

El Modelo del Umbral Industrial

Industrial Threshold Model (ITM)

Una extensión del modelo de Solow con ahorro endógeno y política industrial

H. Florencio González Alonzo

Abstract

This paper introduces the **Industrial Threshold Model (ITM)**, a theoretical extension of the Solow growth model designed to explain the long-run dynamics of highly specialized industrial regions following a major industrial shock. Unlike the traditional Solow framework, which assumes a constant savings rate and a unique steady state, the proposed model introduces an endogenous savings function represented by a logistic specification. This modification allows the economy to exhibit multiple steady states, including a low-development equilibrium, a high-development equilibrium, and an unstable critical threshold separating both trajectories.

The model shows that when a region's capital stock falls below a critical threshold, endogenous reductions in savings and investment may generate a self-reinforcing process of economic contraction, leading to an industrial poverty trap. To address this outcome, the model incorporates mission-oriented public investment inspired by the concept of the Entrepreneurial State. A sufficient condition is derived under which strategic public investment can shift the economy back above the critical threshold, allowing private capital accumulation to resume.

Although developed with the industrial decline of Monclova, Mexico, as its motivating case, the framework is intended to provide a general theoretical approach for analyzing regional deindustrialization and industrial policy. The Industrial Threshold Model should be understood as a first theoretical formulation that can be extended through empirical calibration, numerical simulation, and broader applications to other industrial regions.

Keywords: Economic Growth; Industrial Policy; Regional Development; Poverty Traps; Solow Model; Endogenous Savings.

Introducción

Las teorías tradicionales del crecimiento económico han explicado con gran éxito por qué algunas economías acumulan capital y aumentan su ingreso a lo largo del tiempo. Sin embargo, cuando se analizan ciudades altamente especializadas en una sola industria, dichos modelos presentan limitaciones importantes. El modelo de Solow, por ejemplo, supone que la tasa de ahorro permanece constante y que las economías convergen gradualmente hacia un único estado estacionario determinado por sus parámetros fundamentales. En la práctica, muchas regiones industriales muestran un comportamiento distinto.

La historia económica reciente ofrece numerosos ejemplos. Detroit, en Estados Unidos; la cuenca del Ruhr, en Alemania; Sheffield, en el Reino Unido; y Monclova, en México, experimentaron profundas transformaciones tras el deterioro de sus industrias tradicionales. Algunas lograron reconstruir su base productiva; otras permanecieron durante décadas atrapadas en procesos de estancamiento económico, pérdida de población, reducción de la inversión y disminución de la productividad. Estas trayectorias sugieren que, después de cierto punto, los mecanismos normales del mercado pueden dejar de ser suficientes para restaurar el crecimiento.

El propósito de este anexo es desarrollar una extensión del modelo de Solow capaz de representar formalmente ese fenómeno. La hipótesis central del **Modelo del Umbral Industrial** sostiene que existe un nivel crítico de

capital regional que divide dos dinámicas económicas completamente distintas. Mientras la economía permanezca por encima de dicho umbral, las fuerzas normales de acumulación permiten converger hacia un equilibrio de alto crecimiento. Sin embargo, cuando un choque suficientemente severo desplaza a la región por debajo de ese nivel crítico, comienzan a operar mecanismos acumulativos que reducen el ahorro, la inversión y la productividad, conduciendo a un equilibrio de bajo desarrollo.

La innovación principal del modelo consiste en abandonar el supuesto de una tasa de ahorro constante. En una ciudad industrial, el ahorro agregado depende estrechamente del nivel de actividad económica. Cuando desaparecen empleos, proveedores y cadenas productivas, los hogares consumen sus reservas, las empresas cancelan inversiones y el crédito se vuelve más escaso. En consecuencia, la capacidad de acumulación de capital disminuye precisamente cuando más se necesita.

Esta modificación permite obtener un resultado cualitativamente distinto al modelo clásico de Solow: la existencia de múltiples estados estacionarios. En lugar de converger necesariamente hacia un único equilibrio, la economía puede presentar un equilibrio de bajo crecimiento, un equilibrio de alto crecimiento y un umbral inestable que separa ambas trayectorias.

