C E E J A

EJA

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

MUNDO DO TRABALHO

MATEMÁTICA

CADERNO DO ESTUDANTE

ENSINO FUNDAMENTAL

ANOS FINAIS

VOLUME 4

00_book_MAT_CE_VOL 4.indb 1 10/03/15 15:08

Nos Cadernos do Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho/CEEJA são indicados *sites* para o aprofundamento de conhecimentos, como fonte de consulta dos conteúdos apresentados e como referências bibliográficas. Todos esses endereços eletrônicos foram verificados. No entanto, como a internet é um meio dinâmico e sujeito a mudanças, a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação não garante que os *sites* indicados permaneçam acessíveis ou inalterados após a data de consulta impressa neste material.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI) : Secretaria da Educação (SEE), 2014.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 4)

Conteúdo: v. 4. 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais.
ISBN: 978-85-8312-051-3 (Impresso)
978-85-8312-016-2 (Digital)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Fundamental Anos Finais. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

CDD: 372.5

FICHA CATALOGRÁFICA

Tatiane Silva Massucato Arias – CRB-8 / 7262

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Geraldo Alckmin
Governador

Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Nelson Luiz Baeta Neves Filho
Secretário em exercício

Maria Cristina Lopes Victorino
Chefe de Gabinete

Ernesto Mascellani Neto
Coordenador de Ensino Técnico, Tecnológico e Profissionalizante

Secretaria da Educação

Herman Voorwald
Secretário

Cleide Bauab Eid Bochixio
Secretária-Adjunta

Fernando Padula Novaes
Chefe de Gabinete

Maria Elizabete da Costa
Coordenadora de Gestão da Educação Básica

Mertila Larcher de Moraes
Diretora do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Adriana Aparecida de Oliveira
Adriana dos Santos Cunha
Luiz Carlos Tozetto
Virgínia Nunes de Oliveira Mendes
Técnicos do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Concepção do Programa e elaboração de conteúdos

Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Coordenação Geral do Projeto
Ernesto Mascellani Neto

Equipe Técnica
Cibele Rodrigues Silva, João Mota Jr. e Raphael Lebsa do Prado

Fundação do Desenvolvimento Administrativo – Fundap

Wanderley Messias da Costa
Diretor Executivo

Márgara Raquel Cunha
Diretora de Políticas Sociais

Coordenação Executiva do Projeto
José Lucas Cordeiro

Coordenação Técnica
Impressos: **Dilma Fabri Marão Pichoneri**
Vídeos: **Cristiane Ballerini**

Equipe Técnica e Pedagógica
Ana Paula Alves de Lavos, Cláudia Beatriz de Castro N. Ometto, Clélia La Laina, Elen Cristina S. K. Vaz Döppenschmitt, Emily Hozokawa Dias, Fernando Manzieri Heder, Herbert Rodrigues, Laís Schalch, Liliane Bordignon de Souza, Marcos Luis Gomes, Maria Etelvina R. Balan, Maria Helena de Castro Lima, Paula Marcia Ciacco da Silva Dias, Rodnei Pereira, Selma Venco e Walkiria Rigolon

Autores
Arte: Carolina Martins, Eloise Guazzelli, Emily Hozokawa Dias, Gisa Picosque e Lais Schalch; *Ciências*: Gustavo Isaac Killner, Maria Helena de Castro Lima e Rodnei Pereira; *Geografia*: Cláudia Beatriz de Castro N. Ometto, Clodoaldo Gomes Alencar Jr., Edinilson Quintiliano dos Santos, Liliane Bordignon de Souza e Mait Bertollo; *História*: Ana Paula Alves de Lavos, Fábio Luis Barbosa dos Santos e Fernando Manzieri Heder; *Inglês*: Clélia La Laina e Eduardo Portela; *Língua Portuguesa*: Claudio Bazzoni, Giulia Mendonça e Walkiria Rigolon; *Matemática*: Antonio José Lopes, Marcos Luis Gomes, Maria Etelvina R. Balan e Paula Marcia Ciacco da Silva Dias; *Trabalho*: Maria Helena de Castro Lima e Selma Venco (material adaptado e inserido nas demais disciplinas)

Gestão do processo de produção editorial

Fundação Carlos Alberto Vanzolini

Mauro de Mesquita Spínola
Presidente da Diretoria Executiva

José Joaquim do Amaral Ferreira
Vice-Presidente da Diretoria Executiva

Gestão de Tecnologias em Educação

Direção da Área
Guilherme Ary Plonski

Coordenação Executiva do Projeto
Angela Sprenger e Beatriz Scavazza

Gestão do Portal
Luis Marcio Barbosa, Luiz Carlos Gonçalves, Sonia Akimoto e Wilder Rogério de Oliveira

Gestão de Comunicação
Ane do Valle

Gestão Editorial
Denise Blanes

Equipe de Produção
Assessoria pedagógica: Ghisleine Trigo Silveira
Editorial: Carolina Grego Donadio e Paulo Mendes
Equipe Editorial: Adriana Ayami Takimoto, Airton Dantas de Araújo, Amanda Bonuccelli Voivodic, Ana Paula Santana Bezerra, Bárbara Odria Vieira, Bruno Pontes Barrio, Camila De Pieri Fernandes, Cláudia Letícia Vendrame Santos, David dos Santos Silva, Jean Kleber Silva, Lucas Puntel Carrasco, Mainã Greeb Vicente, Mariana Padoan de Sá Godinho, Patrícia Pinheiro de Sant'Ana, Tatiana Pavanelli Valsi e Thaís Nori Cornetta
Direitos autorais e iconografia: Aparecido Francisco, Camila Terra Hama, Fernanda Catalão Ramos, Mayara Ribeiro de Souza, Priscila Garofalo, Rita De Luca, Sandro Dominiquini Carrasco
Apoio à produção: Bia Ferraz, Maria Regina Xavier de Brito e Valéria Aranha
Projeto gráfico-editorial e diagramação: R2 Editorial, Michelangelo Russo e Casa de Ideias

CTP, Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado de São Paulo

Caro(a) estudante

É com grande satisfação que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em parceria com a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação, apresenta os Cadernos do Estudante do Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho para os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs). A proposta é oferecer um material pedagógico de fácil compreensão, que favoreça seu retorno aos estudos.

Sabemos quanto é difícil para quem trabalha ou procura um emprego se dedicar aos estudos, principalmente quando se parou de estudar há algum tempo.

O Programa nasceu da constatação de que os estudantes jovens e adultos têm experiências pessoais que devem ser consideradas no processo de aprendizagem. Trata-se de um conjunto de experiências, conhecimentos e convicções que se formou ao longo da vida. Dessa forma, procuramos respeitar a trajetória daqueles que apostaram na educação como o caminho para a conquista de um futuro melhor.

Nos Cadernos e vídeos que fazem parte do seu material de estudo, você perceberá a nossa preocupação em estabelecer um diálogo com o mundo do trabalho e respeitar as especificidades da modalidade de ensino semipresencial praticada nos CEEJAs.

Esperamos que você conclua o Ensino Fundamental e, posteriormente, continue estudando e buscando conhecimentos importantes para seu desenvolvimento e sua participação na sociedade. Afinal, o conhecimento é o bem mais valioso que adquirimos na vida e o único que se acumula por toda a nossa existência.

Bons estudos!

Secretaria da Educação

Secretaria de Desenvolvimento
Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

APRESENTAÇÃO

Estudar na idade adulta sempre demanda maior esforço, dado o acúmulo de responsabilidades (trabalho, família, atividades domésticas etc.), e a necessidade de estar diariamente em uma escola é, muitas vezes, um obstáculo para a retomada dos estudos, sobretudo devido à dificuldade de se conciliar estudo e trabalho. Nesse contexto, os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs) têm se constituído em uma alternativa para garantir o direito à educação aos que não conseguem frequentar regularmente a escola, tendo, assim, a opção de realizar um curso com presença flexível.

Para apoiar estudantes como você ao longo de seu percurso escolar, o Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho produziu materiais especificamente para os CEEJAs. Eles foram elaborados para atender a uma justa e antiga reivindicação de estudantes, professores e sociedade em geral: poder contar com materiais de apoio específicos para os estudos desse segmento.

Esses materiais são seus e, assim, você poderá estudar nos momentos mais adequados – conforme os horários que dispõe –, compartilhá-los com sua família, amigos etc. e guardá-los, para sempre estarem à mão no caso de futuras consultas.

Os Cadernos do Estudante apresentam textos que abordam e discutem os conteúdos propostos para cada disciplina e também atividades cujas respostas você poderá registrar no próprio material. Nesses Cadernos, você ainda terá espaço para registrar suas dúvidas, para que possa discuti-las com o professor sempre que for ao CEEJA.

Os vídeos que acompanham os Cadernos do Estudante, por sua vez, explicam, exemplificam e ampliam alguns dos assuntos tratados nos Cadernos, oferecendo informações que vão ajudá-lo a compreender melhor os conteúdos. São, portanto, um importante recurso com o qual você poderá contar em seus estudos.

Além desses materiais, o Programa EJA – Mundo do Trabalho tem um *site* exclusivo, que você poderá visitar sempre que desejar: <http://www.ejamundodotrabalho.sp.gov.br>. Nele, além de informações sobre o Programa, você acessa os Cadernos do Estudante e os vídeos de todas as disciplinas, ao clicar na aba **Conteúdo CEEJA**. Lá também estão disponíveis os vídeos de Trabalho, que abordam temas bastante significativos para jovens e adultos como você. Para encontrá-los, basta clicar na aba **Conteúdo EJA**.

Os materiais foram produzidos com a intenção de estabelecer um diálogo com você, visando facilitar seus momentos de estudo e de aprendizagem. Espera-se que, com esse estudo, você esteja pronto para realizar as provas no CEEJA e se sinta cada vez mais motivado a prosseguir sua trajetória escolar.

SUMÁRIO

TENHO DÚVIDAS

JÁ ESTUDEI

Caro(a) estudante,

Bem-vindo ao Volume 4 de Matemática. É hora de retomar alguns conceitos vistos, mas de maneira mais aprofundada. Além disso, cabe continuar mostrando que a Matemática está presente no dia a dia das pessoas, assim como em diferentes atividades profissionais.

Na Unidade 1, você vai retomar e aprofundar o que já viu sobre equações, além de resolver problemas de proporcionalidade e de Geometria.

Na Unidade 2, você estudará o cálculo com variáveis, assunto que pode ser considerado como introdução a um conteúdo matemático que será aprofundado no Ensino Médio: a Álgebra.

Na Unidade 3, ainda sobre o cálculo com variáveis, você vai conhecer estratégias para resolver sistemas formados por duas equações com duas incógnitas.

Na Unidade 4, você aprenderá a representar as equações em gráficos, definindo pontos e retas no plano cartesiano.

Por fim, na Unidade 5, você aprofundará seus conhecimentos sobre formas geométricas, em especial, triângulos e quadriláteros. Estudando relações de congruência e semelhança, você será capaz de resolver uma série de novos problemas práticos.

Que este último Caderno o motive a seguir nos seus estudos e ajude-o nas atividades do seu dia a dia.

Bons estudos!

UNIDADE 1

EQUAÇÕES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Introdução

Nesta Unidade, você vai aprofundar um assunto já conhecido: as equações. Depois de estudar alguns métodos de solução, você será capaz de resolver problemas que envolvem proporcionalidade e Geometria.

Você também vai ver as relações direta e inversamente proporcionais e como resolvê-las com equações, por meio da Propriedade Fundamental das Proporções (PFP). Além disso, vai estudar os ângulos e alguns problemas relacionados a eles, usando equações para resolvê-los.

A linguagem da Matemática TEMA 1

Neste Tema, você vai aprender estratégias que permitem traduzir uma situação-problema em linguagem algébrica e resolvê-la, usando equações com uma incógnita, assim como identificar grandezas direta ou inversamente proporcionais, para resolvê-las utilizando estratégias variadas, inclusive a regra de três.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Tradicionalmente, as equações são importantes para a Matemática e também têm sido muito utilizadas nas outras ciências.

- Em que situações do dia a dia ou em quais outras disciplinas, você precisa descobrir o valor de uma variável desconhecida?

- No cotidiano, nos meios de comunicação ou em outras disciplinas, você já encontrou expressões com variáveis, números e símbolo de igualdade?

Procure se lembrar de algumas situações onde profissionais utilizam fórmulas matemáticas.

O uso da matemática na resolução de problemas

A Matemática é uma importante ferramenta para a resolução de problemas, sejam eles de natureza numérica ou geométrica. Nesta Unidade, você vai retomar algumas situações em que são usados **símbolos**, **expressões** e **equações**.

É praticamente impossível listar todas as atividades profissionais que utilizam a Matemática e sua linguagem para expressar relações e resolver problemas.

Como introdução, considere o seguinte exemplo: uma corrida de táxi, cujo preço é calculado com base na distância percorrida entre um ponto de partida e um ponto de chegada. Observe a descrição dessa situação em linguagem matemática:

$$\text{(I)}\ P = 5d + 7$$

Nessa equação, considere que: **P** é o preço da corrida (em R$); 5 é o valor do quilômetro percorrido (em R$/km); **d** é a distância percorrida (em km); e **7** representa a bandeirada (tarifa fixa, em R$, registrada assim que o taxímetro é acionado).

Então, para calcular o valor de uma corrida, na qual o táxi percorreu 10 km, basta substituir a variável **d** por **10** na equação (I). Portanto, se $P = 5 \cdot \mathbf{10} + 7$, então $P = 57$. Ou seja, o preço da corrida foi de R$ 57,00.

Agora, imagine uma situação em que você sabe o valor da corrida, mas desconhece a distância percorrida. Por exemplo, se a corrida custa R$ 27,00, basta substituir a variável **P** por **27** na seguinte equação:

$$\text{(II)}\ 27 = 5d + 7$$

Se $\mathbf{27} = 5d + 7$, então a distância percorrida corresponde a 4 km, como se pode verificar: $5 \cdot 4 + 7 = 20 + 7 = 27$.

As duas situações descritas anteriormente foram transformadas em **equações**, porque duas condições puderam ser satisfeitas: a relação de **igualdade** e a presença de **variáveis**, conhecidas também como **incógnitas**.

VOCÊ SABIA?

A palavra *incógnita* também é usada em outras situações.

Pense na seguinte frase: "O cantor popular Alberto Roberto foi à praia de óculos escuros e peruca para ficar incógnito, evitando, assim, o assédio das fãs". Nessa frase, ficar *incógnito* significa que o cantor está disfarçado para não ser reconhecido. A palavra *incógnita* tem origem no verbo latino *cognoscere*, que significa *conhecer*. Já que o prefixo **in-** tem o sentido de negação, *incógnito* quer dizer *não conhecido*. Os matemáticos usam o termo *incógnita* para se referir a um valor não conhecido e que, em geral, deve ser descoberto.

Há muitos métodos que possibilitam a descoberta dos valores das incógnitas de uma equação, e é esse o assunto que você vai estudar nesta Unidade.

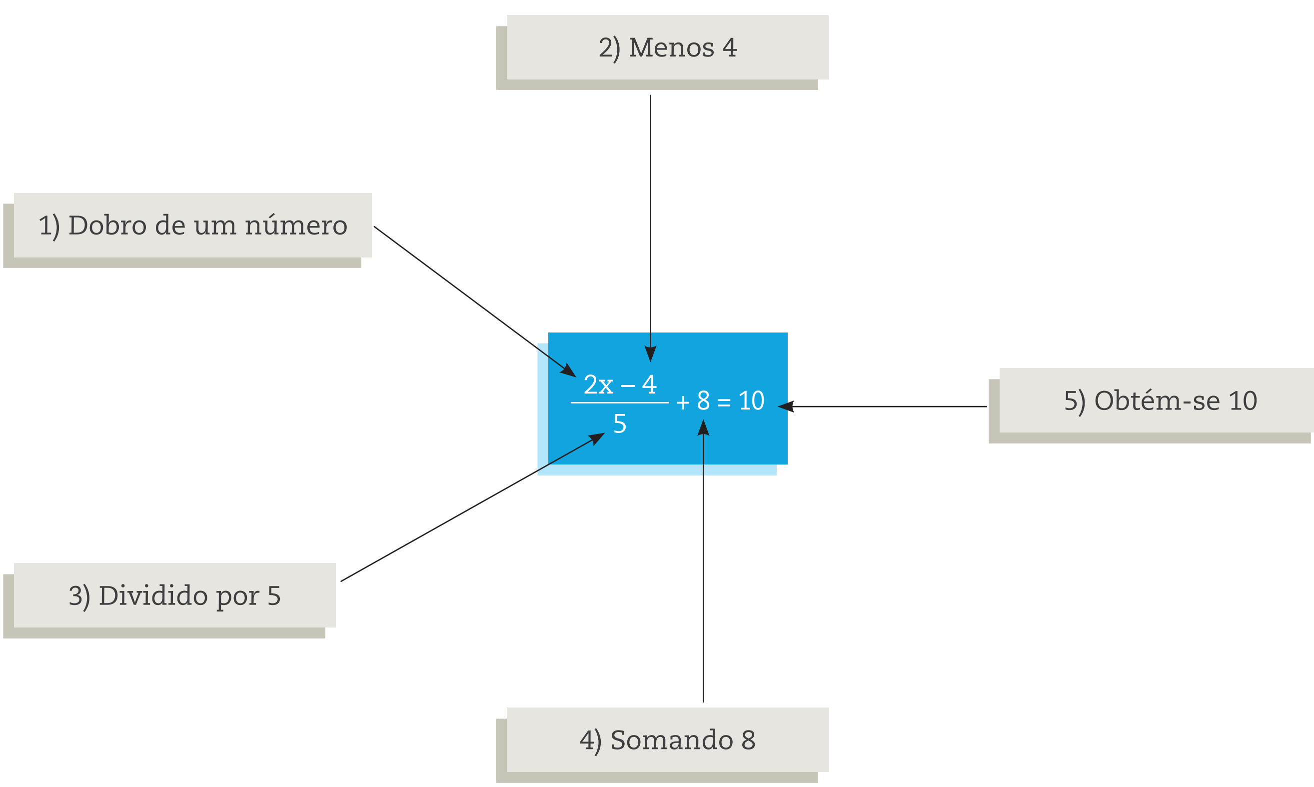
Estudando métodos de solução de equações

Para iniciar, considere o seguinte problema de adivinhação:

> O dobro de um número menos 4 é dividido por 5. Somado a 8, dá 10. Qual é esse número?

Uma estratégia para descobrir o número procurado é "chutar" valores e verificar se eles satisfazem às condições. Os matemáticos chamam essa estratégia de **tentativa e erro**, considerada legítima quando aplicada com critério. Independentemente de tentativas de adivinhação, há outras maneiras mais eficientes de solucionar um problema, quando se utiliza a **linguagem matemática**. Nesse caso, letras do alfabeto são usadas para representar valores desconhecidos.

Se **x** corresponde ao valor que você pretende descobrir, a expressão que representa o problema descrito anteriormente é a seguinte:



Quando transformado em **equação**, o problema é expresso em linguagem matemática. Assim, resolvendo a equação, você poderá encontrar a solução para ele.

Veja que é possível descobrir o valor de **x** por meio de raciocínio lógico, desenvolvendo o passo a passo, de trás para frente (do resultado da equação para a incógnita). Acompanhe:

$$\frac{2x-4}{5}+8=10 \qquad \boxed{2}$$

O número que somado a 8 dá 10 é **2**.

$$\frac{2x-4}{5}=2 \qquad \boxed{10}$$

O número que dividido por 5 dá 2 é **10**.

$$2x-4=10 \qquad \boxed{14}$$

O número do qual subtraindo 4 dá 10 é **14**.

$$2x=14 \qquad \boxed{7}$$

Um número que multiplicado por 2 dá 14 é **7**.

Sempre que você achar que encontrou a solução, verifique se o número encontrado satisfaz a todas as condições do problema e se ele produz a resposta esperada.

Substituindo a incógnita **x** por **7**, observe:

$$\frac{2\cdot 7-4}{5}+8=\frac{14-4}{5}+8=\frac{10}{5}+8=2+8=10$$

ATIVIDADE 1 Descobrindo o "xis" da questão

1 O quádruplo de um número é 300. Qual é esse número?

2 O triplo do antecessor (aquele que vem logo antes) de um número é 24. Qual é esse número?

3 A metade do sucessor (aquele que vem logo depois) de um número é 15. Qual é esse número?

4 João pensou em um número, calculou seu triplo e adicionou 8 ao resultado; em seguida, dividiu tudo por 5 e subtraiu 10, obtendo como resultado o número 0 (zero). Qual foi o número pensado por João?

5 A fórmula que fornece o preço de uma corrida de táxi em função da distância percorrida é $P = 3{,}5d + 4{,}5$.

a) Quanto vai custar uma corrida de 8 km?

b) Qual foi a distância percorrida, sabendo que a corrida custou R$ 50,00?

6 Um número somado à sua metade é igual a 120. Que número é esse?

7 Somando um número à sua terça parte, o resultado é 124. Qual é esse número?

Usando equações para resolver problemas de regra de três

Em problemas que envolvem o conceito de proporção, há sempre uma igualdade entre duas razões, formadas por três variáveis conhecidas e uma desconhecida. Tais problemas podem ser resolvidos por meio de **regra de três**, que nada mais é do que uma estratégia para descobrir a variável desconhecida.

