes tablas representará correctamente esta variación?

a

Altura de la esfera (cm)	5	15	21
Medida de los radios (cm)	2.50	7.50	10.50

b

Altura de la esfera (cm)	6	10	15
Medida de los radios (cm)	6	10	15

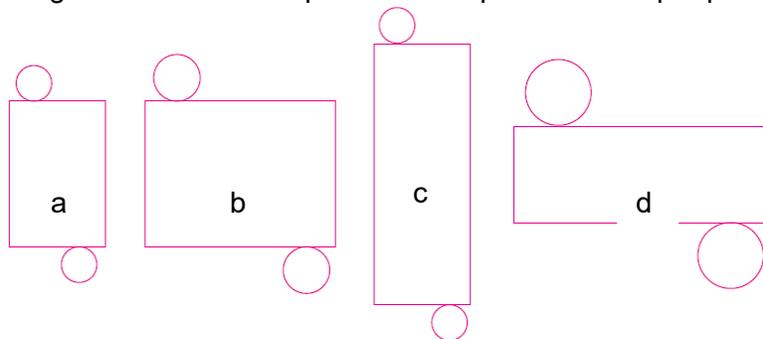
c

Altura de la esfera (cm)	5	15	21
Medida de los radios (cm)	11.18	15	13.74

d

Altura de la esfera (cm)	6	10	15
Medida de los radios (cm)	12	20	15

9. Un rectángulo que mide 2 cm de base y 3 cm de altura, se gira tomando como eje uno de sus lados mayores. ¿Cuál de los siguientes desarrollo planos corresponde al cuerpo que se genera?



10. Un vaso en forma de cilindro mide 6 cm de diámetro y 12 cm de altura. Al vaso le cabe...

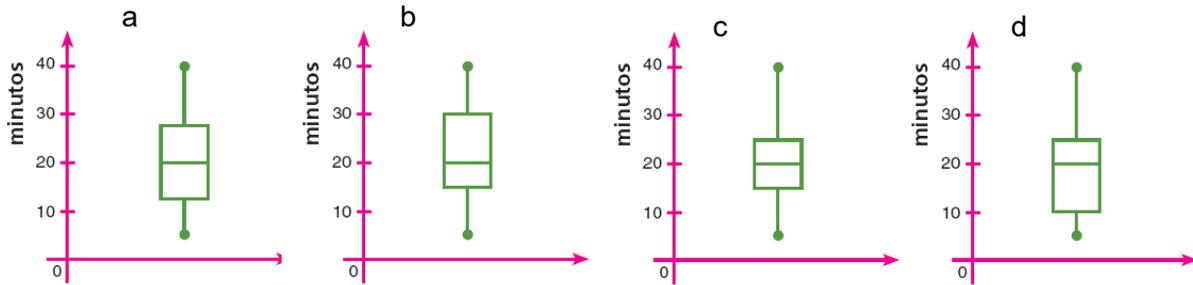
- a) menos de un cuarto de litro de leche  
c) exactamente un cuarto de litro de leche

- b) más de un cuarto de litro de leche  
d) más de medio litro de leche

11. A los 20 alumnos de un grupo se les preguntó acerca del tiempo que requieren para desplazarse de su casa a la escuela. Los tiempos en minutos fueron:

20, 20, 15, 5, 30, 15, 25, 10, 20, 5, 40, 35, 30, 30, 20, 10, 10, 25, 15, 25

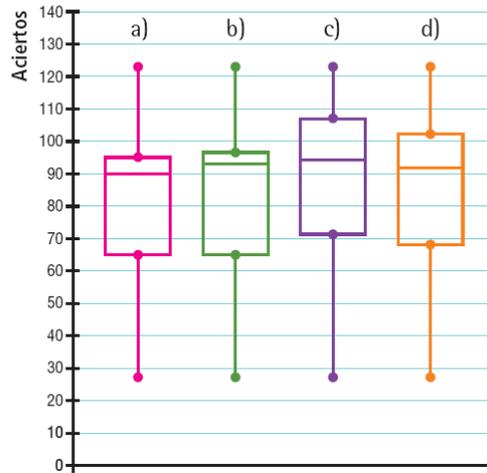
¿Cuál de las siguientes gráficas cajabrazos representa este conjunto de datos?



12. El número de aciertos que un grupo de alumnos obtuvo en la prueba de ingreso a preparatoria fue el siguiente:

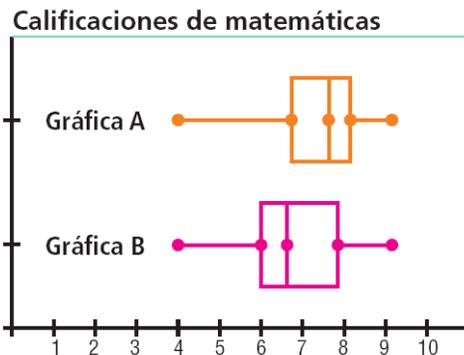
75, 97, 71, 65, 84, 27, 108, 91, 122, 82, 96, 58, 94, 43, 116, 123, 91, 120, 94, 43

¿Cuál de las siguientes gráficas caja-brazos (boxplot) representa este conjunto de datos?