Desde esta perspectiva, la caída de una industria ancla no constituye únicamente una reducción temporal de la producción. Puede representar un cambio permanente en la dinámica del sistema económico regional. Una vez que la economía cruza el umbral crítico, las propias fuerzas del mercado pueden reforzar el proceso de contracción mediante una disminución simultánea del ahorro, la inversión privada, la productividad y la confianza empresarial.

Finalmente, el modelo incorpora el concepto de **Estado Innovador**, desarrollado por Mariana Mazzucato. Si la economía ha quedado atrapada por debajo del umbral crítico, la recuperación espontánea puede resultar improbable. En esas circunstancias, una política industrial suficientemente intensa puede desplazar nuevamente el sistema por encima del umbral, permitiendo que las fuerzas normales de acumulación privada vuelvan a operar.

El objetivo de este modelo no es describir toda la complejidad histórica de Monclova mediante un conjunto de ecuaciones. Ningún modelo económico puede hacerlo. Su finalidad es más modesta y, al mismo tiempo, más útil: demostrar que bajo ciertos supuestos razonables una ciudad industrial puede quedar atrapada en una trayectoria de bajo crecimiento y que existe un fundamento teórico para justificar intervenciones de política industrial orientadas a romper dicha trampa.

En los apartados siguientes se desarrollará formalmente el modelo, comenzando por sus supuestos fundamentales, la derivación de la ecuación dinámica, el análisis de los estados estacionarios y, finalmente, la incorporación de la política industrial como mecanismo para superar el umbral crítico de desarrollo.

Supuestos del Modelo

El **Modelo del Umbral Industrial** parte del modelo neoclásico de crecimiento de Solow, pero modifica uno de sus supuestos fundamentales: la tasa de ahorro deja de ser constante y pasa a depender del nivel de capital de la economía regional. Esta modificación busca representar el comportamiento observado en ciudades industriales altamente especializadas, donde la pérdida de la industria dominante afecta simultáneamente la inversión, el empleo, el crédito y las expectativas de crecimiento.

Función de producción

Se supone que la economía produce mediante una función de producción Cobb-Douglas en términos per cápita:

$$y = Ak^\alpha$$

donde:

- y representa el producto por trabajador;
- k representa el capital por trabajador;
- A corresponde a la productividad total de los factores;
- α es la elasticidad del producto respecto al capital, cumpliéndose que

$$0 < \alpha < 1.$$

El supuesto $\alpha < 1$ implica la existencia de **rendimientos marginales decrecientes del capital**, uno de los pilares del modelo de Solow. En otras palabras, conforme aumenta el capital disponible por trabajador, cada unidad adicional de capital genera incrementos cada vez menores en la producción.

En el contexto de una región industrial, la productividad total de los factores no representa únicamente el nivel tecnológico. También incorpora elementos como la calidad de la infraestructura, la logística, la disponibilidad de proveedores, el conocimiento técnico acumulado, la capacidad administrativa, las instituciones y la organización productiva de la región. Por ello, el deterioro de una industria ancla puede reducir simultáneamente el capital físico y la productividad agregada.

Crecimiento poblacional y depreciación

Se supone que la población trabajadora crece a una tasa constante n , mientras que el capital físico se deprecia a una tasa constante δ .

En consecuencia, la economía necesita invertir continuamente para compensar dos procesos naturales:

- la depreciación del capital existente;
- el crecimiento de la fuerza laboral.

La inversión mínima necesaria para mantener constante el capital por trabajador está dada por

$$(n + \delta)k.$$

Si la inversión efectiva supera dicho valor, el capital por trabajador aumenta. Si es inferior, el capital comienza a disminuir.

Ahorro endógeno

La diferencia fundamental entre este modelo y el modelo clásico de Solow consiste en abandonar el supuesto de una tasa de ahorro constante.