> Se uma empresa tem 2 funcionárias para cada 3 funcionários do sexo masculino, é possível dizer que a razão entre mulheres e homens é de “2 para 3”. Em linguagem matemática, essa comparação é expressa pela notação fracionária $\frac{2}{3}$.
> Uma proporção, por sua vez, é uma igualdade de duas razões: por exemplo, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, ou genericamente $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d $\neq 0$.

Para saber mais sobre proporções e regra de três, analise os exemplos a seguir.

- **Exemplo 1**: A Constituição brasileira determina que a bandeira nacional deva ter uma razão de 14 por 20, em suas dimensões. Ou seja, se o lado menor tiver 14 cm, o lado maior terá 20 cm; porém, se o lado menor medir 7 cm, o lado maior deverá ter 10 cm. Observe que, nas duas situações apresentadas, a proporção entre os lados é idêntica, afinal $\frac{14}{20}$ equivale a $\frac{7}{10}$.

Observe as três bandeiras a seguir. Qual delas mantém as proporções oficiais? Caso sinta necessidade, pode usar uma régua para medi-las.

Daniel Beneventi

Agora, suponha que uma costureira deva confeccionar uma bandeira do Brasil. Se ela utilizar 3 m de tecido para o lado maior, qual será a medida do lado menor? Para resolver o problema, você pode utilizar a seguinte equação, em que **x** representa o lado menor da bandeira.

$$\text{(I)}\ \frac{14}{20} = \frac{x}{3}$$

- **Exemplo 2**: Se o tanque de combustível de um veículo tem capacidade para 48 litros e a taxa média de consumo é de 2 litros a cada 23 km rodados, quantos quilômetros podem ser percorridos com o tanque cheio?

© Daniel Beneventi

Para responder à questão, é preciso calcular o valor de **x** (em quilômetros) que satisfaz a proporção:

$$\text{(II)}\ \frac{2}{23} = \frac{48}{x}$$

Veja que, tanto no exemplo da bandeira como no exemplo do consumo de combustível, as proporções (I) e (II) são equações em que o **x** é a variável desconhecida.

Para resolver o problema da bandeira e o do consumo de combustível, uma solução é aplicar a Propriedade Fundamental das Proporções (PFP).

> Em uma proporção, é possível nomear seus termos. Observe:
>
> $a \div \underbrace{b = c}_{\text{Meios}} \div d$ — Extremos: a e d
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — Meios — Extremos
>
> A PFP diz que “o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”.
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

$$\text{(I)}\ \frac{14}{20} = \frac{x}{3} \Rightarrow 14 \cdot 3 = 20x \Rightarrow x = 42 \div 20 \Rightarrow x = 2{,}1$$

Se o lado maior do retângulo da bandeira do Brasil tiver 3 m, o lado menor deverá ter 2,1 m.

$$\text{(II)}\ \frac{2}{23} = \frac{48}{x} \Rightarrow 2x = 23 \cdot 48 \Rightarrow 2x = 1.104 \Rightarrow x = 1.104 \div 2 \Rightarrow x = 552$$

Com 48 litros de combustível, o automóvel poderá percorrer 552 quilômetros.

Nos problemas apresentados anteriormente, você pôde observar que as grandezas sempre aumentam ou diminuem na mesma proporção, o que significa que elas são **diretamente proporcionais**.

Em certos casos, por outro lado, você pode notar que há grandezas que aumentam enquanto outras diminuem proporcionalmente, ou seja, elas são **inversamente proporcionais**.

Veja alguns exemplos:

- Para produzir determinada quantidade de peças, uma fábrica usa 6 máquinas e conclui a produção em 8 dias. Para produzir o mesmo número de peças na metade do tempo, ou seja, em 4 dias, a fábrica vai precisar do dobro de máquinas. Veja que, nesse caso, para produzir o mesmo número de peças em metade do tempo, é preciso dobrar o número de máquinas.

- Para viajar de uma cidade à outra a uma velocidade média de 80 quilômetros por hora (km/h), um automóvel leva 3 horas. Diminuindo a velocidade para 60 km/h em média, qual será o tempo de percurso?

Velocidade		Tempo
80 km/h	→	3 h
60 km/h	→	x h

Como a velocidade e o tempo de percurso de um trecho são grandezas inversamente proporcionais, quanto maior for a velocidade do automóvel, menor será o tempo de percurso, e essa diminuição é proporcional. Por outro lado, ao diminuir a velocidade, o tempo aumenta proporcionalmente.

Essa relação evidencia uma proporção inversa, representada por $\frac{80}{60} = \frac{x}{3}$, na qual a razão entre os tempos de percurso aparece invertida. Observe a resolução do problema:

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{3} \Rightarrow 80 \cdot 3 = 60x \Rightarrow 240 = 60x \Rightarrow x = 240 \div 60 \Rightarrow x = 4$$

Então, se a velocidade média for de 60 km/h, a viagem deve durar 4 h.

MOMENTO CIDADANIA

O sistema eleitoral brasileiro utiliza o voto para realizar a eleição de vereadores, prefeitos, deputados estaduais e federais, governadores, senadores e presidente. Além de fortalecer a democracia, a eleição é também um instrumento que faz uso do conceito de proporção.

Assim, em uma eleição, a quantidade de candidatos que um partido pode eleger é proporcional ao número de votos que o partido recebe. Ou seja, quanto mais votos um partido receber, maior será o número de cadeiras que ele terá na Câmara. Uma das vantagens desse sistema, aplicado inicialmente na Bélgica, consiste em garantir a participação de grupos minoritários.

ATIVIDADE 2 Equações em proporções

1 Calcule o valor da variável **x** nas seguintes proporções:

a) $\frac{15}{24} = \frac{x}{80}$

b) $\frac{14}{24} = \frac{35}{x}$

c) $\frac{x}{32} = \frac{15}{96}$

d) $\frac{9}{x} = \frac{18}{50}$

2 Uma fábrica produz um lote de 600 peças em 3 horas, com 4 máquinas funcionando.

a) Se a fábrica utilizasse a mesma quantidade de máquinas por 8 horas, quantas peças seriam produzidas?

b) Se a fábrica utilizasse 6 máquinas pelas mesmas 3 horas, quantas peças seriam produzidas?

c) Se a fábrica quisesse produzir as mesmas 600 peças em 1h30, quantas máquinas seriam necessárias?

3 Uma empresa tem 360 funcionários. Sabendo que 2 em cada 5 utilizam o metrô, qual é o total de funcionários que usa esse meio de transporte?

4 Dois amigos formaram uma sociedade para montar um negócio. O primeiro investiu a quantia de R$ 1.200,00, e o segundo, a quantia de R$ 1.800,00. Ao final de um período, tiveram um lucro de R$ 6.000,00, que foi dividido para cada sócio, de forma proporcional ao capital investido por eles. Quanto do lucro cada um recebeu?

5 Um automóvel viaja entre São Paulo e Rio de Janeiro a uma velocidade média de 80 km/h, e leva 5 horas para fazer esse trajeto. Qual é a distância aproximada que o automóvel percorreu?

6 Em uma prova de ciclismo, o campeão percorreu a distância de 120 km em 4 horas. Qual foi a velocidade média do campeão durante essa prova?

ATIVIDADE 3 O epitáfio de Diofanto

1 Um dos últimos destaques da matemática grega foi Diofanto, que viveu no século III d.C. Nascido na cidade de Alexandria, local da principal biblioteca científica da Antiguidade, Diofanto foi pioneiro ao utilizar letras do alfabeto como variáveis para resolver problemas, o que fez que muitos matemáticos passassem a considerá-lo como o pai da Álgebra.

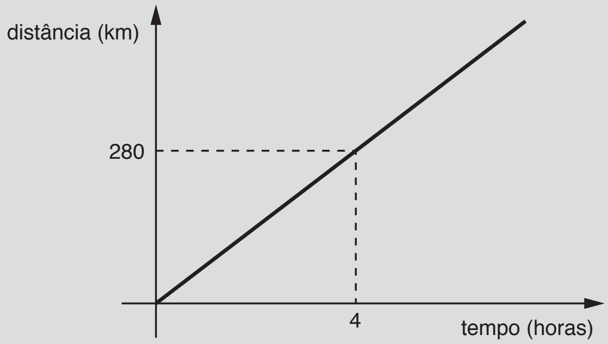
O pouco que se sabe sobre sua vida ficou gravado em seu túmulo:

> Esta é a admirável lápide onde descansa Diofanto! Ela permite saber a idade dele por meio da arte aritmética: Deus quis que, da sua vida, a infância ocupasse uma sexta parte. Decorreu mais um duodécimo até que a barba lhe cobriu o rosto. Em seguida, casou-se e passou um sétimo de sua vida sem filhos. Cinco anos depois, finalmente teve um menino. Este, adorado, mas sem sorte, viveu apenas a metade do tempo de seu pai. Tentando atenuar o seu pesar com a ciência dos números, Diofanto viveu ainda mais quatro anos.

Com base nesse epitáfio, quantos anos teria vivido Diofanto?

DESAFIO

O gráfico desenhado abaixo representa uma relação entre a grandeza tempo (em horas) e distância percorrida (em quilômetros).



As grandezas distância e tempo, nesse caso, são

a) não proporcionais.
b) inversamente proporcionais.
c) diretamente proporcionais.
d) proporcionais, mas a primeira ao quadrado da segunda.

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/1_Manhã/Prova-MAT-8EF-Manha.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Descobrindo o "xis" da questão

1 O número que multiplicado por 4 dá 300 é 75, porque $4 \cdot 75 = 300$.

Usando equações, a resolução fica da seguinte maneira:

$$4x = 300 \Rightarrow x = 300 \div 4 \Rightarrow x = 75$$

2 O número que multiplicado por 3 dá 24 é 8, logo $x - 1 = 8$; o número que subtraindo 1 dá 8 é 9.

Também pode ser resolvido em forma de equação:

$$3(x - 1) = 24 \Rightarrow x - 1 = 24 \div 3 \Rightarrow x - 1 = 8 \Rightarrow x = 8 + 1 \Rightarrow x = 9$$

3 O número que dividido por 2 dá 15 é 30, logo $x + 1 = 30$; o número que somando 1 dá 30 é o 29.

Outra forma de resolver é: $\frac{x + 1}{2} = 15 \Rightarrow x + 1 = 30 \Rightarrow x = 30 - 1 \Rightarrow x = 29$

4 $\frac{3x + 8}{5} - 10 = 0$

Contudo, também pode ser resolvido dessa forma: o número de que se subtrai 10 e dá 0 é 10; o número que dividido por 5 dá 10 é 50; o número que somado a 8 dá 50 é 42; e o número cujo triplo é 42 é 14. O número que João pensou foi 14.

5

a) $P = 3{,}5 \cdot 8 + 4{,}5 = 28 + 4{,}5 = 32{,}5 \Rightarrow$ R$ 32,50

A corrida de 8 km vai custar R$ 32,50.

b) $50 = 3{,}5d + 4{,}5 \Rightarrow 50 - 4{,}5 = 3{,}5d \Rightarrow 45{,}5 = 3{,}5d \Rightarrow d = 45{,}5 \div 3{,}5 \Rightarrow d = 13$

A corrida de R$ 50,00 corresponde a um percurso de 13 km.

6 Suponha que o número escolhido seja 40, de forma que 40 + 20 = 60, ou seja, não resolve o problema. No entanto, 60 é metade de 120, então o dobro de 40 deve resolver o problema: 80 + 40 = 120.

A equação correspondente a esse enunciado é:

$$x + \frac{x}{2} = 120 \Rightarrow \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = 120 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 120 \Rightarrow 3x = 120 \cdot 2 \Rightarrow 3x = 240 \Rightarrow x = 240 \div 3 \Rightarrow x = 80$$

É interessante revisitar o problema depois que você finalizar a próxima Unidade.

7 Supondo que o número seja 90, como a terça parte de 90 é 30, tem-se 90 + 30 = 120, ou seja, o valor é menor que 124. Então, tentando 93, que é um número maior, cuja terça parte é 31, tem-se 93 + 31 = 124. Assim, o número é 93.

Resolvendo na forma de equação:

$$x + \frac{x}{3} = 124 \Rightarrow \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} = 124 \Rightarrow \frac{4x}{3} = 124 \Rightarrow 4x = 124 \cdot 3 \Rightarrow 4x = 372 \Rightarrow x = 372 \div 4 \Rightarrow x = 93$$

Atividade 2 - Equações em proporções

1

a) $15 \cdot 80 = 24x \Rightarrow 1.200 = 24x \Rightarrow x = 1.200 \div 24 \Rightarrow x = 50$

b) $14x = 24 \cdot 35 \Rightarrow 14x = 840 \Rightarrow x = 840 \div 14 \Rightarrow x = 60$

c) $96x = 32 \cdot 15 \Rightarrow 96x = 480 \Rightarrow x = 480 \div 96 \Rightarrow x = 5$

d) $9 \cdot 50 = 18x \Rightarrow 450 = 18x \Rightarrow x = 450 \div 18 \Rightarrow x = 25$

2

a) A relação entre as grandezas "número de peças" e "horas" é diretamente proporcional: mais horas implica em mais peças. Logo, 600 peças está para 3 horas, assim como **x** peças está para 8 horas:

$$\frac{600}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 3x = 600 \cdot 8 \Rightarrow 3x = 4.800 \Rightarrow x = \frac{4.800}{3} \Rightarrow x = 1.600 \text{ peças}$$

b) A relação produção de peças e quantidade de máquinas é diretamente proporcional: mais máquinas implica em mais peças produzidas.

Desse modo, 600 peças está para 4 máquinas, assim como **x** peças está para 6 máquinas:

$$\frac{600}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow 4x = 600 \cdot 6 \Rightarrow 4x = 3.600 \Rightarrow x = \frac{3.600}{4} \Rightarrow x = 900 \text{ peças}$$

c) Nesse caso, a relação é inversamente proporcional: mais máquinas implica em menos tempo. Como o tempo se reduz à metade, a razão de diminuição do tempo é $\frac{1}{2}$, portanto será necessário o dobro de máquinas: 8.

3 A proporção é "2 está para 5, assim como **x** está para 360":

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{360} \Rightarrow 5x = 720 \Rightarrow x = 144$$

Assim, nessa empresa, 144 pessoas utilizam o metrô como meio de transporte.

4 Nesse caso, tem-se uma proporcionalidade direta em que, do total do capital investido, o primeiro entrou com $\frac{2}{5}$, e o segundo, com $\frac{3}{5}$. O problema pode ser resolvido com uma regra de três em cada caso.

Sócio 1: a proporção é 2 está para 5, assim como **x** está para 6.000.

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{6.000} \Rightarrow 5x = 12.000 \Rightarrow x = \frac{12.000}{5} \Rightarrow x = 2.400$$

Sócio 2: a proporção é 3 está para 5, assim como **y** está para 6.000.

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{6.000} \Rightarrow 5y = 18.000 \Rightarrow y = \frac{18.000}{5} \Rightarrow y = 3.600$$

Então, o primeiro sócio fica com R$ 2.400,00, e o segundo, com R$ 3.600,00.

5 Esse problema trata de uma proporcionalidade direta: 80 km está para 1 hora, assim como **x** km está para 5 horas.

$$\frac{80}{1} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 400 \text{ km}$$

6 Para descobrir a velocidade média do campeão, é necessário calcular a distância que ele percorreu em 1 hora, ou seja, 120 km está para 4 horas, assim como **x** km está para 1 hora.

$$\frac{120}{4} = \frac{x}{1} \Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{4} \Rightarrow x = 30$$

Portanto, o campeão percorreu em 1 hora uma média de 30 km, ou seja, sua velocidade média foi de 30 km/h.

Atividade 3 - O epitáfio de Diofanto

1 Para saber quantos anos viveu Diofanto, basta equacionar o epitáfio escrito em sua lápide e resolver a equação.

Como é seu tempo de vida o que se quer descobrir, tem-se aí a incógnita **x**. Durante a leitura do problema, é preciso relacionar a **x** toda informação que se refira às partes de sua vida.

HORA DA CHECAGEM

Assim:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow x = \frac{2x}{12} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{6x}{12} + 9 \Rightarrow x = \frac{9x}{12} + \frac{x}{7} + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{84x}{84} = \frac{63x}{84} + \frac{12x}{84} + 9 \Rightarrow \frac{84x}{84} - \frac{75x}{84} = 9 \Rightarrow \frac{9x}{84} = 9 \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 84}{9} \Rightarrow x = 84$$

O resultado dessa equação é que Diofanto viveu 84 anos.

Desafio

Alternativa correta: **c**. A relação tempo *versus* distância é diretamente proporcional, isto é, à medida que o tempo aumenta, a distância percorrida também aumenta proporcionalmente.

Registro de dúvidas e comentários

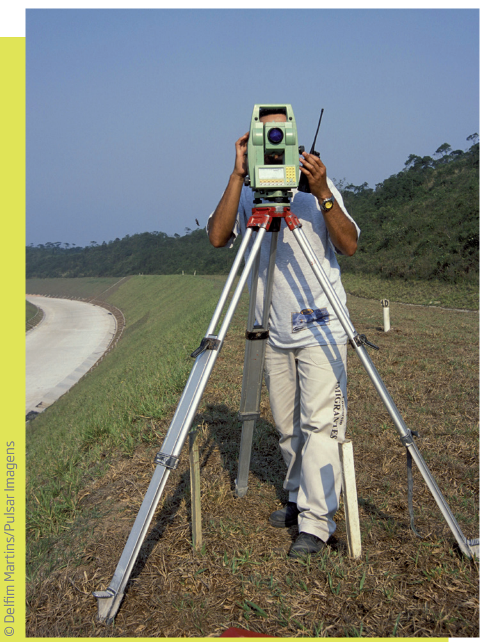
Neste Tema, você vai utilizar as propriedades dos ângulos internos e externos de um quadrilátero para resolver problemas geométricos, usando equações simples.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já passou por um estacionamento de carros e viu uma placa “estacione a 45 graus (45°)”? Já reparou que, quando isso ocorre, existem faixas inclinadas pintadas no asfalto, indicando a forma de estacionar? Por que será, então, que a placa indica 45°? O que isso quer dizer?

Uso de equações para expressar relações geométricas

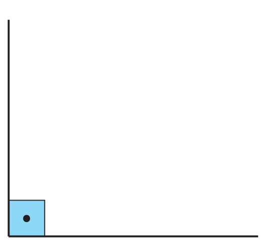
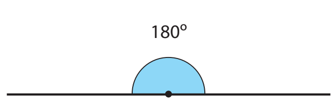
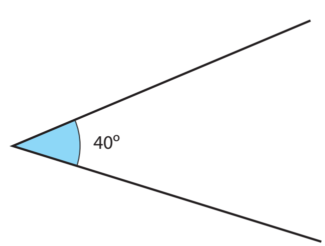
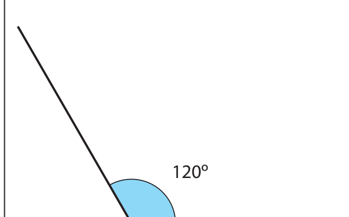
Muitos profissionais utilizam a Geometria, tais como marceneiros, carpinteiros, topógrafos, engenheiros e arquitetos. Em muitas situações, esses profissionais calculam ângulos por meio de equações, por exemplo, para obter encaixes perfeitos ou determinar distâncias.



© Delfim Martins/Pulsar Imagens

Embora muitos povos antigos já tivessem estudado os ângulos para determinar medidas, os gregos foram os primeiros a estabelecer algumas propriedades dos ângulos em formas geométricas.

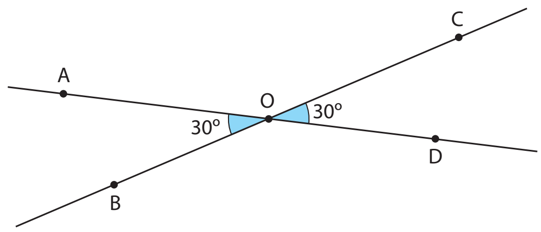
Os ângulos podem ser classificados de acordo com suas medidas:

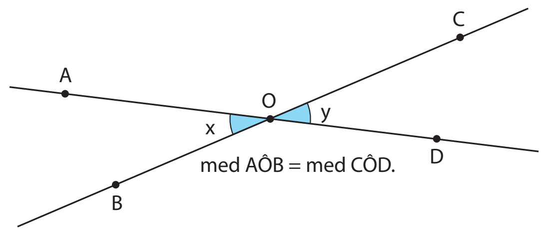
Ângulos			
Reto	Raso	Agudo	Obtuso
			
Medida igual a 90°.	Medida igual a 180°.	Medida menor que 90°.	Medida maior que 90°.

Ilustrações: © Sidnei Moura

Veja algumas proposições sobre os ângulos:

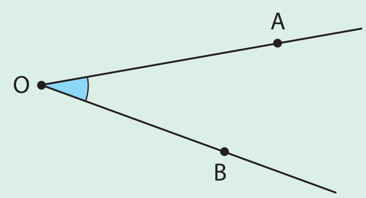
- Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.