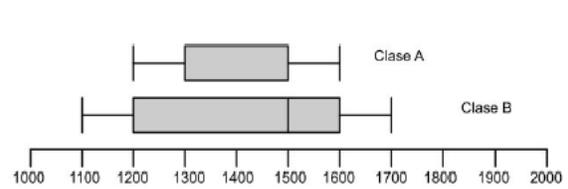
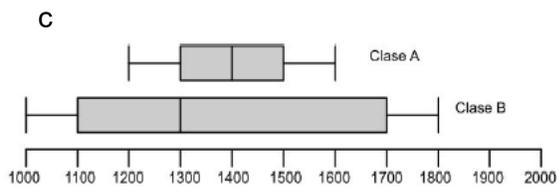
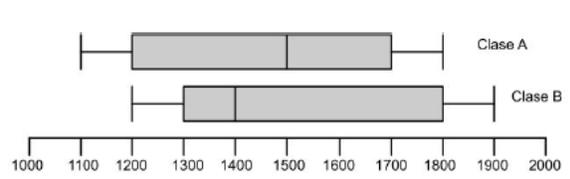
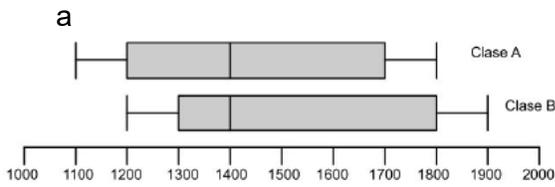


13. Sabemos que el 25% de los alumnos de un grupo obtuvo una calificación menor a 7 en el examen de matemáticas. ¿Cuál de las siguientes opciones representa los resultados del grupo?

- a) Gráfica A
- b) Gráfica B
- c) Cualquiera de las dos gráficas
- d) Ninguna de las dos gráficas



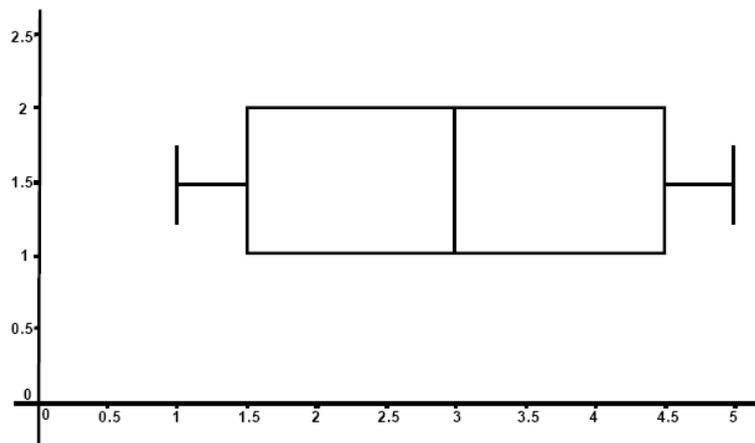
14. Una empresa divide a sus obreros en dos clases. Si tanto la clase A como la clase B tienen la misma mediana en sueldo. ¿En cuál de las siguientes gráficas se representa correctamente los sueldos de las 2 clases de obreros?



15. En una encuesta se preguntó cuántas veces al año salían de viaje y con los resultados se hizo la siguiente gráfica caja brazos:

¿Cuál fue el máximo de veces que alguien salió de viaje?

- a) 1
- b) 3
- c) 5
- d) 6



## Referencias

### Bibliográficas

Castillo Macías, Araceli et. al. Matemáticas III. Vol. I y II México, D.F. SEP. 2008.

Mancera Martínez, Eduardo. Matemáticas 3. México, D.F. Santillana. 2009. 415pp.

Escareño, Fortino y Olga Leticia López,. Matemáticas 3. México, D.F. Trillas. 2009. 256pp.

Santaló, Marcelo y Vicente Carbonell. Matemáticas cuarto curso. México, D.F. Porrúa 6<sup>te</sup> ed. 1978. 373pp.

Caballero C., Arquímedes et. al. Matemáticas tercer curso. México. Esfinge vigésima quinta ed. 1989. 237pp.

Cardenas Trigos, Humberto et. al. Matemáticas tercer curso educación media básica. México, D.F. CECSA. 1983. 310pp.

Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México, D.F. Trillas. 1965. 216pp.

Wenworth, Jorge y David Eugenio Smith. Geometría plana y del espacio. México, D.F. Porrúa 19<sup>a</sup> ed. 1995. 469pp.

Cuellar, Juan Antonio. Matemáticas II para bachillerato. México, D.F. McGraw-Hill Interamericana. 2005. 282pp.

National Council of Teachers of Mathematics. Recopilación, organización e interpretación de datos. Trad. de Federico Velasco Caba. México, D.F. Trillas. 1970. 58pp.

National Council of Teachers of Mathematics. Sugerencias para resolver problemas. Trad. de Federico Velasco Caba. México, D.F. Trillas. 1970. 83pp.

### Digitales

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Ecuacion](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion)

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Thales2.asp>

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/circulos.html>

<http://www.inee.edu.mx>

<http://www.descartes.cnice.mec.es>