En una ciudad industrial altamente especializada, el ahorro agregado depende estrechamente del desempeño económico de la región. Cuando aumenta el desempleo, desaparecen proveedores, se reduce el crédito y cae la confianza empresarial, tanto los hogares como las empresas disminuyen su capacidad de ahorro e inversión.

Para representar este comportamiento se supone que la tasa de ahorro depende positivamente del capital regional mediante una función logística:

$$s(k) = \frac{s_H}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}}.$$

En esta expresión:

- s_H representa la tasa máxima de ahorro alcanzable por la economía;
- $\bar{k}$ representa el nivel crítico de capital o masa mínima de infraestructura necesaria para sostener una economía industrial moderna;
- $\beta > 0$ mide la sensibilidad del ahorro frente a variaciones del capital.

Esta función posee varias propiedades importantes.

Cuando el capital regional es muy reducido,

$$k \rightarrow 0,$$

la tasa de ahorro converge hacia un valor muy pequeño,

$$s(0) = \frac{s_H}{1 + e^{\beta\bar{k}}} \approx 0,$$

siempre que el producto $\beta\bar{k}$ sea suficientemente grande.

Por el contrario, cuando el capital aumenta considerablemente,

$$k \rightarrow \infty,$$

la tasa de ahorro converge a su valor máximo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = s_H.$$

En términos económicos, esto significa que las regiones prósperas poseen una mayor capacidad para generar ahorro e inversión, mientras que las regiones que han perdido gran parte de su base productiva enfrentan dificultades crecientes para financiar su propia recuperación.

Hipótesis central

La hipótesis fundamental del Modelo del Umbral Industrial puede resumirse de la siguiente manera:

La capacidad de una región para ahorrar e invertir depende del nivel de capital que ya posee. Cuando el capital cae por debajo de un umbral crítico, la propia dinámica económica reduce el ahorro, disminuye la inversión y dificulta la recuperación espontánea del crecimiento.

Esta hipótesis constituye el principal alejamiento respecto al modelo clásico de Solow y será la base para demostrar, en la siguiente sección, la existencia de múltiples estados estacionarios y la posibilidad de una **trampa de pobreza industrial**.

Derivación de la ecuación diferencial

El punto de partida es la ecuación fundamental de acumulación de capital del modelo de Solow. En términos per cápita, el capital por trabajador cambia de acuerdo con la diferencia entre la inversión efectiva y la inversión necesaria para mantener constante el capital por trabajador.

La forma general es:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

En esta expresión, $\dot{k}$ representa el cambio del capital por trabajador a través del tiempo. El término $sf(k)$ representa la inversión efectiva por trabajador, mientras que $(n + \delta)k$ representa la inversión necesaria para compensar el crecimiento de la fuerza laboral y la depreciación del capital.

En el modelo clásico de Solow, la tasa de ahorro es constante. En el Modelo del Umbral Industrial, en cambio, el ahorro depende del nivel de capital regional. Por ello sustituimos s por $s(k)$:

$$\dot{k} = s(k)f(k) - (n + \delta)k$$

Como la función de producción es Cobb-Douglas, tenemos:

$$f(k) = Ak^\alpha$$

Sustituyendo esta función de producción en la ecuación de acumulación:

$$\dot{k} = s(k)Ak^\alpha - (n + \delta)k$$

Ahora sustituimos la función logística de ahorro:

$$s(k) = \frac{s_H}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}}$$

Al sustituirla, obtenemos la ecuación diferencial fundamental del Modelo del Umbral Industrial:

$$\dot{k} = \frac{s_H Ak^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} - (n + \delta)k$$

Esta es la ecuación central del modelo.

El primer término,

$$\frac{s_H Ak^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}},$$

representa la inversión efectiva por trabajador. Depende de cuatro elementos: la tasa máxima de ahorro s_H , la productividad regional A , el capital existente k , y la posición de la economía respecto al umbral $\tilde{k}$. Si la región posee suficiente capital, el ahorro aumenta y la inversión efectiva se fortalece. Si la región cae por debajo del umbral, el ahorro se debilita y la inversión cae.

