

EXERCÍCIOS PROPOSTO PROGRESSÃO GEOMÉTRICA(P.G.)

2 . DEFINIÇÃO

Sejam as seqüências:

a) (4, 8, 16, 32, 64)

Nesta seqüência, observamos que:

$$\begin{array}{l} 8 = 4 \cdot 2 \\ 16 = 8 \cdot 2 \\ 32 = 16 \cdot 2 \\ 64 = 32 \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \text{Número fixo} \\ \text{(razão = 2)}$$

b) (6, -18, 54, - 162)

$$\begin{array}{l} -18 = 6 \cdot (-3) \\ 54 = -18 \cdot (-3) \\ -162 = 54 \cdot (-3) \end{array} \Rightarrow \text{Número fixo} \\ \text{(razão = -3)}$$

Em todas essas seqüências , a lei de formação é: cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por um número fixo.

Toda seqüência que tiver essa lei de formação, será denominada **PROGRESSÃO GEOMÉTRICA**.

O número fixo pelo qual estamos multiplicando cada termo é chamado **RAZÃO** da progressão geométrica, que representaremos pela letra **q**.

3 . TERMOS DE UMA P.G.

De maneira semelhante aos termos de uma P.A . vista no capítulo anterior, vamos representar os termos de uma P.G, genericamente assim:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) \text{ (mesma notação da P.A.)}$$

Assim na P. G (3, 9, 27, 81, 243, 729)

$$\begin{array}{cccccc} a_1 = 3 & a_2 = 9 & a_3 = 27 & a_4 = 81 & a_5 = 243 & a_6 = 729 \\ 1^{\text{º}} \text{ termo} & 2^{\text{º}} \text{ termo} & 3^{\text{º}} \text{ termo} & 4^{\text{º}} \text{ termo} & 5^{\text{º}} \text{ termo} & 6^{\text{º}} \text{ termo} \end{array}$$

4 . RAZÃO DA P. G.

Considere a seqüência (2, 4, 8, 16, 32) . Observe que, a partir do segundo termo, o quociente entre cada termo e o seu antecessor é constante. Veja:

$$\frac{\underbrace{4}_{\underbrace{2}}}{2} = \frac{\underbrace{8}_{\underbrace{4}}}{4} = \frac{\underbrace{16}_{\underbrace{8}}}{8} = \frac{\underbrace{32}_{\underbrace{16}}}{16}$$

O quociente obtido em cada divisão é sempre 2 que representaremos por **q = 2**

De maneira genérica, podemos encontrar a razão da P.G. desta forma:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots \quad \text{Onde } q \text{ é a razão da P.G}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Complete a P.G abaixo e informe qual é o termo que ocupa a 9ª posição.

(2, 8, 32, _____ , 512, 2048, _____ , 32768, _____)

❖ Vamos inicialmente encontrar a razão (q) da P.G.

$$\frac{8}{2} \text{ ou } \frac{32}{8} = 4 \quad \text{Portanto a razão } q = 4$$

❖ Agora podemos completar a P.G, onde estão faltando o quarto termo (a_4), o sétimo termo (a_7), e o nono termo (a_9).

$$a_4 = a_3 \cdot q = 32 \cdot 4 = 128$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = 2.048 \cdot 4 = 8192$$

$$a_9 = a_8 \cdot q = 32.768 \cdot 4 = 131072$$

Escrevendo a P.G. completa temos:

(2, 8, 32, 128, 512, 2048, 8192, 32768, 131072) e o termo que ocupa a 9ª posição é : $a_9 = 131072$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1) Complete cada P.G, e informe qual é o termo que ocupa a 6ª posição:

a) (4,12,36, _____, _____, _____)

b) (7,14, _____, 56, _____, _____)

c) (-6, -30, _____, - 750, _____, _____)

d) (8, -16, 32, _____, 128, _____)

5 . FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P. G.

Onde:

a_1 \Rightarrow Primeiro termo

q \Rightarrow Razão da P.G

n \Rightarrow Número de termos

a_n \Rightarrow Termo Geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Assim, conhecendo-se o primeiro termo de uma P.G. (a_1) e sua razão q , podemos determinar qualquer um dos termos da P.G. usando a fórmula:

EXEMPLOS:

a) Encontrar o oitavo termo (a_8) de uma P.G., sabendo-se que $a_1 = 3$ e $q = 2$.