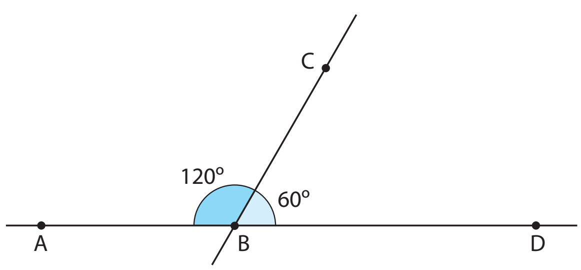


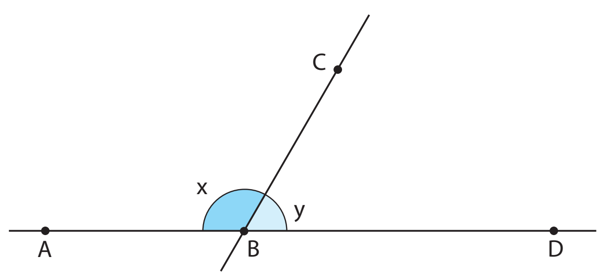
Quando duas retas se interceptam, quatro ângulos são formados. Nas imagens anteriores, é possível observar que os ângulos AÔB e CÔD apresentam o vértice comum O, e que $\overline{BO}$ e $\overline{OC}$ fazem parte de uma mesma reta, tal como ocorre com $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$. Quando isso acontece, a medida desses dois ângulos é igual: med AÔB = med CÔD.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para concluir que os ângulos AÔC e BÔD são de mesma medida.

> Usa-se um acento circunflexo em cima da letra que representa o vértice de um ângulo. Exemplo: AÔB.
>
> 
>

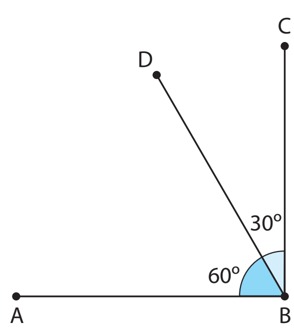
- Se dois ângulos com um lado comum formam um ângulo de 180°, eles são chamados de **ângulos suplementares**.

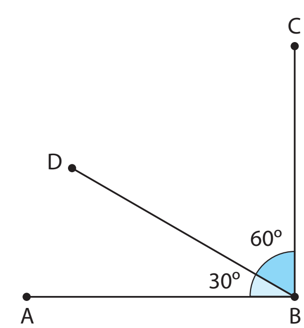




Observe, na figura acima, que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$, que fazem parte dos ângulos AB̂C e CB̂D, estão sobre a mesma reta e que $\overline{BC}$ é comum aos dois ângulos. Quando isso ocorre, os ângulos AB̂C e CB̂D são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180°.

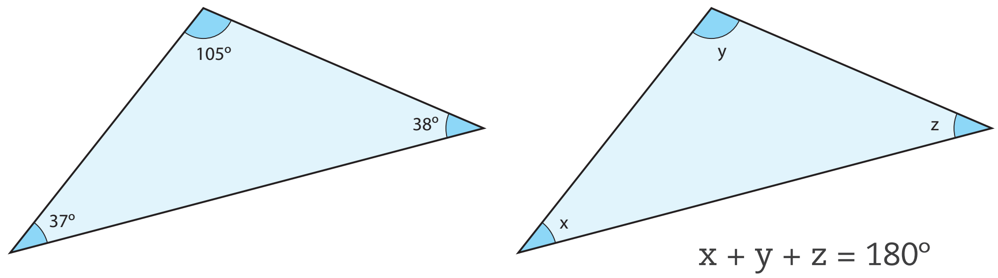
- Se dois ângulos com um lado comum formam um ângulo de 90° (reto), eles são chamados de **ângulos complementares**.





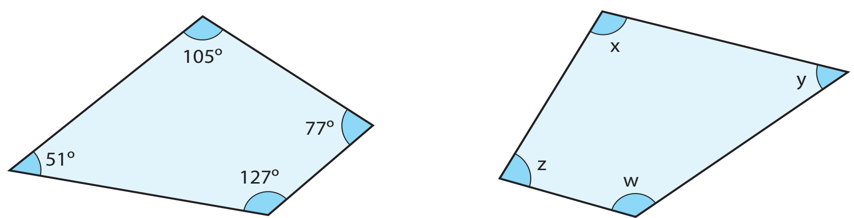
Ilustrações: © Sidnei Moura

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.



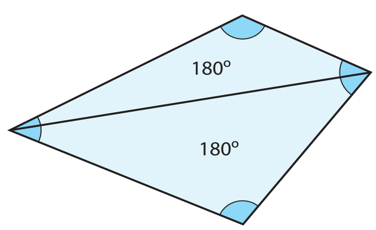
$x + y + z = 180°$

- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360°.



$x + y + z + w = 360°$

Tal proposição é uma consequência da anterior, pois, se o quadrilátero for decomposto em dois triângulos, a soma dos seus ângulos internos será $2 \cdot 180° = 360°$.

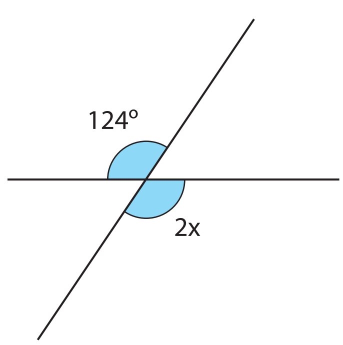


Essas proposições permitem que problemas geométricos sejam resolvidos por meio de equações simples.

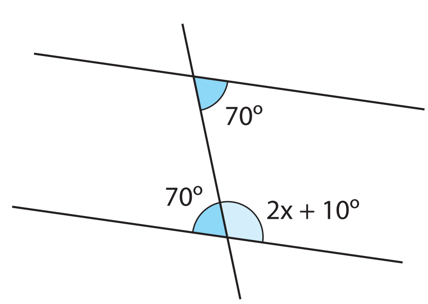
ATIVIDADE 1 Equações e relações angulares

1 Com base nas proposições estudadas, descubra o valor de **x**:

a)

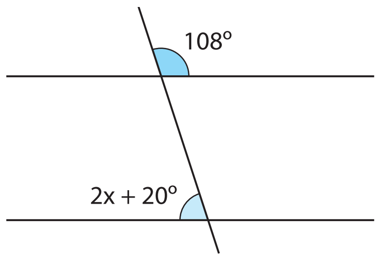


b)

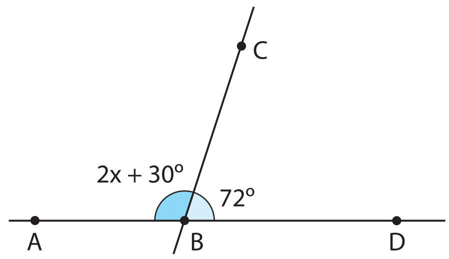


Ilustrações: © Sidnei Moura

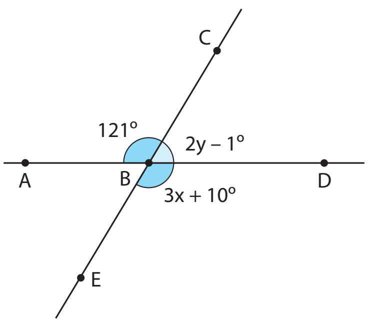
c)



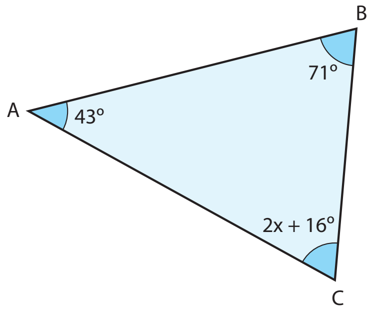
d)



2 Com base nas proposições estudadas, descubra os valores de **x** e **y**:

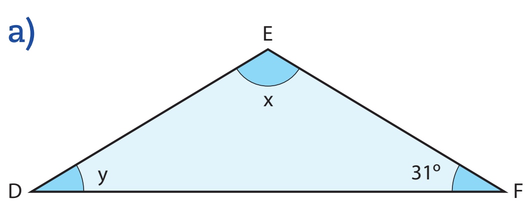


3 Determine a medida do ângulo Ĉ do triângulo a seguir:

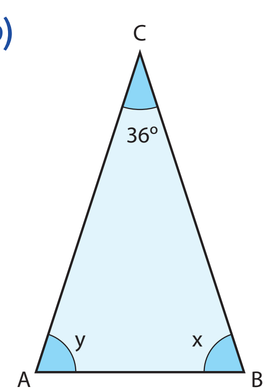


4 Os dois triângulos a seguir são isósceles, isto é, apresentam dois lados de mesma medida. Por consequência, os ângulos da base também são de mesma medida. Levando em conta essa propriedade e outras já estudadas, determine as medidas dos ângulos **x** e **y**:

a)

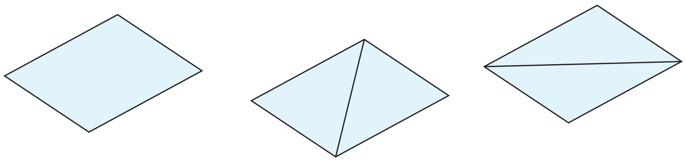


b)



Ilustrações: © Sidnei Moura

5 Um paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos iguais. Observe as figuras a seguir:

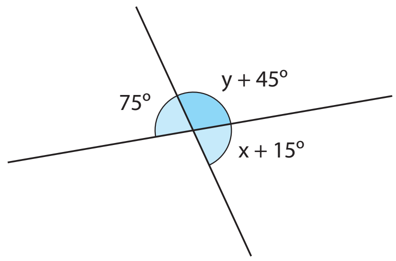


Sabendo que os ângulos opostos de um paralelogramo são de mesma medida e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, responda às questões propostas a seguir.

a) Qual é a soma dos ângulos internos do paralelogramo? Justifique.

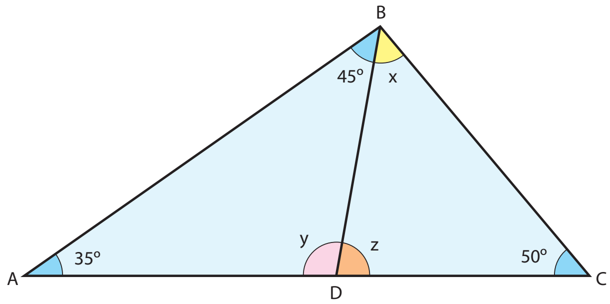
b) Se cada um dos ângulos agudos do paralelogramo mede 50°, quanto vale o ângulo obtuso? Justifique.

6 Descubra o valor de **x** e **y** para determinar a medida dos ângulos.



Lembre-se das propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e dos ângulos suplementares.

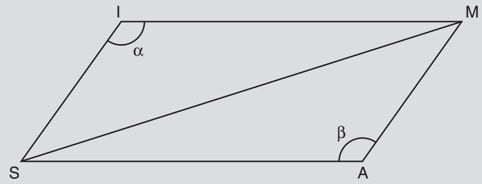
7 Descubra as medidas dos ângulos representados por **x**, **y** e **z**.



Ilustrações: © Sidnei Moura

DESAFIO

Foi traçada a diagonal do paralelogramo abaixo, formando assim dois triângulos



É correto afirmar que

a) a medida do ângulo α é diferente da medida do ângulo β.
b) as áreas de SIM e MAS têm a mesma medida.
c) a medida segmento $\overline{MS}$ é o dobro da medida do lado MA.
d) os triângulos SIM e MAS são isósceles.

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/3_Noite/Prova-MAT-8EF-Noite.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

PENSE SOBRE...

Qual é a importância do conteúdo estudado nesta Unidade para o mundo do trabalho? Você associa esse conteúdo a quais ocupações? Vai aplicá-lo em sua vida cotidiana? Como?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Equações e relações angulares

1

a) Como os ângulos da figura são opostos pelo vértice, então:

$$124° = 2x \Rightarrow x = 124° \div 2 \Rightarrow x = 62°$$

b) Como 2x + 10° e 70° são ângulos suplementares, então:

$$2x + 10° + 70° = 180° \Rightarrow 2x + 80° = 180° \Rightarrow 2x = 100° \Rightarrow x = 50°$$

c) Como 2x + 20° e 108° são ângulos suplementares, logo:

$$2x + 20° + 108° = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 128° \Rightarrow 2x = 52° \Rightarrow x = 26°$$

d) Como 2x + 30° + 72° = 180°, então:

$$2x + 102° = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 102° \Rightarrow 2x = 78° \Rightarrow x = 78° \div 2 \Rightarrow x = 39°$$

2 3x + 10° = 121° por serem opostos pelo vértice, assim:

$$3x = 121° - 10° \Rightarrow 3x = 111° \Rightarrow x = 111° \div 3 \Rightarrow x = 37°$$

$$2y - 1° + 121° = 180° \Rightarrow 2y = 180° - 120° \Rightarrow 2y = 60° \Rightarrow y = 60° \div 2 \Rightarrow y = 30°$$

3 $\hat{C} = 2x + 16°$. Soma dos ângulos internos conhecidos: $43° + 71° = 114°$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então:

$43° + 71° + (2x + 16°) = 180° \Rightarrow 2x = 180° - (114° + 16°) \Rightarrow 2x = 180° - 130° \Rightarrow 2x = 50° \Rightarrow x = 50° \div 2 \Rightarrow x = 25°$

Sabendo o valor de **x**, agora é possível calcular o ângulo $\hat{C}$:

$$2x + 16° = 2 \cdot 25 + 16° = 50° + 16° = 66°$$

Logo, o ângulo $\hat{C}$ mede 66°.

4

a) Como **y** e 31° são os ângulos da base do triângulo isósceles ΔDEF, eles têm a mesma medida, ou seja, $y = 31°$.

Como a medida dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então:

$$x + y + 31° = 180° \Rightarrow x + 31° + 31° = 180° \Rightarrow x = 180° - 62° \Rightarrow x = 118°$$

b) Como o ΔACB também é isósceles, $x = y$. Desse modo, tem-se que:

$$36° + x + y = 180° \Rightarrow x + y = 180° - 36° \Rightarrow x + y = 144°$$

Sendo $x = y$, então:

$$144° = 2x \Rightarrow x = 144 \div 2 \Rightarrow x = 72° \text{ e, por consequência, } y = 72°.$$

5

a) Se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e o paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos, então a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é 360°.

b) Se o ângulo agudo do paralelogramo mede 50°, o ângulo oposto tem a mesma medida. Como a soma dos ângulos de um quadrilátero é 360°, então a soma dos ângulos obtusos (que são iguais) é:

$$2x = 360° - 2 \cdot 50° \Rightarrow 2x = 360° - 100° \Rightarrow 2x = 260° \Rightarrow x = 130°$$

Portanto, cada ângulo obtuso mede 130°.

6 Sendo $x + 15°$ e 75° ângulos opostos pelo vértice, tem-se que $x + 15° = 75°$, então:

$$x = 75° - 15° \Rightarrow x = 60°$$

Como $y + 45°$ e 75° são ângulos suplementares:

$$y + 45° + 75° = 180° \Rightarrow y + 120° = 180° \Rightarrow y = 180° - 120° \Rightarrow y = 60°$$

Logo, o ângulo $(x + 15°)$ mede 75° e o ângulo $(y + 45°)$ mede 105°.

7 A soma dos ângulos internos do ΔABD é $35° + 45° + y = 180°$, assim $y = 100°$.

Já que **y** mede 100° e os ângulos **y** e **z** são suplementares, então:

$$y + z = 180° \Rightarrow z = 180° - 100° \Rightarrow z = 80°$$

A soma dos ângulos internos do ΔBCD é 180°, portanto:

$$x + z + 50° = 180° \Rightarrow x = 180° - 130° \Rightarrow x = 50°$$

HORA DA CHECAGEM

Desafio

Alternativa correta: **b**.

Ao traçar a diagonal desse paralelogramo, você o divide em dois triângulos iguais, o que significa que as áreas do triângulo SIM e do triângulo MAS são iguais.

Como foi visto anteriormente, os ângulos opostos de um paralelogramo são de mesma medida, portanto $\alpha = \beta$.

Registro de dúvidas e comentários

UNIDADE 2

CALCULANDO COM VARIÁVEIS

MATEMÁTICA

Introdução

Nesta Unidade, você vai estudar um tipo de representação matemática: a expressão algébrica. Além disso, vai conhecer diferentes maneiras de calcular essas expressões.

Polinômios TEMA 1

Neste Tema, você vai constatar o quanto a Matemática é empregada no cotidiano, bem como seus procedimentos lógicos, que vão ajudá-lo a resolver situações-problema que incluem sistemas de equações.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

O desenvolvimento de novas tecnologias tornou mais “matemático” o mundo em que você vive. Em muitas situações da vida cotidiana e, principalmente, nas atividades profissionais, a Matemática é uma ferramenta fundamental. Como exemplo, pense na operação das máquinas de uma fábrica, no cálculo e no controle tanto das despesas do dia a dia como das contas bancárias, no uso diário de fornos de micro-ondas, TVs, gravadores de áudio e vídeo, aparelhos de localização por satélite (GPS) e, principalmente, nos computadores, *tablets* e telefones celulares.

Todos esses aparelhos controlados por *chips* funcionam por meio de um programa desenvolvido em linguagem lógico-matemática. O exercício de inúmeras profissões também depende da consulta de manuais escritos em linguagem técnica, nos quais existem fórmulas, medidas, estatísticas etc. Ou seja, a Matemática faz parte do mundo do trabalho e, geralmente, está representada por meio de uma expressão algébrica, formada por variáveis, símbolos e números.

Reflita e analise como se dá o uso da Matemática em uma das situações cotidianas mencionadas anteriormente.

Expressões algébricas no imposto de renda

Seu Manoel é um contador que faz as declarações de imposto de renda (IR) de seus clientes. Utilizando uma tabela da Secretaria da Receita Federal do Brasil (SRFB), ele criou algumas fórmulas para calcular o tributo relacionado aos rendimentos anuais dos contribuintes.

Observe a última coluna, na qual seu Manoel apresenta essas fórmulas.

Tabela Progressiva para o cálculo anual do Imposto sobre a Renda da Pessoa física a partir do exercício de 2015, ano calendário de 2014			Fórmulas criadas pelo seu Manoel[*]
Base de cálculo anual (em R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (em R$)	
Até 21.453,24	–	–	Isento de imposto
De 21.453,25 até 32.151,48	7,5	1.608,99	$I = 3 \cdot R \div 40 - 1.608{,}99$
De 32.151,49 até 42.869,16	15,0	4.020,35	$I = 6 \cdot R \div 40 - 4.020{,}35$
De 42.869,17 até 53.565,72	22,5	7.235,54	$I = 9 \cdot R \div 40 - 7.235{,}54$
Acima de 53.565,72	27,5	9.913,83	$I = 11 \cdot R \div 40 - 9.913{,}83$

[*] I: Imposto a pagar; R: rendimento anual [nota do editor].

RECEITA Federal. Tabela Progressiva para Cálculo Anual do Imposto de Renda da Pessoa Física – a partir do exercício de 2012. Disponível em: <http://www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas/tabprogressiva2012a2015.htm>. Acesso em: 10 mar. 2014.

Suponha que um cliente do seu Manoel recebeu R$ 3.000,00 por mês. Portanto, em um ano, esse cliente recebeu R$ 39.000,00 (ou seja: $13 \cdot 3.000{,}00 = 39.000{,}00$), valor que está dentro da terceira faixa de rendimento. Acompanhe o seguinte cálculo:

$$I = 6 \cdot R \div 40 - 4.020{,}35 \Rightarrow I = 6 \cdot 39.000{,}00 \div 40 - 4.020{,}35 = 1.829{,}65$$

Ou seja, o cliente do seu Manoel deverá pagar R$ 1.829,65 de imposto de renda.

Note que o número 13 usado no cálculo logo abaixo da tabela representa o número de salários recebido no ano, isto é, o de cada um dos 12 meses mais o décimo terceiro salário.

Em situações como essas, os profissionais precisam usar fórmulas matemáticas, o que exige algum domínio sobre o cálculo algébrico, cujo estudo será aprofundado nesta Unidade.

Vale notar que todas as fórmulas criadas pelo seu Manoel estão representadas por uma expressão algébrica, formadas por letras (“I” e “R”), símbolos (“=”, “÷”, “–” etc.) e números (“3”, “40”, “1.608,99” etc.).

Observe, a seguir, algumas fórmulas, representadas por expressões algébricas, que fazem parte do cotidiano de diferentes tipos de profissionais. Observe ainda que, nessas fórmulas, as letras (ou variáveis) nem sempre aparecem da mesma maneira, pois podem corresponder ao numerador ou ao denominador, além de poderem estar elevadas ao quadrado ou ao cubo.

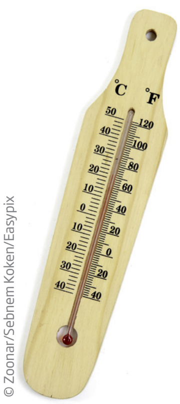
Eletricistas e engenheiros

© Grygorii Lykhatskyi/123RF

Fórmula que calcula o trabalho (W) de um aparelho em função do tempo (t) e da potência (P).

$$W = P \cdot t$$

Meteorologistas, navegadores e cientistas

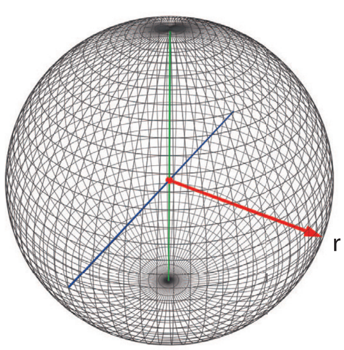


© Zoonar/Sebnem Koken/Easypix

Fórmula que converte uma temperatura em grau Fahrenheit (°F) – escala mais utilizada em alguns países do Hemisfério Norte – para a mesma temperatura em grau Celsius (°C) – escala adotada no Brasil.

$$C = \frac{5\,(F - 32)}{9}$$

Engenheiros e matemáticos



© Daniel Beneventi

Fórmula que mede o volume (V) de uma esfera em função do raio (r).