El segundo término,

$$(n + \delta)k,$$

representa la inversión necesaria para mantener constante el capital por trabajador. Incluye dos fuerzas: el crecimiento de la población trabajadora, n , y la depreciación del capital físico, δ . Aunque la economía no creciera, tendría que invertir continuamente sólo para evitar que el capital por trabajador disminuya.

Por tanto, la dinámica del sistema puede resumirse así:

$$\dot{k} > 0$$

cuando la inversión efectiva es mayor que la inversión necesaria. En ese caso, la economía acumula capital.

$$\dot{k} < 0$$

cuando la inversión efectiva es menor que la inversión necesaria. En ese caso, la economía pierde capital por trabajador y entra en contracción.

$$\dot{k} = 0$$

cuando ambas fuerzas se equilibran. En ese caso, la economía se encuentra en un estado estacionario.

La diferencia central frente al modelo tradicional de Solow es que aquí la inversión efectiva no crece de manera suave y proporcional con el ahorro constante. Al depender el ahorro del nivel de capital, la economía puede comportarse de forma no lineal. Esto permite que existan regiones donde pequeños cambios en el capital generen grandes cambios en el ahorro y, por tanto, en la trayectoria futura de crecimiento.

En términos económicos, la ecuación muestra que una ciudad industrial no sólo necesita producir. Necesita conservar suficiente capital, infraestructura, confianza y capacidad de ahorro para que la inversión privada siga funcionando. Cuando la caída de la industria ancla destruye esa masa crítica, la economía puede cruzar un umbral a partir del cual la acumulación deja de sostenerse por sí sola.

Existencia de múltiples estados estacionarios

Un estado estacionario ocurre cuando el capital por trabajador deja de cambiar en el tiempo. Es decir, cuando:

$$\dot{k} = 0$$

Partimos de la ecuación fundamental del modelo:

$$\dot{k} = \frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} - (n + \delta)k$$

Para encontrar los estados estacionarios, igualamos a cero:

$$\frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} - (n + \delta)k = 0$$

Por tanto:

$$\frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} = (n + \delta)k$$

Dividiendo ambos lados entre k , con $k > 0$, obtenemos:

$$\frac{s_H A k^{\alpha-1}}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} = n + \delta$$

Definimos entonces la función:

$$\Omega(k) = \frac{s_H A k^{\alpha-1}}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}}$$

La condición de estado estacionario puede escribirse de manera más simple como:

$$\Omega(k) = n + \delta$$

Esta expresión es clave. El lado izquierdo, $\Omega(k)$, representa la inversión efectiva por unidad de capital. El lado derecho, $n + \delta$, representa la inversión requerida para mantener constante el capital por trabajador.

En el modelo clásico de Solow, con ahorro constante, la función equivalente a $\Omega(k)$ es estrictamente decreciente. Por eso sólo existe un estado estacionario positivo. En el Modelo del Umbral Industrial, en cambio, la tasa de ahorro aumenta con el capital. Esto introduce una no linealidad: la inversión efectiva por unidad de capital puede caer, luego aumentar, y finalmente volver a caer.

Para analizar la forma de $\Omega(k)$, observamos primero sus límites.

Cuando k se aproxima a cero:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Omega(k) = +\infty$$

Esto ocurre porque $0 < \alpha < 1$, por lo que:

$$\alpha - 1 < 0$$

y, en consecuencia:

$$k^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$$

aunque la tasa de ahorro sea muy baja.

Cuando k tiende a infinito:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega(k) = 0$$

Esto ocurre porque la tasa de ahorro converge a s_H , mientras que:

$$k^{\alpha-1} \rightarrow 0$$

por los rendimientos decrecientes del capital.

Sin embargo, la existencia de estos dos límites no basta para demostrar que existen exactamente tres estados estacionarios. El Teorema del Valor Intermedio sólo permite demostrar que existe al menos una intersección entre dos puntos donde la función cruza una línea horizontal. No permite afirmar, por sí solo, que existan exactamente tres intersecciones.