❖ De maneira mais prática, podemos encontrar o 8º termo, utilizando a fórmula:

$$a_1 = 3$$

$$q = 2$$

$$n = 8 \quad (\text{Vamos calcular o } 8^\circ \text{ termo, por este motivo } n = 8)$$

$$a_8 = ? \quad (\text{o termo que queremos calcular})$$

Substituindo na fórmula, temos :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_8 = 3 \cdot 2^{8-1}$$

$$a_8 = 3 \cdot 2^7 \quad (\text{lembre-se que } 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128)$$

$$a_8 = 3 \cdot 128$$

$$a_8 = 384 \text{ Veja que a resposta encontrada foi a mesma (} a_8 = 384 \text{)}$$

b) Encontrar o 9º termo da P.G. (5, 10, 20,...) sem escrevê-la, ou seja utilizando somente a fórmula:

Dados do problema

$a_9 = ?$ (Vamos calcular o 9º termo)

$q = 2$ (veja: $q = \frac{10}{5}$ ou $\frac{20}{10} = 2$)

$a_1 = 5$ (primeiro termo)

$n = 9$ (Porque estamos procurando o 9º termo)

Solução:

Substituindo na fórmula, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_9 = 5 \cdot 2^{9-1}$$

$$a_9 = 5 \cdot 2^{9-1}$$

1

$$a_9 = 5 \cdot 2^8$$

$$a_9 = 5 \cdot 256$$

$$a_9 = 1280$$

Resposta: O 9º termo é 1280

lembre-se que $2^8 = 2 \cdot 2 = 256$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 2) Considerando a P.G. de $a_1 = 1$ e $q = 5$, encontre o 6º termo (a_6).
- 3) Calcule o 8º termo (a_8) da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).
- 4) Quais são o 7º termo (a_7) e 12º termo (a_{10}) da P.G. (1,4,16,...).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

Podemos flexionar um pouco a fórmula do termo geral para calcular a razão ou o 1º termo, veja nos exemplos:

- a) Em uma P.G de **quatro termos**, os termos extremos são 2 e 54, calcular a razão:
(2, ____, ____, 54)

Solução

$$\text{dados} \begin{cases} n = 4 \\ a_1 = 2 \\ a_n = a_4 = 54 \\ q = ? \end{cases}$$

Utilizando a fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$$

$$54 = 2 \cdot q^{4-1}$$

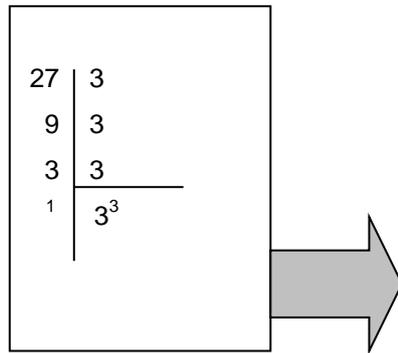
$$\frac{54}{2} = q^3$$

$$27 = q^3$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{q}$$

$$3 = q$$

$$q = 3$$



Portanto a razão da P.G. é **q = 3**

b) Encontre o 1º termo (a_1) de uma P.G., sabendo que $a_7 = 4374$ e $q = 3$.

$$\text{Dados} \begin{cases} a_1 = ? \\ a_n = a_7 = 4374 \\ q = 3 \\ n = 7 \end{cases}$$

Portanto o 1º termo $a_1 = 6$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_7 &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ 4374 &= a_1 \cdot 3^{7-1} \\ 4374 &= a_1 \cdot 3^6 \\ 4374 &= a_1 \cdot 729 \\ \frac{4374}{729} &= a_1 \\ 6 &= a_1 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

- 5) Qual é a razão de uma P.G. em que $a_1 = 5$ e $a_4 = 135$?
- 6) Calcule a razão de uma P.G. de seis termos cujos extremos são 3 e 96
- 7) Descubra o 1º termo (a_1) de uma P.G. de 5 termos em que $a_5 = 1875$ e $q = 5$?
- 8) Qual é o 1º termo (a_1) de uma P.G. de 7 termos em que $a_7 = 15309$ e $q = 3$?
- 9) A P.G. (3,6,12.....384) apresenta quantos termos ?
- 10) A P.G. (5,10,20..... 10240) apresenta quantos termos ?