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Economistas e engenheiros

Fórmula que calcula o custo (C) da produção de um metal.

$$C = 20 + 60x - 0{,}75x^2$$

Agricultores e agrônomos

Fórmula que calcula o número (N) de plantas pela distância (d) entre elas, em cada metro quadrado.

$$N = \frac{k}{d^2}$$

Ou seja, saber utilizar expressões algébricas é importante para qualquer profissional que use fórmulas matemáticas em seu trabalho.

ASSISTA!

Matemática – Volume 4

A linguagem da Matemática

O vídeo demonstra como as fórmulas matemáticas que lançam mão de letras e números, chamadas de expressões algébricas, estão presentes em nossa vida. A partir de questões, como o cálculo do imposto de renda retido na fonte e do balanço do banco de horas, o vídeo explora as características dessas fórmulas e mostra o quanto elas nos ajudam.

Polinômios

Uma expressão algébrica é uma expressão matemática representada por meio de variáveis, números e operações.

Além das fórmulas já apresentadas, há diversos outros exemplos de expressões algébricas. Observe:

- $y + z$
- $2a + 3b$
- $A = B \cdot h$

No último exemplo, a fórmula $A = B \cdot h$ é uma expressão algébrica para calcular a área **A** de um paralelogramo, com base **B** e altura **h**.

> Você já viu alguns símbolos que representam a multiplicação. Para relembrar:
>
> - o "xis". Por exemplo, 2×3;
> - o ponto. Por exemplo, $a \cdot b$;
> - o asterisco (informática). Por exemplo, 2*x ou a*b.
>
> A partir deste Caderno, você também poderá utilizar outra representação:
>
> - a justaposição número-letra ou letra-letra. Por exemplo, **2x** ou **ab**.

Também é possível nomear as diferentes partes de uma expressão algébrica. Por exemplo, $4x + 2yz + 2ax^2$ tem três partes (**4x**, **2yz** e $\mathbf{2ax^2}$), que são chamadas "termos", "monômios" ou "parcelas".

Considere, por exemplo, $2ax^2$ e note que essa parcela também é composta de algumas partes:

$2ax^2$

- 2 é o coeficiente numérico
- ax^2 é a parte literal
- 2 é o expoente da variável x

> O coeficiente numérico é a parte numérica que compõe um monômio.

Dependendo da quantidade de parcelas com partes literais diferentes, a expressão algébrica pode ter diferentes denominações:

Número de parcelas	Nome	Exemplo
1	monômio	$3ax^2$
2	binômio	$2by - 3ax^2$
3	trinômio	$4x + 2by - 3ax^2$
4 ou mais	polinômio	$x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

Monômios, binômios e trinômios são casos particulares de polinômios. Procure no dicionário o significado do prefixo **poli-**.

Neste Caderno, você só vai estudar polinômios cujos expoentes sejam números naturais.

Tipos de cálculo algébrico – potências

Antes de iniciar esse assunto, cabe rever alguns exemplos de potenciação.


© Akiyoko/123RF

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$1^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$0^{100} = 0 \cdot 0 \cdot (...) \cdot 0 \cdot 0 = 0$ (independentemente de quantos zeros você utilize na multiplicação, o produto será sempre igual a zero).

Generalizando:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot (...) \cdot a \cdot a}_{\textbf{n} \text{ fatores } \textbf{a}}, \text{ sempre que } n \geq 2$$

Observe, a seguir, três propriedades das potências em que a base é um número inteiro, e o expoente é um número natural:

- Produto de potências de mesma base.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot (...) \cdot a)}^{\textbf{n} \text{ fatores } \textbf{a}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot (...) \cdot a)}^{\textbf{m} \text{ fatores } \textbf{a}}}_{n + m \text{ fatores } \textbf{a}} = a^{n+m}$$

Exemplos:

$3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$

$(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7$

$7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+2+3} = 7^7$

• Divisão de potências de mesma base.

Considere que n > m.

> Simplifique a fração algébrica quando o numerador e o denominador são iguais:
> $$\frac{a}{a} = 1$$

$$a^n \div a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a \cdot a}^{\textbf{n} \text{ fatores } \textbf{a}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a \cdot a}_{\textbf{m} \text{ fatores } \textbf{a}}}$$

$$a^n \div a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a}^{\text{restam } n - m \text{ fatores } \textbf{a}} = a^{n-m}$$

Exemplos:

$$\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 \qquad \frac{(-3)^8}{(-3)^5} = (-3)^{8-5} = (-3)^3$$

• Potência de potência.

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot (a^n) \cdot (\ldots) \cdot (a^n)}_{\textbf{m} \text{ fatores } \textbf{a}^n} = a^{n+n+(\ldots)+n} = a^{\overbrace{nm}^{\textbf{m} \text{ parcelas } \textbf{n}}}$$

Observe que o resultado é o produto de potências de mesma base, com **n · m** fatores **a**.

Exemplos:

$(7^3)^7 = 7^{3 \cdot 7} = 7^{21}$

$[(-10)^2]^2 = (-10)^{2 \cdot 2} = (-10)^4$

$[(2^2)^3]^5 = 2^{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^{30}$

ATIVIDADE 1 Propriedades das potências de mesma base

1 Calcule:

a) $3^3 \cdot 3^2$

b) $\dfrac{3^{10}}{3^7}$

c) $(5^3)^4$

d) $[(5^2)^3]^4$

2 Simplifique as expressões algébricas por meio das propriedades da potenciação:

a) $x^3 \cdot x^5$

b) $y^6 \div y^4$

c) $(a^2)^2$

Redução de termos semelhantes

Duas ou mais parcelas com a mesma parte literal podem ser simplificadas pela **redução de termos semelhantes.** Basicamente, essa técnica consiste em agrupar os termos da expressão algébrica que têm a mesma parte literal:

$$3a + 4a = 7a$$

$$2a - b + 5b = 2a + 4b$$

$$ax^2 + 3ax^2 = 4ax^2$$

$$3x^2y - x^2y + 4x^2y = 6x^2y$$

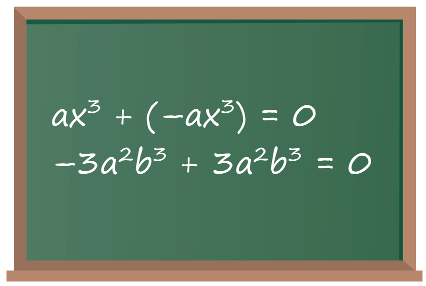
$$2x + 3y + 3x - 5y = 5x - 2y$$

Por outro lado, note que a expressão algébrica $2a^2b + 3x^3y$ não pode ser reduzida, pois as suas parcelas não têm a mesma parte literal.

Agora, considerando $ax^2 + a^2x$, observe que as partes literais também não são semelhantes, uma vez que os expoentes são diferentes: o expoente da variável **a** é 1 na primeira parcela e 2 na segunda, enquanto o expoente da variável **x** é 2 na primeira parcela e 1 na segunda.

A redução dos termos semelhantes transforma uma expressão algébrica em uma expressão equivalente, geralmente mais simples e econômica, também chamada de **forma reduzida**.

Veja outros exemplos a seguir:



© R2 Editorial

Ou seja, quando há duas parcelas com a mesma parte literal, mas cujas partes numéricas são números opostos, elas se anulam.

ATIVIDADE 2 Redução de termos semelhantes

1 Escreva monômios semelhantes aos apresentados a seguir:

a) ax

b) $2a^2x$

c) $3ax^2$

d) $5a^2x^2$

2 Dê a forma reduzida dos polinômios:

a) $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2$

b) $x^2 + 2xy - 2xy - y^2$

3 Reduza os termos semelhantes de cada polinômio:

a) $3x^3 - 5x^2 - 5 + 2x^3 + 5 + 3x^2$

b) $5x^3 + 3x^2 + x - 2 - 5x^3 - 2x^2 - 3x + 5$

4 Simplifique a seguinte expressão algébrica:

$$2a^2bx - 3ab^2x + 4a^2bx + 2abx^2 - ab^2x + 3abx^2 + 2a^2b^2x + 4a^2b^2x - a^2b^2x$$

5 Sabendo que $A = 2x^3 + 2x^2$, $B = x^3 + 2x$ e $C = 3x^2 - 5$, efetue os cálculos algébricos:

a) $A + B =$

b) $A + C =$

c) $B + C =$

d) $A + B + C =$

e) $A - B =$

f) $B - A =$

g) $B + A =$

h) $C - B =$

i) $A - B + C =$

6 Qual das expressões algébricas a seguir pode ser reduzida? Justifique sua resposta.

a) $13xyz + 7abc$

b) $6xyz + 5xzy + 4yxz + 3yzx + 2zxy + zyx$

7 Elimine os parênteses e reduza os termos semelhantes:

a) $(2x^3 + 3x^2 + x - 2) + (5x^3 - 2x^2 + 4x + 5)$

b) $(2x^2y + 3x^2y^2) + (4xy^2 - x^2y) - (x^2y + 3xy^2) + (x^2y^2 - 5xy^2)$

c) $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$

d) $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$

e) $(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$

Multiplicação de polinômios

Para realizar a multiplicação de dois polinômios quaisquer, basta aplicar:

- a propriedade distributiva;
- as propriedades da potenciação;
- a redução de termos semelhantes.

Acompanhe os exemplos:

$$a(a^2 + 2) = (a \cdot a^2) + (a \cdot 2) = a^3 + 2a$$

$$x^2(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2$$

$$3ax(2a + x - 1) = (3ax \cdot 2a) + (3ax \cdot x) + [3ax \cdot (-1)] = 6a^2x + 3ax^2 - 3ax$$

Simplificação: a divisão de polinômios

A simplificação de uma expressão algébrica consiste em substituí-la por outra mais simples, porém equivalente. Embora a redução de termos semelhantes que você já estudou seja um modo de simplificar uma expressão algébrica, alguns matemáticos preferem usar o termo “simplificação” apenas para a divisão de polinômios, assunto que será abordado a seguir.

Em uma divisão de monômios, uma mesma variável pode fazer parte, simultaneamente, do numerador e do denominador. Quando isso ocorre, a **fração algébrica** pode ser simplificada.

Fração algébrica

Expressão algébrica que apresenta uma variável no denominador.

Acompanhe o exemplo: $6a^3x^2 \div 9a^2x$ ou $\dfrac{6a^3x^2}{9a^2x}$

Simplificação da parte numérica: $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$

Na parte literal, basta aplicar a propriedade da divisão de potências de mesma base.

Simplificação da parte literal: $\dfrac{a^3}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{3-2} = a^1 = a$

$$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x^1 = x$$

Logo, $\dfrac{6a^3x^2}{9a^2x} = \dfrac{2ax}{3}$.

Neste Caderno, você vai analisar apenas os casos mais simples de divisão de polinômios, nos quais o denominador é um monômio. Por exemplo:

$$\frac{x^3y^4 + x^3y^3 + x^2y^3}{x^2y^3} = \frac{x^3y^4}{x^2y^3} + \frac{x^3y^3}{x^2y^3} + \frac{x^2y^3}{x^2y^3} = xy + x + 1$$

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x} = x^3 + x^2 + x + 1$$

ATIVIDADE 3 Multiplicação e divisão de polinômios

1 Simplifique as expressões algébricas:

a) $\dfrac{6x^2y^2 + 4xy^2}{2xy^2}$

b) $\dfrac{8x^3y^3 + 4xy^2}{4xy^2}$

c) $\dfrac{2x^3 + 4x^4 + 6x^5}{2xy^2}$

d) $\dfrac{2x^3 + 4x^4 + 6x^5}{2x^3}$

2 Efetue as divisões:

a) $(a^4x^3 + a^3x^4 + a^2x^5) \div a^2x^3$

b) $(-6b^4y^3 + 10b^4y^4 + 4b^3y^4) \div (-2b^2y^2)$

c) $(-70x^5 + 7x^4 - 14x^3 + 49x^2) \div 7$

d) $(-70x^5 + 7x^4 - 14x^3 + 49x^2) \div x^2$

3 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{10xy^2 + 6x^2y^3}{2xy^2}$

b) $\dfrac{4x^4 + 2x^3 + 6x^2}{2x^2}$

c) $\dfrac{20a - 30b}{10}$

4 Desenvolva os produtos:

a) $a^2(a + 2)$

b) $x^3(2x + 3x^2)$

c) $2ab(a + ab + b)$

DESAFIO

A expressão $\dfrac{(12x^2 - 6x)}{2x}$ é equivalente a

a) $3 \cdot (2x - 1)$
b) 3
c) $2x - 1$
d) $3x - 2$

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/3_Noite/Prova-MAT-8EF-Noite.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Propriedades das potências de mesma base

1

a) $3^{3+2} = 3^5$ b) $3^{10-7} = 3^3$ c) $5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$ d) $5^{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5^{24}$

2

a) $x^{3+5} = x^8$ b) $y^{6-4} = y^2$ c) $a^{2 \cdot 2} = a^4$

Atividade 2 - Redução de termos semelhantes

1 Nesse exercício, você pode escrever os monômios que quiser. Estes são apenas alguns exemplos:

a) $-3ax, 2ax, \frac{ax}{2}$

b) $a^2x, -3a^2x, \frac{5a^2x}{3}$

c) $-100ax^2, -ax^2$

d) $4a^2x^2, a^2x^2$

2

a) $2x^2 + 2y^2$

b) $x^2 - y^2$

3

a) $5x^3 - 2x^2$

b) $x^2 - 2x + 3$

4 $6a^2bx - 4ab^2x + 5abx^2 + 5a^2b^2x$

5

a) $3x^3 + 2x^2 + 2x$

b) $2x^3 + 5x^2 - 5$

c) $x^3 + 3x^2 + 2x - 5$

d) $3x^3 + 5x^2 + 2x - 5$

e) $A - B = (2x^3 + 2x^2) - (x^3 + 2x)$

Na subtração das expressões algébricas A e B, é preciso considerar que todos os termos de B são subtraídos, o que corresponde ao uso da propriedade distributiva da multiplicação: multiplicar todos os termos de B por "–1".

Assim, $(2x^3 + 2x^2) - (x^3 + 2x) = 2x^3 + 2x^2 - x^3 - 2x = 2x^3 - x^3 + 2x^2 - 2x = x^3 + 2x^2 - 2x$.

f) Do mesmo modo, $(x^3 + 2x) - (2x^3 + 2x^2) = x^3 + 2x - 2x^3 - 2x^2 = -x^3 - 2x^2 + 2x$.

g) $3x^3 + 2x^2 + 2x$

h) Lembre da subtração de todas as parcelas de B: $-x^3 + 3x^2 - 2x - 5$.

i) $x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

6

a) Não é possível reduzir a expressão algébrica, pois a parte literal de cada parcela é diferente.

b) É possível reduzi-la, pois todas as parcelas têm a mesma parte literal. (É importante lembrar que a ordem dos fatores não altera o produto.) Somando tudo, chega-se a 21xyz.

HORA DA CHECAGEM

HORA DA CHECAGEM

7

a) $2x^3 + 3x^2 + x - 2 + 5x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = 7x^3 + x^2 + 5x + 3$

b) $2x^2y + 3x^2y^2 + 4xy^2 - x^2y - x^2y - 3xy^2 + x^2y^2 - 5xy^2 = 4x^2y^2 - 4xy^2$

c) $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$

d) $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$

e) $x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = -4xy$

Atividade 3 - Multiplicação e divisão de polinômios

1

a) $\dfrac{6x^2y^2 + 4xy^2}{2xy^2} = \dfrac{6x^2y^2}{2xy^2} + \dfrac{4xy^2}{2xy^2} = 3x + 2$

b) $2x^2y + 1$

c) $\dfrac{x^2 + 2x^3 + 3x^4}{y^2}$

d) $1 + 2x + 3x^2$

2

a) $(a^4x^3 + a^3x^4 + a^2x^5) \div a^2x^3 = \dfrac{a^4x^3}{a^2x^3} + \dfrac{a^3x^4}{a^2x^3} + \dfrac{a^2x^5}{a^2x^3} = a^2 + ax + x^2$

b) Continue pensando como no item **a**: $3b^2y - 5b^2y^2 - 2by^2$.

c) $-10x^5 + x^4 - 2x^3 + 7x^2$

d) $-70x^3 + 7x^2 - 14x + 49$

3

a) $5 + 3xy$

b) $2x^2 + x + 3$

c) $2a - 3b$

4

a) Aplicando a propriedade distributiva, tem-se $a^2 \cdot a + a^2 \cdot 2 = a^3 + 2a^2$

b) $2x^4 + 3x^5$

c) $2a^2b + 2a^2b^2 + 2ab^2$

Desafio

Alternativa correta: **a**. Simplificando a expressão, ou seja, dividindo o numerador e o denominador por “2x”, você obterá “6x – 3”. Observe que 6 e 3 são ambos múltiplos de 3, isto é, eles são resultado de uma multiplicação por 3, assim pode-se dizer que 6x – 3 é o mesmo que 3 · (2x – 1).

Registro de dúvidas e comentários

Neste Tema, você vai se familiarizar com o que são os produtos notáveis, bem como exercitar sua resolução.

Verá também que a associação do conceito algébrico com o geométrico permite a visualização das expressões polinomiais.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você algum dia já se perguntou sobre o que significa, em matemática, a palavra produto?

Pois é, ele é o resultado da multiplicação entre dois ou mais termos, porém existem algumas multiplicações que se destacam. São os produtos notáveis.

Até agora, você aprendeu a fazer multiplicações com polinômios. Será que simplificar esses cálculos ajuda nas atividades do dia a dia?

E se os cálculos envolverem polinômios semelhantes? Você acha que seria bom conhecer sua resolução sem precisar efetuar tantos cálculos?

Produtos com regularidade

Os matemáticos sempre estão atentos a regularidades, inclusive se observadas em expressões algébricas.

Acompanhe o desenvolvimento do produto de dois binômios iguais.

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O produto desses binômios chamou a atenção dos matemáticos devido à frequência com que aparece em diversas situações. Dessa forma, as multiplicações que envolvem a mesma estrutura passaram a ser denominadas **produtos notáveis**.

Observe que o quadrado da soma $(a + b)^2$ equivale ao produto $(a + b) \cdot (a + b)$. Ou seja, o quadrado da soma de dois termos $(a + b)^2$ é igual à expressão algébrica $a^2 + 2ab + b^2$.

É importante conhecer e explorar os produtos notáveis, pois eles são úteis na solução de certos problemas e equações.

REGRA DE SINAIS

Você já estudou como fazer cálculos com números negativos em adições e subtrações, situação muito comum em operações financeiras que envolvem saldos positivo e negativo.

Em diferentes problemas matemáticos, por outro lado, também é necessário saber multiplicar e dividir com números negativos e positivos. Neste Caderno, você vai conhecer a regra dos sinais, porém não vai estudá-la de modo aprofundado.

Multiplicação ou divisão de dois números inteiros:

Sinais iguais → sinal positivo.

Sinais diferentes → sinal negativo.

	+	–
+	+	–
–	–	+

Veja outros exemplos:

$$(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O quadrado da diferença de dois termos $(a - b)^2$ é igual à expressão algébrica $a^2 - 2ab + b^2$.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

O produto $(a + b) \cdot (a - b)$ é igual à expressão algébrica $a^2 - b^2$.

ATIVIDADE 1 Trabalhando com produtos

1 Faça as seguintes multiplicações:

a) $2xy^2(3x + 2y)$

b) $5(2x - 3y)$

c) $-x(x^2 - x^3)$

d) $2x^2(10x^3 + x^2 + x - 7)$

2 Desenvolva os produtos notáveis:

a) $(2a + b) \cdot (2a + b)$

b) $(a + 2b) \cdot (a + 2b)$

c) $(a - b) \cdot (a - b)$

d) $(2a + 3b) \cdot (2a + 3b)$

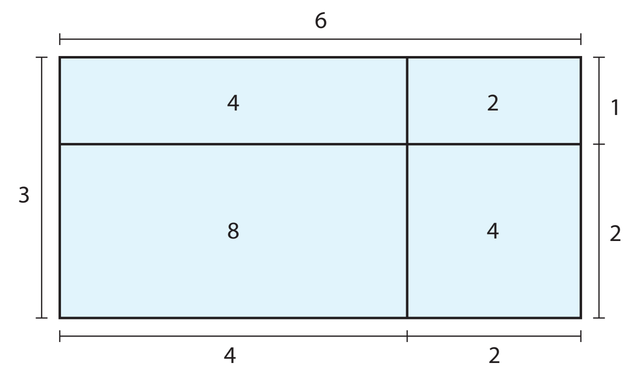
3 Qual é o número que, multiplicado por $2ax + 3a^2$, resulta em $10ax + 15a^2$?