Por ello, la afirmación correcta es más precisa:

Proposición. Existe un conjunto no vacío de parámetros $(s_H, A, \alpha, \beta, \bar{k}, n, \delta)$ para el cual la ecuación

$$\Omega(k) = n + \delta$$

tiene tres soluciones positivas:

$$k_1 < k_u < k_2$$

Para que esto ocurra, la función $\Omega(k)$ debe tener una forma suficientemente no monótona. Esto sucede cuando el efecto positivo del aumento del ahorro alrededor del umbral $\bar{k}$ es suficientemente fuerte para compensar temporalmente los rendimientos decrecientes del capital.

La intuición matemática es la siguiente.

La función $\Omega(k)$ combina dos fuerzas opuestas. La primera es:

$$k^{\alpha-1}$$

que es decreciente porque $\alpha - 1 < 0$. Esta fuerza empuja a $\Omega(k)$ hacia abajo conforme aumenta k .

La segunda fuerza es:

$$s(k) = \frac{s_H}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}}$$

que es creciente en k . Esta fuerza empuja a $\Omega(k)$ hacia arriba cuando la economía se aproxima al umbral de capital.

Si el ahorro reaccionara débilmente al capital, $\Omega(k)$ sería esencialmente decreciente y existiría un solo equilibrio, como en Solow. Pero si el ahorro reacciona con suficiente fuerza alrededor de $\bar{k}$, entonces $\Omega(k)$ puede presentar un mínimo local y un máximo local. En ese caso, una línea horizontal $n + \delta$ puede cortar la función tres veces.

Formalmente, los puntos críticos de $\Omega(k)$ se obtienen de:

$$\Omega'(k) = 0$$

Como:

$$\Omega(k) = As(k)k^{\alpha-1}$$

su derivada es:

$$\Omega'(k) = A[s'(k)k^{\alpha-1} + (\alpha - 1)s(k)k^{\alpha-2}]$$

Factorizando:

$$\Omega'(k) = Ak^{\alpha-2}[ks'(k) - (1 - \alpha)s(k)]$$

Por tanto, el signo de $\Omega'(k)$ depende de:

$$ks'(k) - (1 - \alpha)s(k)$$

La función aumenta cuando:

$$ks'(k) > (1 - \alpha)s(k)$$

y disminuye cuando:

$$ks'(k) < (1 - \alpha)s(k)$$

Esta condición muestra con claridad el mecanismo del modelo. La función $\Omega(k)$ sólo puede crecer si el ahorro aumenta suficientemente rápido respecto al capital. Es decir, si la recuperación del ahorro alrededor del umbral industrial es más fuerte que la pérdida generada por los rendimientos decrecientes.

Bajo parámetros apropiados, existen dos puntos críticos:

$$k_a < k_b$$

tales que:

$$\begin{aligned}\Omega'(k_a) &= 0 \\ \Omega'(k_b) &= 0\end{aligned}$$

El primero corresponde a un mínimo local y el segundo a un máximo local. Si además se cumple que:

$$\Omega(k_a) < n + \delta < \Omega(k_b)$$

entonces, por continuidad de $\Omega(k)$, la recta horizontal $n + \delta$ intersecta a $\Omega(k)$ en tres puntos positivos.

Esos tres puntos son:

$$k_1 < k_u < k_2$$

donde k_1 representa el equilibrio bajo, k_u el umbral crítico, y k_2 el equilibrio alto.

La interpretación económica es directa.

El primer equilibrio, k_1 , representa una economía atrapada en bajo capital, bajo ahorro, baja inversión y baja productividad. Es una trampa de pobreza industrial.

El segundo equilibrio, k_u , representa el umbral crítico. No es un destino estable, sino una frontera. Si la economía queda ligeramente por debajo de él, tiende a caer hacia k_1 . Si queda ligeramente por encima, tiende a avanzar hacia k_2 .

El tercer equilibrio, k_2 , representa una economía industrial con suficiente capital, infraestructura, ahorro, crédito, proveedores y confianza para sostener una trayectoria de desarrollo.