4 Qual é o monômio que, multiplicado por $x^2 + x + 1$, dá $x^4 + x^3 + x^2$?

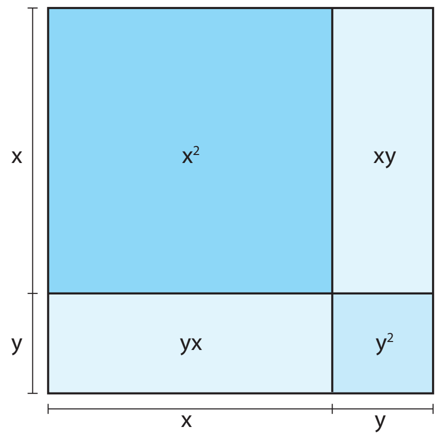
A geometria dos produtos notáveis

Os produtos notáveis também podem ser visualizados por meio de representações geométricas. Basta recordar a forma como se expressa a área do retângulo.

Observe que a área do retângulo maior é composta pela soma das áreas dos retângulos menores, ou seja, $6 \cdot 3 = 4 + 2 + 8 + 4$.



Agora, considere um caso particular de retângulo, no qual ele é um quadrado cujo lado corresponde à soma $(x + y)$.

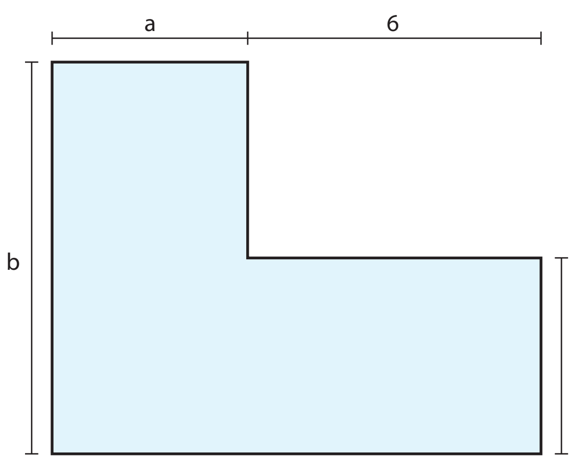


Essa é uma representação geométrica do produto notável $(x + y)^2$.

Nesse caso, a área do quadrado de lados $(x + y)$ é:

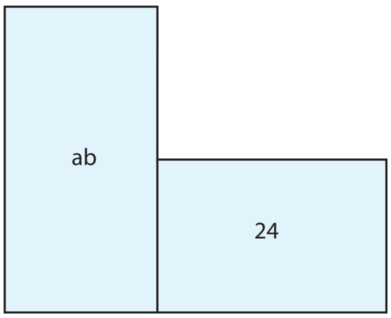
$$(x + y) \cdot (x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Veja outro exemplo que usa a mesma ideia para expressar a área das figuras geométricas:

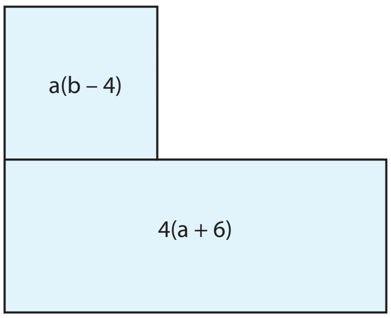


Ilustrações: © Sidnei Moura

Há, pelo menos, duas maneiras de decompor essa figura de seis lados (hexágono). Acompanhe:



Decompondo a figura desse modo, a expressão algébrica para a sua área é A = ab + 24.



Decompondo a figura desse outro modo, a expressão algébrica para a sua área é A = a(b - 4) + 4(a + 6).

Considere a decomposição da direita, com base no que foi visto até agora sobre cálculo algébrico:

$a(b - 4) = ab - 4a$

$4(a + 6) = 4a + 24$

Somando as duas expressões algébricas $(ab - 4a) + (4a + 24)$, obtém-se: $ab - 4a + 4a + 24$. Como a soma dos termos $-4a$ e $+4a$ dá zero, a área da figura é $A = ab + 24$, representação idêntica à expressão algébrica observada na decomposição da esquerda.

Assim, a área do hexágono depende do valor numérico atribuído a cada uma das variáveis. Se, por exemplo, $a = 8$ e $b = 4$, então a área do hexágono pode ser representada da seguinte maneira: $A = 8 \cdot 4 + 24 = 56$.

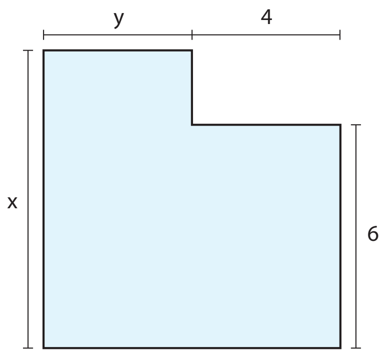
ATIVIDADE 2 Geometria e cálculo algébrico

LEMBRE

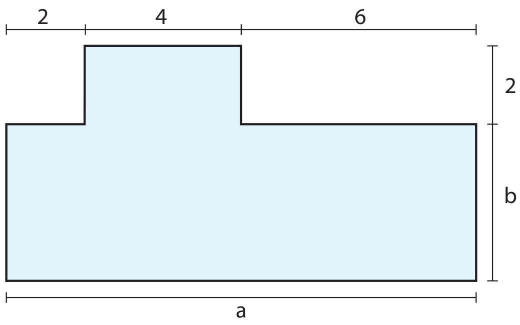
O perímetro é a medida do contorno da figura, e a área é a medida da superfície dela.

1 Represente a área e o perímetro das figuras a seguir:

a)



b)



Ilustrações: © Sidnei Moura

PENSE SOBRE...

A conta de luz, que pode ser representada por uma expressão algébrica, está sujeita a uma tarifa social, por meio da qual algumas residências recebem um desconto, desde que consumam até 80 kW/h mensais ou que ganhem benefícios de programas sociais do governo federal. O que você acha desse tipo de tarifa? Ela pode contribuir para a redução das desigualdades sociais?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Trabalhando com produtos

1

a) $6x^2y^2 + 4xy^3$ b) $10x - 15y$

c) Lembre-se de que, pela regra de sinais, quando se multiplica um número negativo por outro número negativo, o resultado é um número positivo, ou seja, $-x \cdot (-x^3) = +x^4$. Então, $-x \cdot (x^2 - x^3) = -x \cdot x^2 - x \cdot (-x^3) = -x^3 + x^4$.

d) $20x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 14x^2$

2

a) $4a^2 + 4ab + b^2$

b) $a^2 + 4ab + 4b^2$

c) $a^2 - 2ab + b^2$

d) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

3 Observando o resultado da multiplicação, é possível perceber que a parte literal dos termos não mudou, o que significa que é necessário avaliar apenas a parte numérica deles. Assim, basta encontrar o número que multiplicado por 2 dá 10 e multiplicado por 3 dá 15. Portanto, esse número é o 5.

4 Perceba que, na expressão algébrica $x^4 + x^3 + x^2$, cada termo teve seu expoente aumentado em 2, o que significa que ela foi multiplicada por x^2. Outro modo possível de pensar é considerar que a parcela 1 se transformou em x^2, logo a multiplicação só poderia ser por x^2.

Atividade 2 - Geometria e cálculo algébrico

1

a) Área: $A = xy + 24$.
Perímetro: $P = 2x + 2y + 8$.

b) Área: $A = ab + 8 = 12b + 8$.
Perímetro: $P = 2b + 28$.

Registro de dúvidas e comentários

UNIDADE 3

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

TEMAS

1. Equações
2. Métodos de resolução de um sistema de equações

Introdução

Nesta Unidade, você vai estudar um método de equacionamento partindo de um problema em linguagem matemática, que além de mais eficaz do que simples adivinhações, é muito importante na resolução de problemas com duas equações e duas incógnitas.

Os métodos apresentados são: substituição, adição e subtração. São, ainda, propostos vários exemplos para exercitar a resolução das equações e chegar ao resultado esperado.

Equações TEMA 1

Aqui você vai aprender que uma equação com duas variáveis pode ter infinitas soluções. Vai também entender que duas equações com as mesmas duas variáveis podem possuir uma única solução comum (x, y).

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Em seu dia a dia, sem se dar conta, muitos dos cálculos mentais que faz são para resolver equações e encontrar valores de incógnitas.

Para resolver alguns dos problemas da vida prática, você precisa encontrar mais de um valor numérico. Esse tipo de problema é comum em muitas situações profissionais, em que se têm alguns dados sobre determinada situação, mas não todos os necessários.

Quando você vai fazer uma compra, seja na feira ou em uma papelaria, por exemplo, pode calcular, a partir do valor em dinheiro que você tem, quais itens poderão ser comprados.

Na papelaria, se você tiver R$ 30,00 e quiser comprar R$ 5,00 em lápis e canetas, R$ 12,00 em cadernos e precisar do quinto do valor de seu dinheiro para voltar para casa, quanto mais você poderá gastar?

$\frac{1}{5}$ de 30 = 6, esse é o valor que você precisa para ir embora.

Portanto, 5 + 12 + 6 = 23 é o gasto já comprometido.

30 – 23 = 7 é o que resta para gastar.

Agora, se você colocar todas as informações acima na forma de uma equação, em que **x** é o valor que resta para gastar, ficaria assim:

$5 + 12 + \left(\frac{1}{5} \cdot 30\right) + x = 30$, ou

$30 - 5 - 12 - \frac{30}{5} = x$, em qualquer uma das equações, $x = 7$

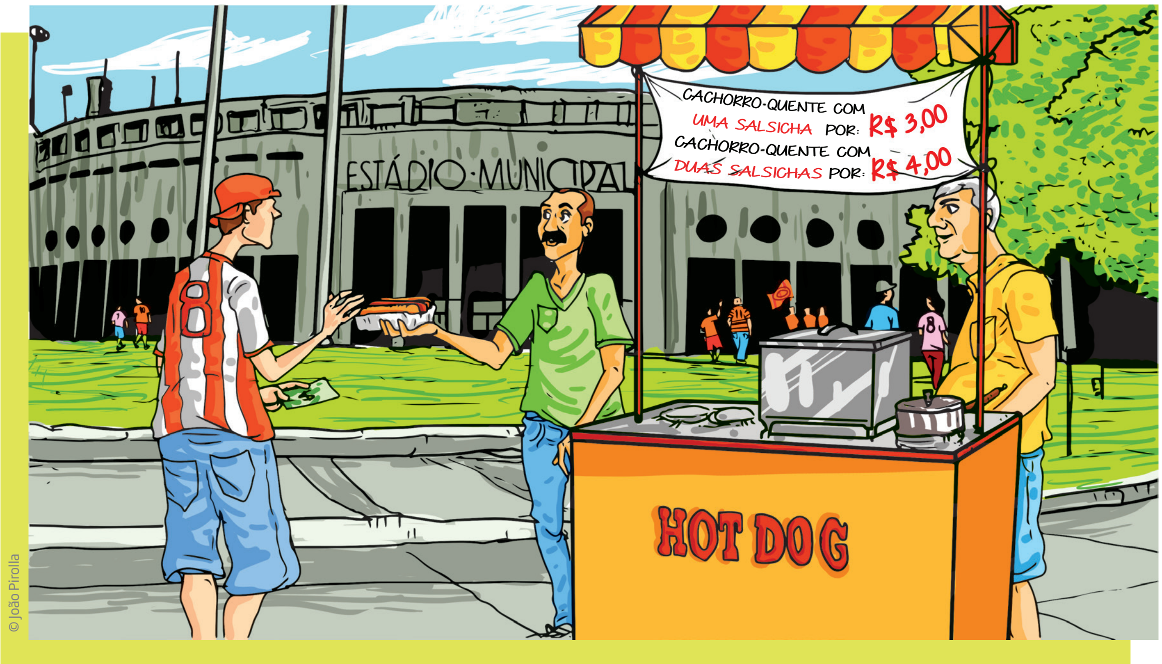
Veja que, quando você faz um cálculo desse tipo, está encontrando o valor de uma incógnita.

A resposta é $30 - 5 - 12 - \frac{30}{5} = x \Rightarrow 25 - 12 - 6 = x \Rightarrow 13 - 6 = x \Rightarrow x = 7$.

Reflita sobre o exemplo a seguir e tente descrever alguma situação que apresente essa característica, isto é, em que seja necessário encontrar não apenas um, mas dois ou mais valores numéricos para se chegar à solução.

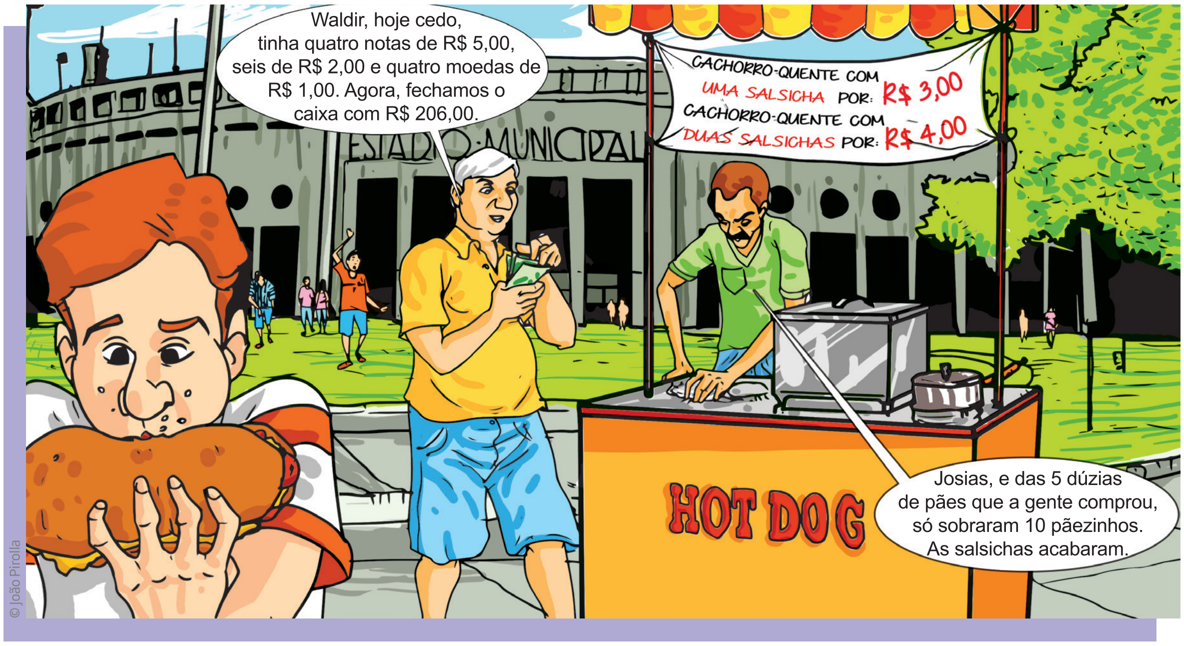
Resolvendo situações-problema

Josias e Waldir, utilizando suas economias, formaram uma sociedade para vender cachorro-quente durante jogos de futebol. Os dois lançaram a seguinte promoção:



© João Pirolla

No fim de um dia de trabalho, eles fizeram as contas para calcular o faturamento e o gasto com ingredientes.



Ajude Josias e Waldir a responder às seguintes perguntas:

- Qual foi o faturamento?
- Quantos pães e quantas salsichas foram usados?
- Quantos lanches de 1 salsicha e quantos lanches de 2 salsichas foram vendidos?

Na situação-problema de Josias e Waldir, algumas informações podem ser facilmente obtidas. Observe que o faturamento pode ser calculado por meio de uma simples subtração entre dois valores: o valor no final do dia e o valor no início do dia. Com relação ao consumo de pão, basta que você saiba que 5 dúzias correspondem a 60 unidades. Por outro lado, para saber quantas salsichas foram usadas e quantos lanches de cada tipo foram feitos, você precisará de outras técnicas de cálculo. No entanto, antes de estudá-las, para que você aprenda e domine os métodos de solução, analise e resolva algumas situações-problema do mesmo tipo, porém com resoluções mais simples.

ASSISTA!

Matemática – Volume 4

Equações para resolver problemas

Por meio de situações lúdicas, o vídeo aborda a utilidade dos sistemas de equações e de incógnitas para resolver questões como essa. Ressalta, também, como a Matemática pode ser compreendida de um jeito simples.

ATIVIDADE 1 Jogos de adivinhação

Esses jogos de adivinhação simples podem ser resolvidos mentalmente e em pouco tempo. Porém, é importante que, em todos eles, você pense, responda e registre como chegou à solução.

1 Descubra os dois números inteiros cuja soma é 100 e a diferença é 40.

Analise cada alternativa e justifique por que satisfazem ou não as condições do jogo de adivinhação proposto.

a) 25 e 75

b) 60 e 20

c) 80 e 20

d) 70 e 30

2 Descubra os dois números inteiros cuja soma é 5 e o produto é 6.

3 Descubra dois números inteiros, sabendo que um é o dobro do outro e que a soma deles é 30.

4 Descubra os dois números inteiros cuja soma é 15 e a diferença é 3.

5 Descubra os dois números inteiros cuja soma é 40 e a diferença é 20.

6 Juntando suas economias, João e Maria obtiveram R$ 50,00. Sabendo que Maria tinha R$ 12,00 a mais do que João, quanto cada um tinha?

Tentativa e erro

Os desafios propostos na atividade anterior têm algumas características em comum. Note que eles fazem referência à descoberta de dois números desconhecidos, com base em duas condições.

Quando os números são pequenos e familiares, você pode resolver mentalmente essas situações-problema; porém, em casos mais complexos, pode-se buscar uma solução em que a cada tentativa é feita uma melhor aproximação do resultado. Por exemplo:

Descubra dois números cuja soma é 20 e a diferença é 5.

Acompanhe o raciocínio a seguir.

- **Tentativa 1**: se a soma é 20, pode-se tentar 10 + 10 = 20, mas, como 10 – 10 = 0, então esses números não servem, pois não satisfazem as duas condições.

- **Tentativa 2**: talvez eles sejam 12 e 8, pois 12 + 8 = 20. Mas 12 – 8 = 4, portanto, apesar de a solução estar mais próxima, esses números também não satisfazem.

- **Tentativa 3**: agora, pode-se tentar 13 – 8 = 5. Mas 13 + 8 = 21, o que ainda não é a solução almejada. É preciso tentar novamente.

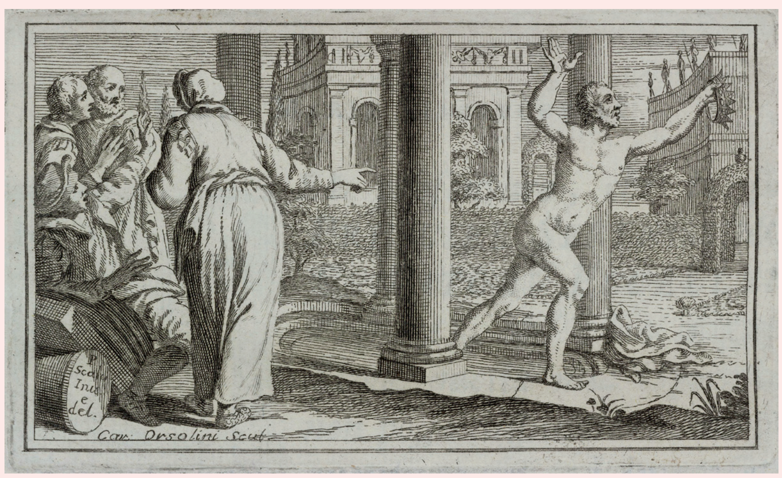
- **Tentativa 4**: ajustando um pouco os números das últimas tentativas, pode-se experimentar 12,5 e 7,5. Já que 12,5 + 7,5 = 20 e 12,5 – 7,5 = 5, chegou-se finalmente à resposta do desafio. *Eureka!*

O procedimento descrito anteriormente é legítimo e baseia-se em tentativas e erros, ou seja, começa com um "chute" de uma provável solução inicial que vai sendo ajustada por várias tentativas, até que se encontre uma solução que satisfaça as condições impostas.

VOCÊ SABIA?

A palavra *eureka* está associada a uma descoberta feita pelo matemático grego Arquimedes.

Enquanto tomava banho, Arquimedes (287-212 a.C.) descobriu o seguinte: ao calcular o volume da água deslocada, quando um corpo é submerso, você obtém o volume desse corpo. Empolgado com a descoberta, o matemático, enquanto corria nu pelas ruas de Siracusa, gritou "*Eureka! Eureka!*", que significa "Descobri! Descobri!", em grego.



© Science Museum, London/Diomedia

ATIVIDADE 2 Desafios com números

1 Por tentativa e erro, descubra dois números que satisfaçam as seguintes condições:

a) A soma é 10 e a diferença é 4.

b) A soma é 20 e a diferença é 6.

2 Para cada linha da tabela, encontre dois números que satisfaçam as condições a seguir:

	Soma	Diferença
a)	35	11
b)	176	80
c)	2	4
d)	10	5

3 Descreva o processo que você utilizou na resolução dos itens do exercício anterior.

Em busca de um método direto

O método de tentativa e erro pode ser eficaz em determinadas situações, mas, quando os números envolvidos são grandes, convém utilizar outro tipo de estratégia, como no caso exposto a seguir:

Encontre dois números cuja soma é 172 e a diferença é 76.

Os números que satisfazem as condições são 124 e 48, pois $124 + 48 = 172$ e $124 - 48 = 76$. Perceba que resolver por tentativa e erro seria mais difícil e demorado do que nos exemplos anteriores.

Há mais de 2 mil anos, os matemáticos desenvolveram um método mais eficaz para solucionar problemas desse tipo, que consiste em equacioná-los. Fundamentalmente, equacionar um problema é utilizar uma ou mais equações que expressem as relações entre os dados disponíveis.

Acompanhe os passos desse método:

1º) Escolha as variáveis para representar os números desconhecidos. Considere que **a** e **b**, por exemplo, sejam essas variáveis, e que a > b.

2º) Em forma de equação, represente as relações entre as informações disponíveis:

(I) "(...) dois números cuja soma é 172 (...)" ⇒ a + b = 172.

(II) "(...) e a diferença é 76" ⇒ a – b = 76.

Note que você tem um sistema de duas equações:

$$\begin{cases} a + b = 172 \quad (I) \\ a - b = 76 \quad (II) \end{cases}$$

Observe as tabelas com valores atribuídos às variáveis **a** e **b**:

Equação I		
a	b	a + b
172	0	172
171	1	172
170	2	172
169	3	172
...	...	...
125	47	172
124	48	172
123	49	172
122	50	172

Equação II		
a	b	**a – b**
172	0	172
171	1	170
170	2	168
169	3	166
...	...	...
125	47	78
124	48	76
123	49	74
122	50	72

Note que, nas tabelas apresentadas anteriormente, infinitos pares de números satisfazem a equação (I) e infinitos pares de números satisfazem a equação (II).

Porém, note que há apenas um par de números que satisfaz as duas equações ao mesmo tempo: 124 e 48. Você pode representar o par de números com parênteses: (124, 48), em que a = 124 e b = 48.

Segundo os matemáticos, um par ordenado é o modo de representar dois números entre parênteses e separados por vírgula (x, y). O par é "ordenado" porque a ordem dos números é importante, isto é, (x, y) ≠ (y, x).

Acompanhe a resolução dos problemas a seguir:

- Encontre dois números, considerando que a soma do dobro de um com o triplo do outro é 35.

A equação correspondente ao problema pode ser descrita do seguinte modo: $2x + 3y = 35$.

Veja como descobrir os valores numéricos para o par ordenado (x, y):

Se $x = 1$, então $3y = 35 - 2x = 35 - 2 = 33 \Rightarrow y = 11$. O par ordenado $(1, 11)$ satisfaz a equação, pois $2 \cdot 1 + 3 \cdot 11 = 2 + 33 = 35$.

Se $x = 4$, então $y = 9$. Ou seja, o par ordenado $(4, 9)$ também satisfaz a equação, uma vez que $2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 8 + 27 = 35$.

Observe que existe mais de uma solução que satisfaz a equação proposta. Mas quantas soluções uma equação pode ter?

Para responder a essa questão, é preciso considerar novamente a equação $2x + 3y = 35$ e efetuar as transformações algébricas possíveis. Veja que **y** pode ser escrito em função de **x** da seguinte forma:

$3y = 35 - 2x$, isolando o termo com **y** no primeiro membro.

$y = \dfrac{35 - 2x}{3}$, dividindo ambos os membros por 3.

Por meio dessa última igualdade, é possível construir uma tabela com três colunas, tendo, na primeira delas, os valores atribuídos a **x**; na segunda, os valores de **y** ao substituir **x** na equação; e, na terceira, os valores do par ordenado (x, y).

Se x é igual a...	... então y é igual a:	Pares ordenados (x, y)
1	$\dfrac{35 - 2 \cdot 1}{3} = \dfrac{33}{3} = 11$	(1, 11)
4	$\dfrac{35 - 2 \cdot 4}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$	(4, 9)
7	$\dfrac{35 - 2 \cdot 7}{3} = \dfrac{21}{3} = 7$	(7, 7)
10	$\dfrac{35 - 2 \cdot 10}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$	(10, 5)

Na tabela apresentada a seguir, você pode perceber que todos os valores de **x** e **y** satisfazem a equação do problema: $2x + 3y = 35$.

(x, y)	2x	3y	2x + 3y
(1, 11)	2	33	35
(4, 9)	8	27	35
(7, 7)	14	21	35
(10, 5)	20	15	35

• Suponha que se queira descobrir valores para o par ordenado (x, y) que satisfaçam, simultaneamente, duas equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 35 & \text{(I)} \\ 2x - y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Nesse caso, é necessário encontrar, entre as infinitas soluções da equação $2x + 3y = 35$, aquela que também satisfaça a equação $2x - y = 7$.

Em equações do tipo $2x + 3y = 35$, como **x** e **y** podem assumir diferentes valores, eles são chamados de **variáveis**.

Veja o que acontece quando valores para **x** e **y** são atribuídos:

x	y	2x + 3y	2x – y
0	$\frac{35}{3}$	35	$-\frac{35}{3}$
1	11	35	–9
4	9	35	–1
10	5	35	15
22	–3	35	47
$\frac{35}{2}$	0	35	35
7	7	35	7
2,5	10	35	–5

Apenas o par ordenado (7, 7) satisfaz as duas equações ao mesmo tempo, conforme se observa na seguinte verificação:

Equação (I): $2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 35$.

Equação (II): $2 \cdot 7 - 7 = 7$.

ATIVIDADE 3 Equações com duas incógnitas

1 Nos pares ordenados a seguir, encontre os valores de **y** que satisfazem a equação $3x + 4y = 36$.

a) (0, y)

b) (2, y)

c) (8, y)

d) (12, y)

e) (20, y)

2 Descubra quais dos pares ordenados a seguir são soluções para a equação $3x - 2y = 24$.

a) (0, 12)

b) (4, 6)

c) (6, 4)

d) (12, 6)

e) (8, 0)

DESAFIO

A tabela abaixo mostra o número de horas que Lúcia assiste à televisão em relação ao número de dias:

Número de horas (h)	3	6	15	18
Número de dias (d)	1,0	2,0	5,0	6,0

Indica-se por **h** o número de horas, e por **d**, o número de dias. A sentença algébrica que relaciona, de forma correta, as duas grandezas é

a) d = h – 2 **b)** d = h · 3 **c)** h ÷ 3 = d **d)** h – 3 = d

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/8%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-8EF-Manha.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Jogos de adivinhação

1

a) $25 + 75 = 100$, mas $75 - 25 = 50 \neq 40$, então o par 25 e 75 não satisfaz as condições.

b) $60 - 20 = 40$, mas $60 + 20 = 80 \neq 100$, então o par 60 e 20 não satisfaz as condições.

c) $80 + 20 = 100$, mas $80 - 20 = 60 \neq 40$, então o par 80 e 20 não satisfaz as condições.

d) $70 + 30 = 100$ e $70 - 30 = 40$, de forma que 70 e 30 são os números procurados.

2 Esse é um exercício que pode ser resolvido mentalmente ou por tentativa e erro. Os números que somados dão 5 são: 0 e 5, 1 e 4, 2 e 3, mas, desses pares, os únicos números que multiplicados dão 6 são 2 e 3.

3 Se um número é **x**, seu dobro é 2x. Desse modo, $x + 2x = 30 \Rightarrow 3x = 30$, logo $x = 30 \div 3 = 10$. Os números procurados são 10 e 20.

4 Se você chamar um número de **a** e o outro de **b**, então $a + b = 15$ e $a - b = 3$.

Por tentativas, podem-se achar os números 9 e 6.

Verifique que $9 + 6 = 15$ e $9 - 6 = 3$.

Pode-se também calcular da seguinte maneira: $15 - 3 = 12 \Rightarrow 12 \div 2 = 6 \Rightarrow b = 6$. Logo, $a = 6 + 3 \Rightarrow a = 9$.

5 Sejam os dois números **x** e **y**, então $x + y = 40$ e $x - y = 20$.

Se $x = 20$ e $y = 20$, $x + y = 40$, mas $x - y = 0$.

Se $x = 25$ e $y = 15$, $x + y = 40$, mas $x - y = 10$.

Se $x = 30$ e $y = 10$, $x + y = 40$ e $x - y = 20$. Assim, os números são 30 e 10.

6 Por tentativas, conclui-se que Maria tinha R$ 31,00, e João, R$ 19,00. Se Maria tem R$ 12,00 a mais que João, então dos R$ 50,00 é preciso tirar R$ 12,00, assim retira-se a diferença entre eles. Em seguida, reparte-se igualmente o que sobrou (R$ 38,00), dando R$ 19,00 para cada um. Depois, junta-se os R$ 12,00 a mais da Maria.

Atividade 2 - Desafios com números

1

a) 7 e 3. Se a soma é 10 e a diferença é 4, não convém começar com 5 e 5, já que a diferença será 0. Assim, pode-se pensar em 6 e 4, em que $6 + 4 = 10$, mas $6 - 4 = 2$. Passa-se então para 7 e 3, em que $7 + 3 = 10$ e $7 - 3 = 4$, encontrando o que se pede.

b) 13 e 7. Do mesmo modo, não convém começar com 10 e 10. Pode-se pensar em 11 e 9, cuja soma é 20, mas $11 - 9 = 2$. Como a diferença está distante de 6, passa-se a 13 e 7, cuja soma também é 20 e $13 - 7 = 6$, que atende às duas condições.

HORA DA CHECAGEM

2

a) 23 e 12 b) 128 e 48 c) 3 e −1 d) $\frac{15}{2}$ e $\frac{5}{2}$

3 Resposta pessoal. Você deve refletir e registrar como pensou para resolver o exercício.

Atividade 3 – Equações com duas incógnitas

1

a) $3 \cdot 0 + 4y = 36 \Rightarrow 0 + 4y = 36 \Rightarrow y = 9$

b) $3 \cdot 2 + 4y = 36 \Rightarrow 6 + 4y = 36 \Rightarrow 4y = 30 \Rightarrow y = 7{,}5$

c) $3 \cdot 8 + 4y = 36 \Rightarrow 24 + 4y = 36 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$

d) $3 \cdot 12 + 4y = 36 \Rightarrow 36 + 4y = 36 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0$

e) $3 \cdot 20 + 4y = 36 \Rightarrow 60 + 4y = 36 \Rightarrow 4y = -24 \Rightarrow y = -6$

2

a) $3 \cdot 0 - 2 \cdot 12 = -24$, portanto (0, 12) não é solução para a equação.

b) $3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0$, portanto (4, 6) não é solução para a equação.

c) $3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 18 - 8 = 10$, portanto (6, 4) não é solução para a equação.

d) $3 \cdot 12 - 2 \cdot 6 = 36 - 12 = 24$, assim, (12, 6) é solução para a equação.

e) $3 \cdot 8 - 2 \cdot 0 = 24$, assim, (8, 0) é solução para a equação.

Desafio

Alternativa correta: **c**. Você pode notar que o número de horas sempre corresponde a 3 vezes o número de dias, isto é, $h = d \cdot 3$ ou $h \div 3 = d$.

Registro de dúvidas e comentários

TEMA 2

Métodos de resolução de um sistema de equações

Neste Tema, você aprenderá a identificar a formação de pares ordenados como solução de sistema de equações, e também a resolver sistemas de equações usando os métodos de substituição, adição e subtração.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você conhece alguém que abriu algum negócio com mais um sócio?

Suponha que os dois sócios aplicaram quantias diferentes para abrir o negócio, como eles vão dividir o lucro obtido respeitando o que cada um investiu?

Esse tipo de situação é bem comum, não? Muitas vezes é possível chegar à solução aritmeticamente, porém, se for usar equações, você precisará de um sistema de equações.

Métodos de resolução

Há vários métodos para a resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Uma característica comum a eles são as transformações algébricas que eliminam uma das incógnitas. Veja a aplicação desses métodos na resolução de problemas.

Método da substituição

João e José usaram suas economias e o dinheiro do Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) para abrir uma pequena empresa, obtendo R$ 24.000,00. Descubra quanto cada um utilizou nessa sociedade, sabendo que João contribuiu com R$ 4.000,00 a mais do que José.

Para facilitar os cálculos, você pode utilizar 24 e 4 em vez de 24 mil e 4 mil.

Para resolver esse problema, pode-se equacionar as informações considerando a quantia que João usou na sociedade como **x** e a parte de José como **y**:

$$\begin{cases} x + y = 24 \ \text{(I)} & \text{A soma do capital dos dois sócios é 24 mil.} \\ x - y = 4 \ \text{(II)} & \text{João contribuiu com 4 mil a mais que José.} \end{cases}$$

Da equação (II), pode-se isolar o **x**, obtendo uma nova equação:

$$\text{(III) } x = 4 + y$$

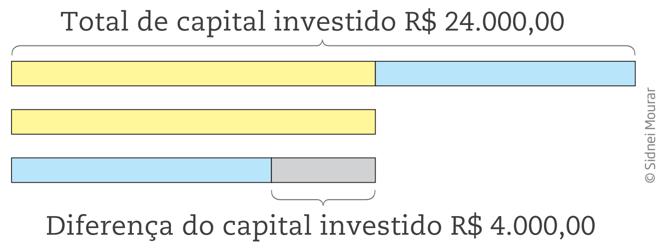
Substituindo (III) em (I), ou seja, trocando **x** por 4 + y, tem-se:

$(4 + y) + y = 24$ $4 + 2y = 24$	Eliminando os parênteses e reduzindo os termos semelhantes.
$2y = 24 - 4$	Isolando a variável **y**.
$2y = 20$ $y = 10$	Dividindo ambos os membros por 2.

Assim, conclui-se que José contribuiu com R$ 10.000,00.

Substituindo y = 10 em (III), tem-se: $x = 4 + 10 = 14$.

Portanto, na sociedade, a parte de João correspondeu a R$ 14.000,00. Veja, ao lado, um esquema que representa a situação.



Relembre os passos da resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas pelo método da substituição.

- Isole uma das variáveis em uma das equações.
- Substitua essa variável na outra equação pela expressão equivalente.
- Resolva a equação que tem apenas uma variável.
- Substitua o valor encontrado em uma equação que tenha as duas variáveis.

Veja mais um exemplo de aplicação do método da substituição.

$$\begin{cases} x - 5y = 10 & \text{(I)} \\ 3x + y = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando **x** em (I), obtém-se a equação: $x = 10 + 5y$.

Substituindo **x** em (II), tem-se: $3(10 + 5y) + y = 14$.

$3(10 + 5y) + y = 14$ $30 + 15y + y = 14$	Aplicando a propriedade distributiva.
$30 + 16y = 14$	Reduzindo os termos semelhantes para obter uma equação de 1º grau com uma incógnita.
$16y = 14 - 30$	Isolando o termo **y** no primeiro membro da equação.
$16y = -16$ $y = -\frac{16}{16}$ $y = -1$	Dividindo ambos os membros por 16.

Substituindo **y** por (–1) na equação x = 10 + 5y, obtém-se o valor de **x**. Assim, $x = 10 + 5 \cdot (-1) = 10 - 5 = 5$. Portanto, o par ordenado (5, –1) é a solução para o sistema.

No método da substituição, o importante é eliminar uma das incógnitas para se obter uma equação de 1º grau com apenas uma incógnita. Esse princípio também é utilizado no método da adição e no método da subtração.

Método da adição

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 18 \ \text{(I)} \\ a - b = 6 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando as equações (I) e (II), veja que **b** e **–b** são anulados:

$$\begin{array}{rl} & a + \cancel{b} = 18 \\ + & a - \cancel{b} = 6 \\ \hline & 2a \quad = 24 \end{array}$$

Logo, $a = \dfrac{24}{2} \Rightarrow a = 12$.

Substituindo **a** por 12 em qualquer uma das equações, obtém-se b = 6. Verifique:

$a + b = 18 \Rightarrow 12 + b = 18 \Rightarrow b = 18 - 12 \Rightarrow b = 6$

$a - b = 6 \Rightarrow 12 - b = 6 \Rightarrow b = 12 - 6 \Rightarrow b = 6$

Portanto, o par ordenado (12, 6) satisfaz as equações (I) e (II).

Acompanhe outro exemplo de aplicação do método de adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \ \text{(I)} \\ 2x - 3y = -19 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando as equações (I) e (II), note que 3y e –3y são anulados:

$$\begin{array}{rl} & 2x + \cancel{3y} = 11 \\ + & 2x - \cancel{3y} = -19 \\ \hline & 4x \quad\quad = -8 \end{array}$$

Então, $4x = -8 \Rightarrow x = -2$.

Substituindo **x** por –2 em uma das equações, obtém-se y = 5.

Verifique:

$2x + 3y = 11 \Rightarrow 2 \cdot (-2) + 3y = 11 \Rightarrow 3y = 11 + 4 \Rightarrow y = 5$

$2x - 3y = -19 \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 3y = -19 \Rightarrow 3y = 19 - 4 \Rightarrow y = 5$

Portanto, o par ordenado (–2, 5) satisfaz as duas equações.

Método da subtração

Confira o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \quad (I) \\ 3x - 2y = 13 \ (II) \end{cases}$$

Note que a soma das equações (I) e (II) resulta na equação (III): $6x + 2y = 14$. Ou seja, o método da adição não foi capaz de eliminar as variáveis, pois a equação (III) continua com as duas incógnitas **x** e **y**.

Entretanto, se a equação (II) for subtraída da (I), a variável **x** será eliminada. Essa estratégia é chamada método da subtração.

Retome o sistema apresentado anteriormente. Subtraindo a equação (II) da equação (I):

$$\begin{array}{rr} & \cancel{3x} + 4y = 1 \\ - & \cancel{3x} - 2y = 13 \\ \hline & 6y = -12 \end{array}$$

Nesse exemplo, foi usada a regra de sinais: $4y - (-2y) = 4y + 2y = 6y$. Lembre: subtrair equivale a adicionar o oposto.

Resolvendo a equação de 1º grau:

$$6y = -12 \Rightarrow y = -2$$

Aqui, também se usou a regra de sinais: dividindo –12 por +6, o resultado é –2.

Substituindo **y** por –2 em uma das equações, obtém-se $x = 3$.

Verifique:

$3x + 4y = 1 \Rightarrow 3x + [4 \cdot (-2)] = 1 \Rightarrow 3x = 1 + 8 \Rightarrow x = 3$

$3x - 2y = 13 \Rightarrow 3x - [2 \cdot (-2)] = 13 \Rightarrow 3x = 13 - 4 \Rightarrow x = 3$

Portanto, o par ordenado (3, –2) é a solução do sistema.

O método da adição e o método da subtração são semelhantes, pois, por meio de transformações algébricas nas equações, uma das variáveis é eliminada e uma equação de 1º grau é gerada.

ATIVIDADE 1 Resolução de sistemas

1 Encontre a solução dos sistemas pelo método da substituição:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -w + v = 5 \\ 2w - v = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2m + 3n = 4 \\ m + n = 2 \end{cases}$

2 Use o método da adição ou o método da subtração para resolver os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 2y = 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

3 Descubra dois números cuja soma é 70 e a diferença é 24. Use um dos métodos, adição ou subtração, para encontrar a resposta.

4 Escreva uma equação equivalente a cada equação a seguir:

a) $3x - 5z = 8$

b) $\frac{3x}{2} + \frac{7y}{2} = 5$

c) $b - a = 25$

5 Se $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 7 \end{cases}$, qual é o valor numérico das expressões a seguir?

a) $2x + 3y$

b) $-2x + y$

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

6 Resolva o sistema por meio de transformações algébricas para eliminar uma das variáveis.

$$\begin{cases} 2a + 3b = 7 \\ -3a + 5b = -1 \end{cases}$$

Aplicações e problemas práticos

Estudar os métodos para a resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas é útil para uma variedade de problemas práticos no comércio, na indústria, nas ciências e em outras situações do dia a dia.

Veja um exemplo:

Um estacionamento cobra um preço fixo de R$ 3,00 por moto e R$ 10,00 por carro. Ao final do dia, o funcionário do estacionamento obteve R$ 790,00 por um total de 100 veículos. Quantas motos e quantos carros usaram o estacionamento nesse dia?

© Daniel Beneventi

Acompanhe a resolução do problema:

Utilizando **m** para o número de motos e **c** para o número de carros, você obtém o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3m + 10c = 790 & \text{(I)} \\ m + c = 100 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando **c** na equação (II): c = 100 – m.