Por tanto, el resultado fundamental de esta sección es que el Modelo del Umbral Industrial permite formalizar la existencia de dos trayectorias posibles para una misma región. Una ciudad puede converger hacia un equilibrio próspero o caer hacia una trampa de pobreza, dependiendo de si su capital efectivo permanece por encima o por debajo del umbral crítico:

$$k_u$$

En términos sencillos: el problema no es sólo cuánto capital tiene una ciudad, sino si ese capital alcanza para sostener la maquinaria económica que permite seguir acumulando.

Estabilidad local

Una vez identificados los tres posibles estados estacionarios,

$$k_1 < k_u < k_2$$

el siguiente paso consiste en analizar su estabilidad. Es decir, necesitamos saber qué ocurre si la economía se mueve ligeramente alrededor de cada punto.

Un equilibrio es **estable** si, después de una pequeña desviación, la economía tiende a regresar a él. Un equilibrio es **inestable** si una pequeña desviación aleja a la economía de ese punto.

Partimos de la ecuación dinámica del modelo:

$$\dot{k} = G(k)$$

donde:

$$G(k) = \frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-k^*)}} - (n + \delta)k$$

Equivalentemente:

$$G(k) = s(k) A k^\alpha - (n + \delta)k$$

Los estados estacionarios cumplen:

$$G(k^*) = 0$$

donde k^* puede ser cualquiera de los tres equilibrios:

$$k^* \in \{k_1, k_u, k_2\}$$

Para estudiar la estabilidad local, linealizamos el sistema alrededor de cada estado estacionario. La linealización de una ecuación diferencial unidimensional se obtiene mediante la derivada de $G(k)$ evaluada en el equilibrio:

$$G'(k^*)$$

Si:

$$G'(k^*) < 0$$

el equilibrio es localmente estable.

Si:

$$G'(k^*) > 0$$

el equilibrio es localmente inestable.

La razón es sencilla. Si la pendiente es negativa, cuando k queda un poco por encima del equilibrio, $G(k) < 0$, por lo que el capital disminuye y regresa al equilibrio. Si k queda un poco por debajo, $G(k) > 0$, por lo que el capital aumenta y también regresa al equilibrio. En cambio, si la pendiente es positiva, cualquier pequeña desviación se amplifica.

Ahora derivamos $G(k)$. Recordemos que:

$$G(k) = s(k)Ak^\alpha - (n + \delta)k$$

Derivando respecto a k :

$$G'(k) = s'(k)Ak^\alpha + \alpha s(k)Ak^{\alpha-1} - (n + \delta)$$

En cualquier estado estacionario k^* , se cumple:

$$s(k^*)A(k^*)^\alpha = (n + \delta)k^*$$

Dividiendo entre k^* :

$$s(k^*)A(k^*)^{\alpha-1} = n + \delta$$

Sustituimos esta condición en la derivada:

$$G'(k^*) = s'(k^*)A(k^*)^\alpha + \alpha(n + \delta) - (n + \delta)$$

Por tanto:

$$G'(k^*) = s'(k^*)A(k^*)^\alpha - (1 - \alpha)(n + \delta)$$

Esta expresión resume la estabilidad del sistema.

El primer término,

$$s'(k^*)A(k^*)^\alpha$$

representa el efecto positivo del ahorro marginal. Si un aumento pequeño del capital provoca un aumento fuerte del ahorro, la economía puede alejarse del equilibrio.

El segundo término,

$$(1 - \alpha)(n + \delta)$$

representa el efecto estabilizador de los rendimientos decrecientes, la depreciación y el crecimiento poblacional.

Por tanto, la estabilidad depende de cuál fuerza domina.

El equilibrio pobre: k_1

En el equilibrio bajo, la economía se encuentra en una zona de poco capital, bajo ahorro y baja inversión. La tasa de ahorro es reducida y cambia lentamente. Por ello:

$$s'(k_1) \approx 0$$

Sustituyendo en la condición de estabilidad:

$$G'(k_1) = s'(k_1)A(k_1)^\alpha - (1 - \alpha)(n + \delta)$$

Como $s'(k_1) \approx 0$, tenemos:

$$G'(k_1) \approx -(1 - \alpha)(n + \delta)$$

Dado que:

$$0 < \alpha < 1$$

y:

$$n + \delta > 0$$

entonces:

$$G'(k_1) < 0$$

Por tanto, el equilibrio pobre es localmente estable.