Substituindo **c** por 100 – m na equação (I):

$$3m + 10c = 790 \Rightarrow 3m + 10 \cdot (100 - m) = 790 \Rightarrow 3m + 1.000 - 10m = 790 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7m = 1.000 - 790 \Rightarrow 7m = 210 \Rightarrow m = \frac{210}{7} \Rightarrow m = 30$$

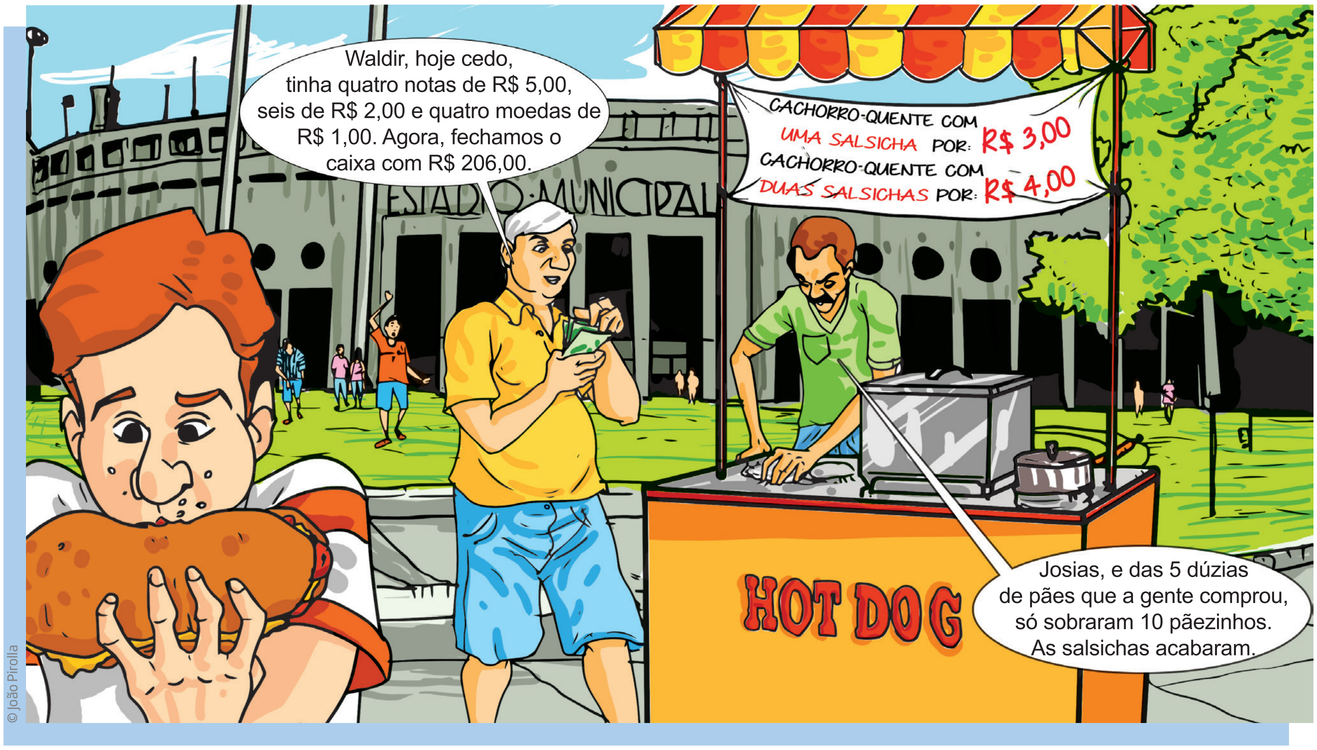
Logo, o número de motos é 30. Substituindo **m** por 30 na equação c = 100 – m:

$c = 100 - 30 \Rightarrow c = 70$. Então, o número de carros é 70.

Nesse dia, o estacionamento recebeu 30 motos e 70 carros.

ATIVIDADE 2 Resolvendo problemas práticos

1 Com base no que você estudou sobre sistemas de equações, resolva o problema sobre a sociedade de Josias e Waldir, apresentado no início da Unidade. Reveja a promoção lançada pelos dois:



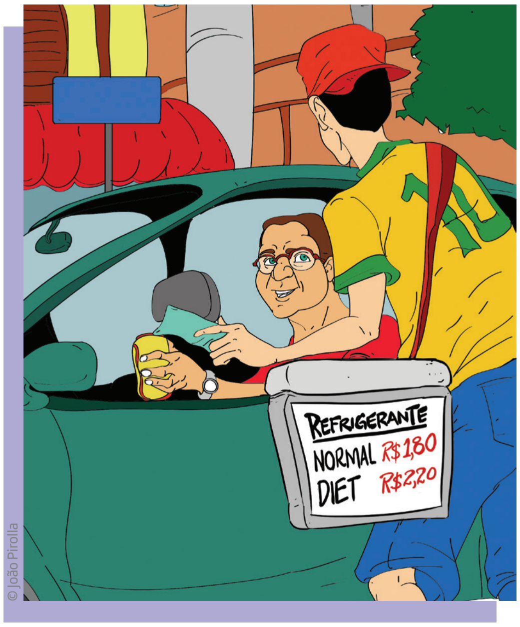
a) Qual foi o valor total obtido com a venda dos dois tipos de lanche? Justifique.

b) Quantos pães foram consumidos?

c) Determine quantas salsichas foram consumidas e quantos lanches de cada tipo foram vendidos.

2 Um restaurante cobra R$ 2,00 pela garrafa de água sem gás e R$ 3,00 pela de água com gás. Ao final de um mês, 1.000 garrafas foram vendidas, o que gerou um faturamento de R$ 2.400,00. Quantas garrafas de água de cada tipo foram vendidas? Qual foi o faturamento obtido com a venda de cada tipo de água?

3 Um vendedor ambulante resolveu fazer a promoção retratada na imagem ao lado:



© João Pirolla

Sabendo que, ao longo de um dia de promoção, foram vendidas 42 latas de refrigerante, gerando R$ 83,60, responda às perguntas a seguir:

a) Qual foi o tipo de refrigerante que vendeu mais?

b) Quanto foi arrecadado com a venda de cada tipo de refrigerante?

4 Depois de ter plantado milho e feijão, um agricultor colheu 6.600 sacas de grãos. Essas sacas foram vendidas por R$ 141.000,00, com o preço da saca de milho a R$ 9,00 e o da saca de feijão a R$ 60,00. Quantas sacas de milho foram vendidas? E quantas de feijão?

5 Em um *show* beneficente, as entradas custavam R$ 20,00 para estudantes, idosos e aposentados, e R$ 30,00 para os demais espectadores. O *show* foi um sucesso e, com 600 entradas vendidas, os organizadores arrecadaram R$ 15.500,00. Quantos espectadores pagaram pelo preço normal e quantos pelo preço reduzido?

DESAFIO

Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$ 7,20. Danilo comprou 2 canetas e 1 lápis pagando R$ 4,40. O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7{,}20 \\ 2x + y = 4{,}40 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7{,}20 \\ 2x - y = 4{,}40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3{,}60 \\ x - y = 2{,}20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 7{,}20 \\ x + y = 4{,}40 \end{cases}$

Prova Brasil 2011. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/downloads/simulado/2011/prova_modelo_9ano.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

PENSE SOBRE...

Fazendo uma analogia com o que você viu até agora em Matemática, é possível dizer que, no Brasil e em muitos outros lugares do mundo, existem muitas “equações com inúmeras variáveis”. Uma das mais importantes é a solução dos direitos sociais, que, apesar de garantidos em nossa Constituição Federal promulgada em 1988, não são usufruídos por todos os cidadãos. Embora os políticos, eleitos por nós, sejam responsáveis pela transformação da realidade brasileira, toda a população também o é, pois deve exigir que esses direitos sejam universais e que tenham qualidade.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Resolução de sistemas

1

a) Isole o **y** na 1ª equação ($y = 2x - 3$) e substitua o seu valor na 2ª equação: $3x + (2x - 3) = 3$. Então, resolva: $3x + 2x = 3 + 3 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$. Voltando à equação $y = 2x - 3 \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{6}{5} - 3 \Rightarrow \frac{12 - 15}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -\frac{3}{5}$, portanto $S = \left\{\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$.

b) Isole o **v** na 1ª equação ($v = 5 + w$) e substitua o seu valor na 2ª equação: $2w - (5 + w) = 2$. Então, resolva: $2w - w = 2 + 5 \Rightarrow w = 7$. Voltando à equação $v = 5 + w \Rightarrow v = 5 + 7 \Rightarrow v = 12$, portanto $S = \{(7, 12)\}$.

c) Isole o **m** na 2ª equação ($m = 2 - n$) e substitua o seu valor na 1ª equação: $2 \cdot (2 - n) + 3n = 4$. Então, resolva: $4 - 2n + 3n = 4 \Rightarrow n = 4 - 4 \Rightarrow n = 0$. Voltando à equação $m = 2 - n \Rightarrow m = 2 - 0 \Rightarrow m = 2$, portanto $S = \{(2, 0)\}$.

2

a) Adicionando as equações (I) e (II), note que y e –y são anulados:

$$
\begin{array}{rl}
 & x + \cancel{y} = 3 \\
+ & x - \cancel{y} = 9 \\
\hline
 & 2x \quad = 12
\end{array}
$$

Então, $2x = 12 \Rightarrow x = 6$. Substituindo **x** por 6 em uma das equações, você encontrará $y = -3$. A resposta do sistema é $S = \{(6, -3)\}$.

b) Subtraindo a equação (II) da (I), note que –2y e +2y são anulados:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x - \cancel{2y} = 12 \\
- & x - \cancel{2y} = 0 \\
\hline
 & x \qquad = 12
\end{array}
$$

Então, $x = 12$. Substituindo **x** por 12 em uma das equações, obtém-se $y = 6$. A resposta do sistema é $S = \{(12, 6)\}$.

c) Subtraindo a equação (II) da (I), note que x e –x são anulados:

$$
\begin{array}{rl}
 & \cancel{x} + y = 7 \\
- & \cancel{x} + 2y = 11 \\
\hline
 & -y = -11 + 7 \\
 & y = 4
\end{array}
$$

Então, y = 4. Substituindo **y** por 4 em uma das equações, você descobrirá que x = 3. A resposta do sistema é S = {(3, 4)}.

3 $\begin{cases} a + b = 70 \\ a - b = 24 \end{cases}$ Pelo método da adição, $2a = 94 \Rightarrow a = 47$. Substituindo o valor de **a** em uma das equações você vai descobrir que b = 23.

Pelo método da subtração, $2b = 46 \Rightarrow b = 23$. Substituindo o valor de **b** em uma das equações, obtém-se a = 47.

4 Para gerar equações equivalentes, basta dividir ou multiplicar todos os termos da equação por um mesmo número ou, ainda, somar ou subtrair o mesmo número a ambos os termos da equação. Há infinitas possibilidades; logo, as respostas são pessoais. Veja alguns exemplos:

a) $6x - 10z = 16$, ao multiplicar toda a equação por 2, ou $9x - 15z = 24$, ao multiplicar toda a equação por 3.

b) $3x + 7y = 10$, ao multiplicar toda a equação por 2.

c) b = 25 + **a**, ao somar **a** a ambos os termos da equação.

5 Para chegar às respostas, primeiro é preciso resolver o sistema de equações para encontrar os valores de **x** e **y**. Usando o método da adição, tem-se 2x = 17, portanto $x = \frac{17}{2}$. Substituindo o valor de **x** na primeira equação, tem-se $\frac{17}{2} + y = 10$, portanto $y = \frac{20}{2} - \frac{17}{2} = \frac{3}{2}$. Esses valores serão os usados em cada expressão.

a) $2 \cdot \frac{17}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{34}{2} + \frac{9}{2} = \frac{43}{2}$

b) $-2 \cdot \frac{17}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{34}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{31}{2}$

c) $\frac{17}{4} + \frac{3}{6} = \frac{17}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{4} + \frac{2}{4} = \frac{19}{4}$

6 Ao multiplicar (I) por 3 e (II) por 2 obtém-se $\begin{cases} 6a + 9b = 21 \\ -6a + 10b = -2 \end{cases}$ e, ao somar as duas novas equações, elimina-se a variável **a**.

$19b = 19 \Rightarrow b = 1$, substituindo em (I), tem-se que $2a + 3 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 2a = 7 - 3 = 4 \Rightarrow a = 2$.

S = {(2, 1)}

Atividade 2 - Resolvendo problemas práticos

1

a) O total arrecadado com os lanches é igual ao valor que eles tinham no final do dia (R$ 206,00) menos o valor que eles tinham no começo do dia (quatro notas de R$ 5,00, seis notas de R$ 2,00 e quatro moedas de R$ 1,00):

$t = 206 - (4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 206 - (20 + 12 + 4) = 206 - 36 = 170$

b) Se eles compraram cinco dúzias de pães e sobraram 10, sabendo que uma dúzia equivale a 12 unidades, tem-se que:

$p = 5 \cdot 12 - 10 = 60 - 10 = 50$ pães consumidos.

c) Se **x** corresponde à quantidade de lanches com 1 salsicha, e **y**, à de lanches com 2 salsichas, então $x + y$ equivale ao total de lanches vendidos.

Como cada lanche leva apenas 1 pão, $x + y = 50$, pois foram vendidos 50 lanches no total, conforme você descobriu no item **b**.

O valor arrecadado equivale a $3x + 4y = 170$, que você já descobriu no item **a**.

Portanto, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 170 & \text{(I)} \\ x + y = 50 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando o **x** na equação II, tem-se que $x = 50 - y$. Substituindo a expressão de **x** na equação I, tem-se $3(50 - y) + 4y = 170 \Rightarrow 150 - 3y + 4y = 170 \Rightarrow y = 20$.

Com o valor de **y**, agora é possível descobrir quanto vale **x** usando qualquer uma das equações: $x + 20 = 50 \Rightarrow x = 50 - 20 \Rightarrow x = 30$.

Dessa forma, você descobriu que foram vendidos 30 lanches com 1 salsicha e 20 lanches com 2 salsichas, portanto, foram consumidas $30 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 30 + 40 = 70$ salsichas.

2 Chamando a água sem gás de **a** e a água com gás de **b**, pode-se montar duas equações: $a + b = 1.000$ e $2a + 3b = 2.400$. Usando o método da substituição, tem-se $a = 1.000 - b$. Substituindo o **a** na 2ª equação: $2 \cdot (1.000 - b) + 3b = 2.400 \Rightarrow -2b + 3b = 2.400 - 2.000 \Rightarrow b = 400$ (água com gás). Substituindo **b** na equação $a = 1.000 - b$, encontra-se que $a = 600$ (água sem gás). Portanto, foram vendidas 600 garrafas de água sem gás e 400 de água com gás. O faturamento obtido com a venda de cada uma delas foi de R$ 1.200,00.

3 Chamando o refrigerante normal de **t** e o refrigerante *diet* de **d**, é possível montar duas equações: $t + d = 42$ e $1{,}8t + 2{,}2d = 83{,}60$. Usando o método da substituição, tem-se $t = 42 - d$.

Substituindo o **t** na segunda equação:

$1{,}8 \cdot (42 - d) + 2{,}2d = 83{,}60 \Rightarrow -1{,}8d + 2{,}2d = 83{,}60 - 75{,}60 \Rightarrow d = \dfrac{8}{0{,}4} \Rightarrow d = 20$ (refrigerante *diet*).

Substituindo **d** na equação $t = 42 - d$, você descobre que $t = 22$ (refrigerante normal), portanto:

a) O refrigerante normal foi o tipo mais vendido, com 22 latas. Já do refrigerante *diet* foram vendidas 20 latas.

b) O vendedor ambulante arrecadou R$ 39,60 com o refrigerante normal, enquanto com o *diet* ele faturou R$ 44,00.

4 Monta-se duas equações, chamando as sacas de milho de **m** e as de feijão de **f**: $m + f = 6.600$ e $9m + 60f = 141.000$. Usando o método da substituição, tem-se $m = 6600 - f$. Substituindo o **m** na 2ª equação: $9 \cdot (6.600 - f) + 60f = 141.000 \Rightarrow -9f + 60f = 141.000 - 59.400 \Rightarrow 51f = 81.600 \Rightarrow f = 1.600$. Substituindo **f** na equação $m = 6.600 - f$, encontra-se que $m = 5.000$, portanto foram vendidas 5.000 sacas de milho e 1.600 de feijão.

5 Se **x** corresponde ao número de espectadores que pagaram preço reduzido, e **y**, ao dos que pagaram o preço normal, então:

$$\begin{cases} x + y = 600 & \text{(I)} \\ 20x + 30y = 15.500 & \text{(II)} \end{cases}$$

Pode-se multiplicar a primeira equação por 30, para depois subtrair a segunda equação.

Fica $30x + 30y = 18.000$ (III).

Subtraindo (II) de (III), tem-se o seguinte:

$10x = 18.000 - 15.500 \Rightarrow x = 2.500 \div 10 \Rightarrow x = 250$

Portanto, $y = 600 - 250 = 350$.

Ou seja, 250 espectadores pagaram o preço reduzido, e 350 pagaram o preço normal.

Desafio

Alternativa correta: **a**. Ao representar a caneta por **x** e o lápis por **y**, tem-se que a equação que representa o gasto de Lucas é igual a $3x + 2y = 7{,}20$, e a que representa o gasto de Danilo, $2x + 1y = 4{,}40$.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

EQUAÇÕES E GRÁFICOS NA MATEMÁTICA E NO COTIDIANO

TEMAS

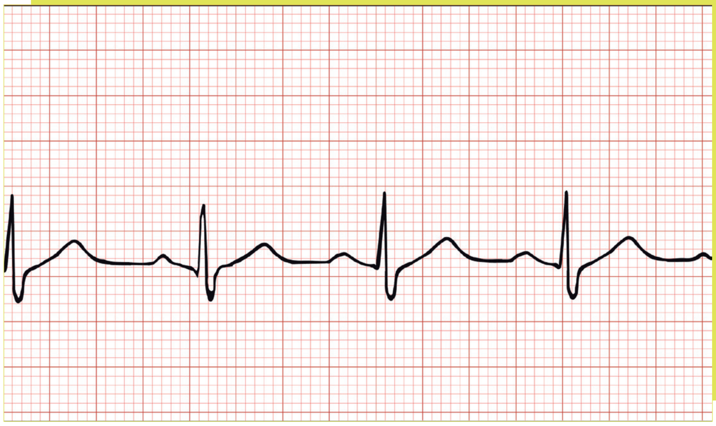
1. Equações, tabelas e gráficos
2. Representação gráfica

Introdução

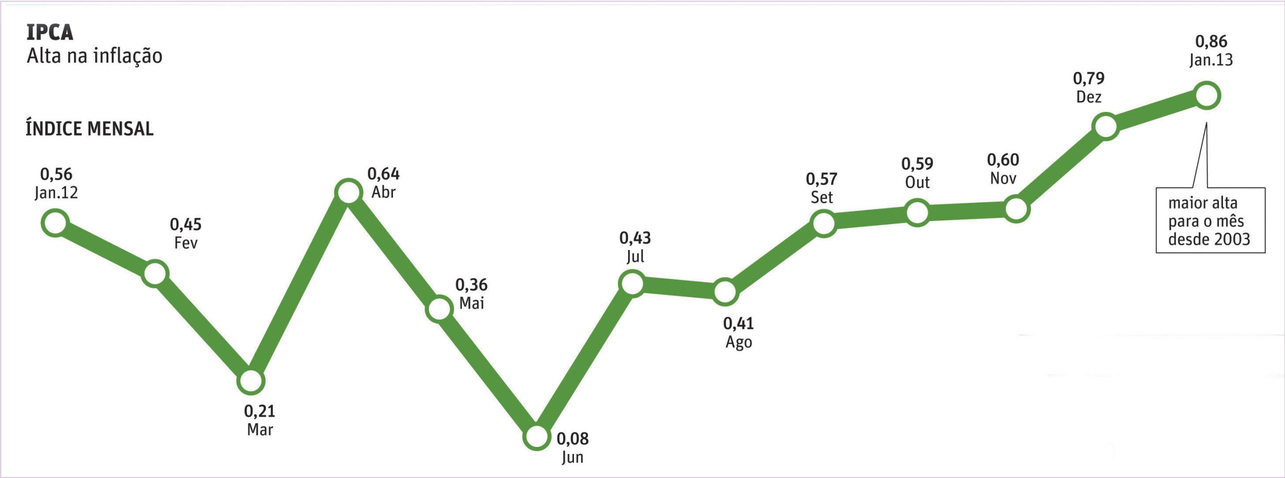
Nesta Unidade, você vai estudar um assunto que faz parte de muitas profissões, inclusive aquelas relacionadas aos meios de comunicação, que se utilizam de uma importante ferramenta matemática para divulgar informações a seus leitores e telespectadores: a relação entre equações e gráficos.

Muitos profissionais usam gráficos no dia a dia: eletricistas, engenheiros, economistas etc. Os médicos, por exemplo, utilizam gráficos quando avaliam se os batimentos cardíacos de seu paciente estão normais; os estoquistas, quando identificam quais produtos precisam de reposição no estoque; os economistas, quando analisam o cenário da economia e a variação dos salários dos trabalhadores; e os metalúrgicos, quando avaliam a resistência de determinada chapa de metal.

Eletrocardiograma (EGC).