La interpretación económica es importante: una región puede permanecer atrapada en bajo capital no porque sus habitantes no trabajen, sino porque el sistema económico ya no genera suficiente ahorro e inversión para escapar. Pequeñas mejoras no bastan para cambiar la trayectoria. La economía tiende a regresar al equilibrio bajo.

El umbral crítico: k_u

El punto intermedio k_u representa el umbral industrial. En esta zona, la economía se encuentra cerca del tramo donde el ahorro responde con mayor fuerza al capital. Es decir, un aumento pequeño en k puede elevar significativamente la capacidad de ahorro e inversión.

En este punto:

$$s'(k_u) > 0$$

Si el efecto del ahorro marginal es suficientemente fuerte, se cumple:

$$s'(k_u)A(k_u)^\alpha > (1 - \alpha)(n + \delta)$$

Entonces:

$$G'(k_u) > 0$$

Por tanto, k_u es un equilibrio localmente inestable.

Esto significa que k_u no es un destino, sino una frontera. Si la economía queda ligeramente por encima de k_u , la acumulación de capital se refuerza y la región avanza hacia el equilibrio alto. Si queda ligeramente por debajo de k_u , la inversión efectiva no alcanza para compensar la depreciación y el crecimiento poblacional, por lo que la economía cae hacia el equilibrio bajo.

En términos del caso de Monclova, la caída de la industria ancla puede interpretarse como un choque que desplaza el capital efectivo desde una zona cercana al equilibrio alto hacia un nivel inferior al umbral crítico:

$$k_0 < k_u$$

Cuando eso ocurre:

$$G(k_0) < 0$$

y por tanto:

$$\dot{k} < 0$$

La economía comienza a perder capital por trabajador. Esa pérdida reduce el ahorro, disminuye la inversión, deteriora proveedores, contrae el crédito y debilita la productividad. La contracción inicial se transforma entonces en una dinámica acumulativa.

El equilibrio alto: k_2

En el equilibrio alto, la economía posee suficiente capital, infraestructura, empleo, proveedores, crédito y confianza. La tasa de ahorro ya se encuentra cerca de su nivel máximo:

$$s(k_2) \approx s_H$$

Además, como la función logística se aplanan en niveles altos de capital:

$$s'(k_2) \approx 0$$

Sustituyendo en la condición de estabilidad:

$$G'(k_2) = s'(k_2)A(k_2)^\alpha - (1 - \alpha)(n + \delta)$$

Como $s'(k_2) \approx 0$, se obtiene:

$$G'(k_2) \approx -(1 - \alpha)(n + \delta)$$

Por tanto:

$$G'(k_2) < 0$$

El equilibrio alto es localmente estable.

La interpretación económica es que una región industrial próspera puede absorber perturbaciones pequeñas sin colapsar. Mientras conserve suficiente capital, ahorro, productividad e infraestructura, los mecanismos normales de acumulación privada tienden a restaurar la trayectoria de crecimiento.

Resultado de estabilidad

El análisis anterior muestra que el Modelo del Umbral Industrial puede generar dos equilibrios estables separados por un equilibrio inestable:

$$\begin{array}{l} k_1 \text{ estable} \\ k_u \text{ inestable} \\ k_2 \text{ estable} \end{array}$$

La economía tiene, por tanto, dos posibles destinos de largo plazo. Si se encuentra por encima del umbral crítico, converge hacia el equilibrio alto. Si cae por debajo de él, converge hacia la trampa de pobreza industrial.

El resultado central puede resumirse así:

$$\begin{array}{l} k < k_u \Rightarrow k \rightarrow k_1 \\ k > k_u \Rightarrow k \rightarrow k_2 \end{array}$$

En términos sencillos, el umbral industrial separa dos mundos. Por encima de él, la economía todavía tiene suficiente fuerza interna para reconstruirse. Por debajo de él, la contracción se alimenta a sí misma.

Política Industrial y el Estado Innovador

Hasta este punto, el Modelo del Umbral Industrial describe el comportamiento de una economía cuando actúan exclusivamente las fuerzas del mercado. Bajo ciertas condiciones, el sistema converge espontáneamente hacia el equilibrio alto k_2 ; bajo otras, converge hacia la trampa de pobreza k_1 . El resultado depende únicamente de la posición inicial de la economía respecto al umbral crítico k_u .

Sin embargo, esta conclusión plantea una pregunta fundamental: ¿es posible romper una trampa de pobreza industrial una vez que la economía ha caído por debajo del umbral crítico?

La respuesta propuesta por este modelo es afirmativa, pero requiere abandonar el supuesto de que toda la inversión proviene exclusivamente del sector privado.

Siguiendo el concepto del **Estado Innovador** desarrollado por Mariana Mazzucato, se supone que el Estado puede realizar inversiones estratégicas orientadas a reconstruir la capacidad productiva de la región. Estas inversiones no deben entenderse como subsidios permanentes al consumo, sino como proyectos capaces de incrementar el capital productivo de largo plazo: infraestructura logística, parques industriales, energía, puertos secos, universidades tecnológicas, investigación aplicada, financiamiento productivo y proyectos industriales estratégicos.

Para incorporar esta idea al modelo, introducimos un término adicional de inversión pública, denotado por I_G . La ecuación dinámica pasa a ser:

$$\dot{k} = \frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} + I_G - (n + \delta)k$$

La nueva variable I_G representa la inversión pública estratégica por trabajador. Mientras que el primer término corresponde a la inversión privada generada por el ahorro interno de la economía, I_G constituye una fuente exógena de acumulación de capital capaz de modificar temporalmente la trayectoria del sistema.

En equilibrio, la condición dinámica se convierte en:

$$\frac{s_H A k^\alpha}{1 + e^{-\beta(k-\bar{k})}} + I_G = (n + \delta)k$$

Obsérvese que la inversión pública desplaza hacia arriba la función de inversión efectiva. Como consecuencia, el sistema puede abandonar el equilibrio de bajo crecimiento y cruzar nuevamente el umbral industrial.

Supongamos que la economía se encuentra inicialmente atrapada en el equilibrio pobre k_1 . Después de una intervención pública, el nuevo nivel de capital será:

$$k_{nuevo} = k_1 + k_G$$

donde k_G representa el incremento permanente del capital regional generado por la política industrial.

La condición necesaria para abandonar la trampa consiste en que la nueva dotación de capital supere el umbral crítico:

$$k_{nuevo} > k_u$$

Sustituyendo la expresión anterior:

$$k_1 + k_G > k_u$$

Despejando k_G , obtenemos la condición fundamental del Modelo del Umbral Industrial:

$$k_G > k_u - k_1$$

Esta desigualdad constituye el resultado principal del modelo.

Su interpretación económica es inmediata. No toda política industrial logra romper una trampa de pobreza. Existe un nivel mínimo de inversión estratégica capaz de desplazar la economía por encima del umbral crítico. Si la inversión pública es inferior a ese valor, la economía permanece dentro de la cuenca de atracción del equilibrio pobre y, una vez concluida la intervención, vuelve a converger hacia k_1 .

En cambio, cuando la inversión supera dicho umbral, la economía entra en una región donde las propias fuerzas del mercado vuelven a operar en sentido positivo. El aumento del capital incrementa el ahorro privado; el mayor ahorro financia nueva inversión; la inversión eleva la productividad; y el crecimiento comienza a sostenerse sin necesidad de una intervención permanente del Estado.

Desde esta perspectiva, el papel del Estado no consiste en sustituir al mercado, sino en restaurar las condiciones necesarias para que el mercado vuelva a funcionar. La intervención pública actúa como un mecanismo de coordinación capaz de reconstruir la masa crítica de capital requerida para reactivar la acumulación privada.