© Olira/Dreamstime.com/Glow Images



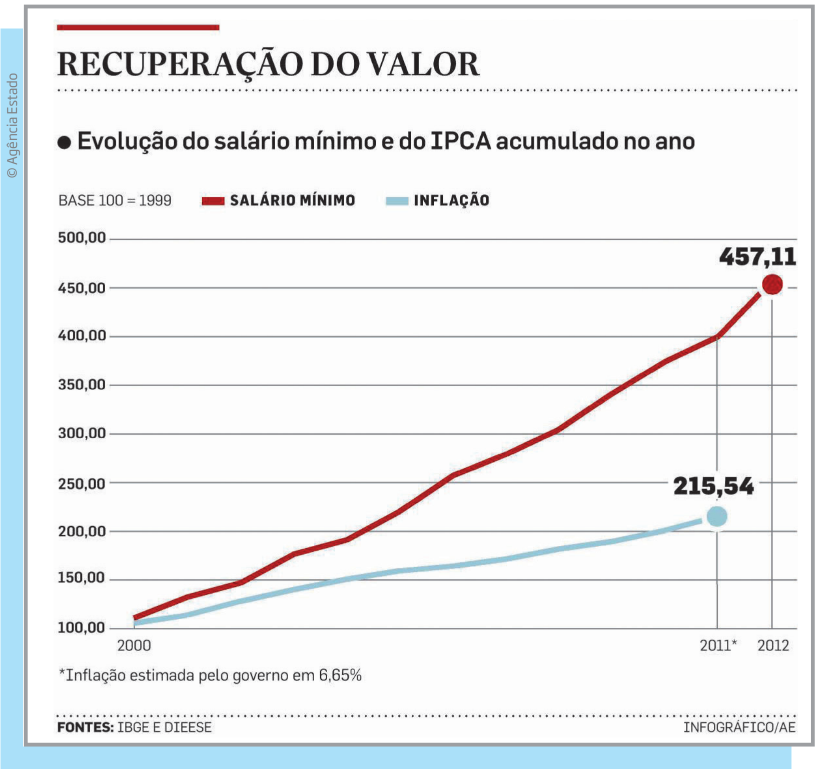
© Folhapress

Inflação dispara e acende alerta no BC. *Folha de S.Paulo*, Mercado, p. B1, 8 fev. 2013.

Neste Tema, você observará, analisará e aprenderá a utilizar sistemas de equações em gráficos, e ainda vai descobrir como reconhecer a variação de grandezas em um sistema de eixo cartesiano.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Observe o gráfico a seguir:



REHDER, Marcelo. Varejo já está de olho no aumento do mínimo. *O Estado de S. Paulo*, 28 nov. 2011. Disponível em: <http://digital.estadao.com.br/download/pdf/2011/11/28/ B3.pdf>. Acesso em: 19 maio 2014.

- Quais são as informações contidas nesse gráfico?
- Como você interpreta esses dados?

VOCÊ SABIA?

O termo *cartesiano* tem origem no nome do filósofo René Descartes.

No livro *Discurso do método* (1637), o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) desenvolveu um método que visava localizar e descrever pontos e figuras em uma rede de linhas, utilizando, para isso, letras e números. Mais tarde, essa rede de linhas ficou conhecida como plano cartesiano. O método de Descartes não é muito diferente do utilizado no sistema de localização do jogo “batalha naval”.

Das equações às tabelas e das tabelas aos gráficos

ASSISTA!

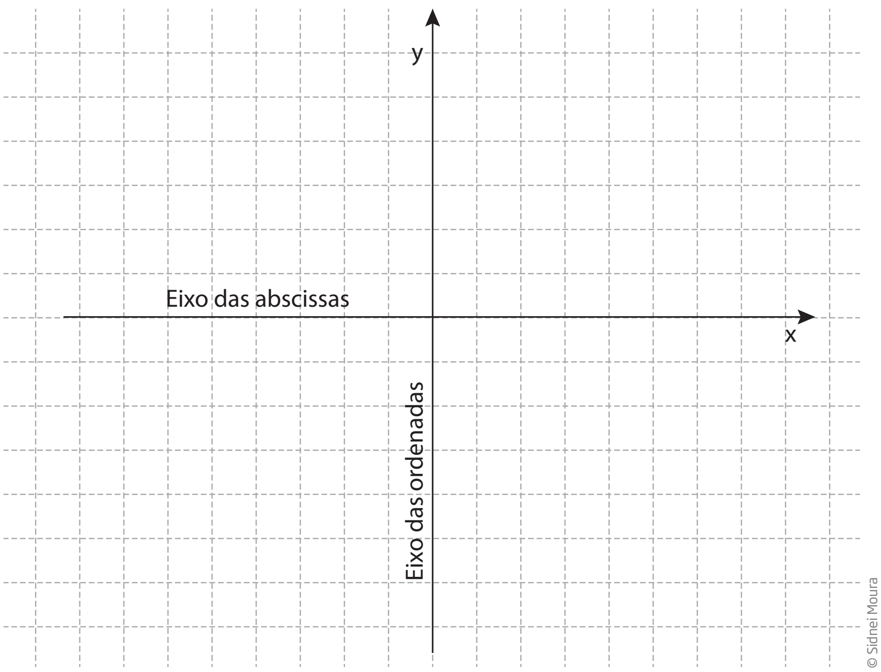
Matemática – Volume 4

Equações e gráficos

Um exame médico é o ponto de partida deste vídeo, que mostra o quanto equações e gráficos fazem parte do cotidiano, com aplicações tanto na Medicina como no setor financeiro. O eletrocardiograma, por exemplo, demonstra o pulsar do coração de forma gráfica. Os vários perfis de uma população ou um balanço de vendas, entre outros quadros numéricos, também são melhor observados quando dispostos em um gráfico.

As equações com duas variáveis, que você já estudou na Unidade 3 deste Volume, podem ser representadas graficamente. Tal representação, em geral, ocorre sobre um sistema de duas retas graduadas e perpendiculares, chamado **plano cartesiano**.

Existem dois eixos perpendiculares no plano cartesiano, nomeados pelos matemáticos como **eixo das abscissas** (x) e **eixo das ordenadas** (y).

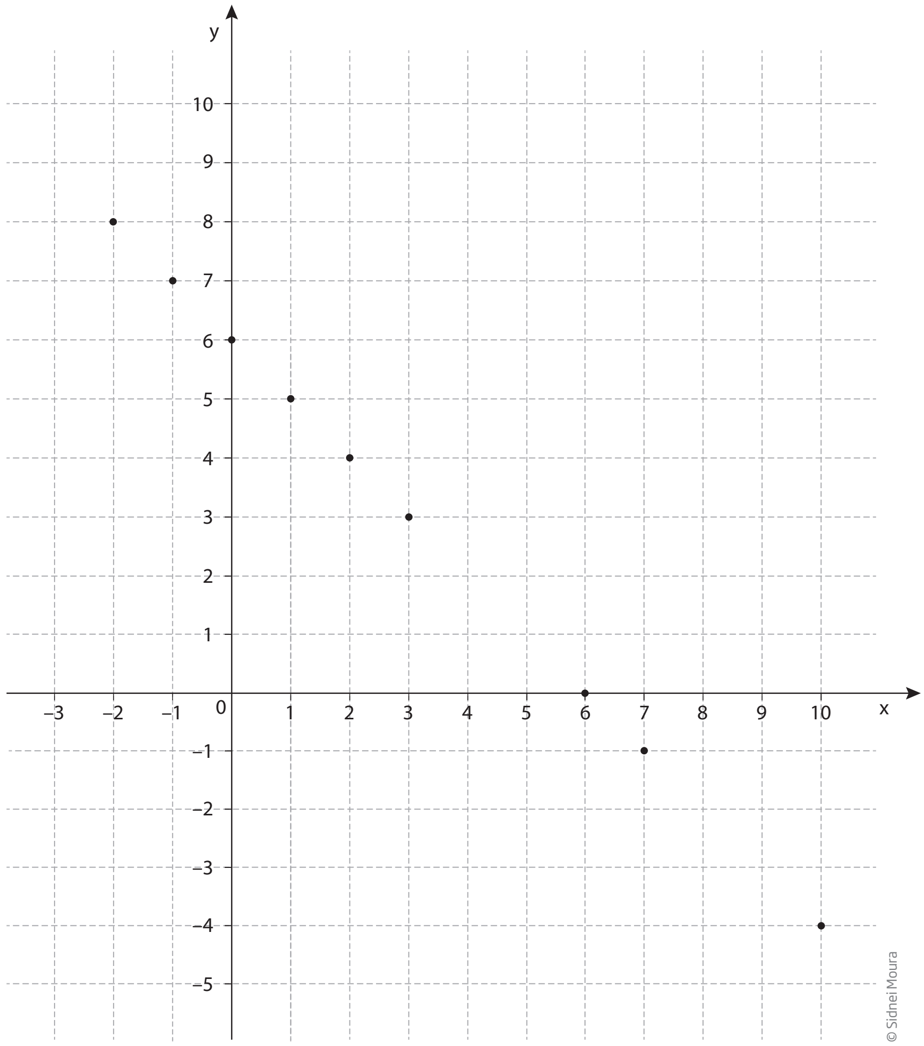


Por exemplo, para se obter a representação gráfica da equação x + y = 6, pode-se, em uma tabela, atribuir valores para uma das variáveis e calcular os valores correspondentes à outra. Assim, obtêm-se vários pares ordenados, que representam soluções para a mesma equação.

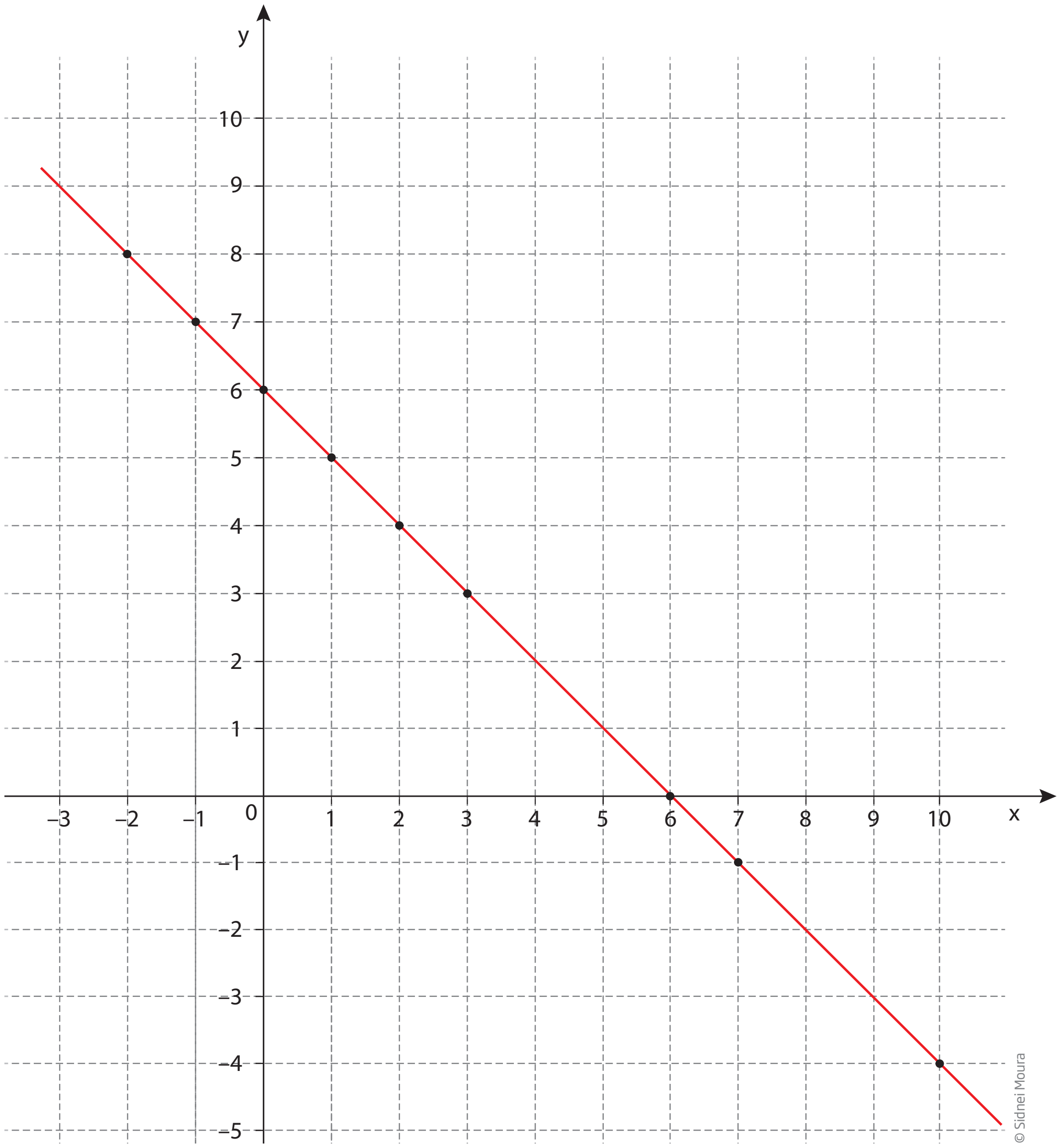
Lembre-se de que, se x + y = 6, então y = 6 – x.

x	y = 6 – x	(x, y)
10	– 4	(10, – 4)
7	–1	(7, –1)
6	0	(6, 0)
3	3	(3, 3)
2	4	(2, 4)
1	5	(1, 5)
0	6	(0, 6)
–1	7	(–1, 7)
–2	8	(–2, 8)
–14	20	(–14, 20)

Em seguida, no plano cartesiano, marcam-se os pontos para representar os valores obtidos na tabela:



Veja que é possível traçar uma reta ligando os pontos:



Observando a tabela e o gráfico, é possível afirmar o seguinte:

- Cada par ordenado, obtido pelos dados da tabela, corresponde a um ponto no gráfico.

- Há infinitos pares ordenados que satisfazem a equação $x + y = 6$, portanto, o gráfico da equação tem infinitos pontos.

- Todos os pontos do gráfico estão em uma reta.

- Apesar de não aparecer no gráfico, o ponto correspondente ao par ordenado $(-14, 20)$ certamente pertence à reta esboçada, pois, em uma equação do tipo $ax + by = c$, em que **a** e **b** são diferentes de zero, o gráfico é sempre uma reta.

ATIVIDADE 1 Trabalhando com retas e gráficos

1 Marque um ponto no quadro a seguir e trace várias retas passando por esse ponto. Quantas retas podem passar pelo ponto?

2 Marque dois pontos e trace uma reta passando por eles.

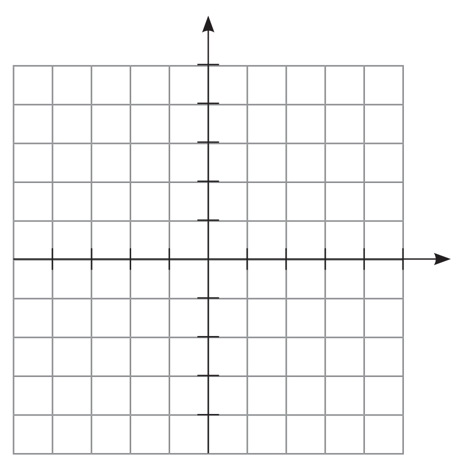
Quantas retas podem passar por esses dois pontos? Explique.

3 No plano cartesiano, marque o ponto (2, 5). Trace as seguintes retas que passam por ele:

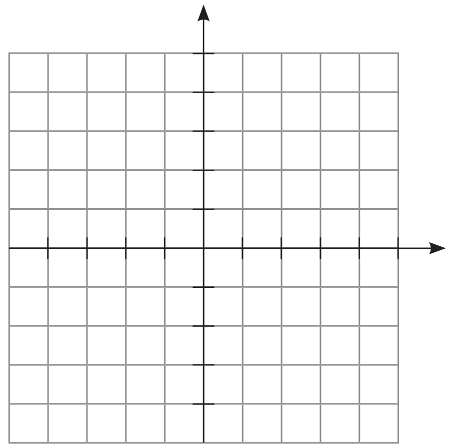
a) uma reta paralela ao eixo **x** (eixo das abscissas);

b) uma reta paralela ao eixo **y** (eixo das ordenadas);

c) uma reta que não seja paralela nem ao eixo **x** nem ao eixo **y**.



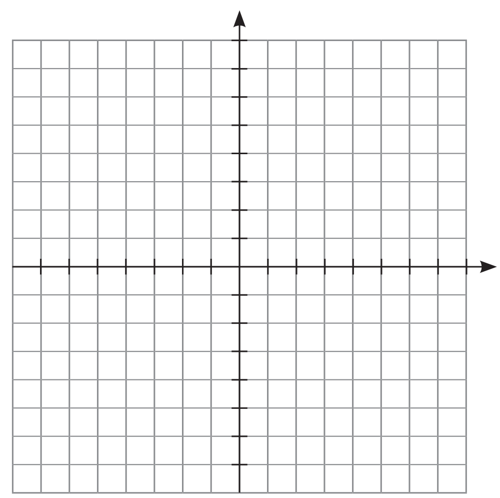
4 Marque, no plano cartesiano, os pontos (2, 2) e (5, 4). Por esses pontos, trace uma reta que contenha ambos os pontos.



5 Nas tabelas a seguir, atribua valores para **x** e **y** que satisfaçam as equações, descubra os pares ordenados e esboce o gráfico de cada equação:

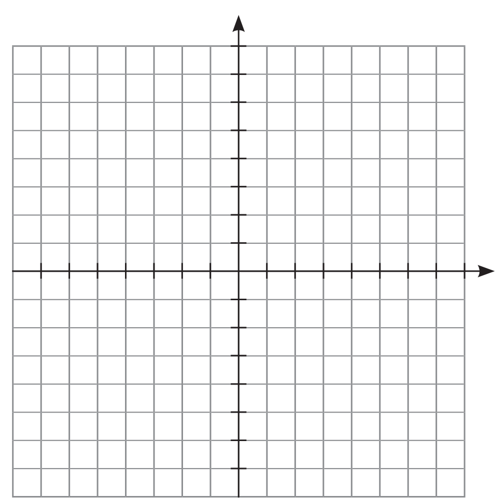
a) $x - y = 5$

x	y	(x, y)
3		
2		
1		
0		
–1		
–2		



b) $y = 2x$

x	y	(x, y)
3		
2		
1		
0		
–1		
–2		



Gráficos que são retas

Se, para traçar uma reta, bastam dois pontos, e o gráfico de uma equação de primeiro grau com duas variáveis, como as estudadas até aqui, é sempre uma reta, então é preciso encontrar apenas dois pontos para esboçar um gráfico. Para isso, é suficiente fazer uma tabela com duas linhas, pois cada linha corresponde ao cálculo de um par ordenado, que, por sua vez, determina um ponto da reta.

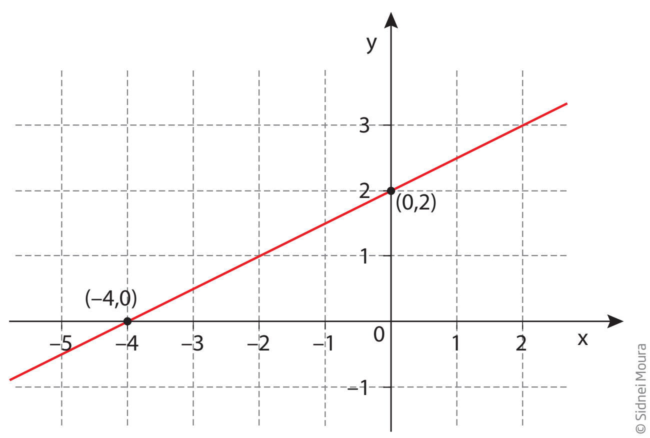
Veja como construir o gráfico da equação $2x - 4y = -8$. Para facilitar o cálculo, suponha que, primeiro, $x = 0$ e, depois, $y = 0$. Assim:

- se $x = 0$, então $y = 2$. Assim, um par ordenado é $(0, 2)$;
- se $y = 0$, então $x = -4$. Assim, outro par ordenado é $(-4, 0)$.

Observe a tabela:

x	y	
0	2	→ (0, 2)
–4	0	→ (–4, 0)

Em seguida, é preciso marcar esses pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles, como demonstrado a seguir:



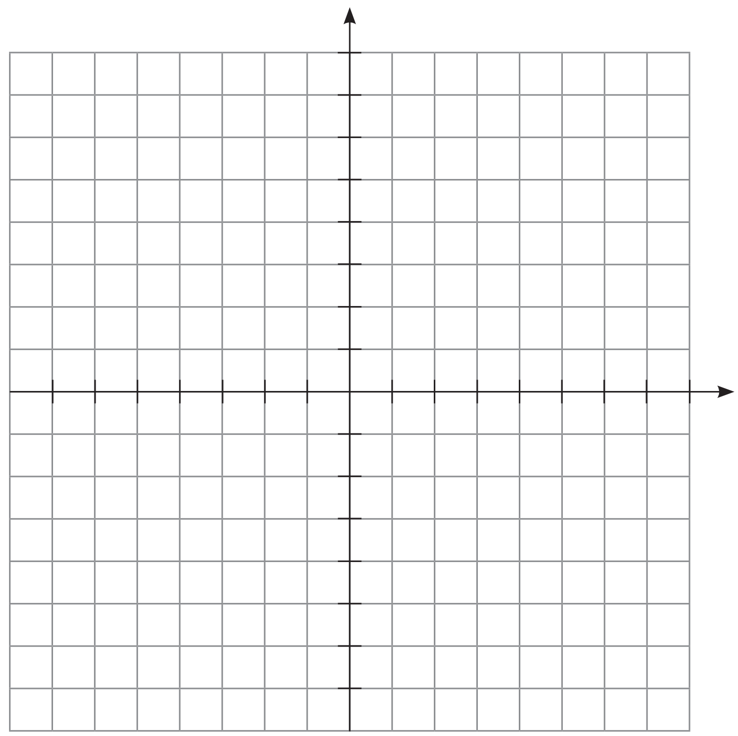
ATIVIDADE 2 Gráficos

1 Construa as tabelas e os respectivos gráficos das equações a seguir. Utilize o plano cartesiano para facilitar a localização dos pontos.

> Como os gráficos são retas, para construí-las, basta determinar dois pontos.

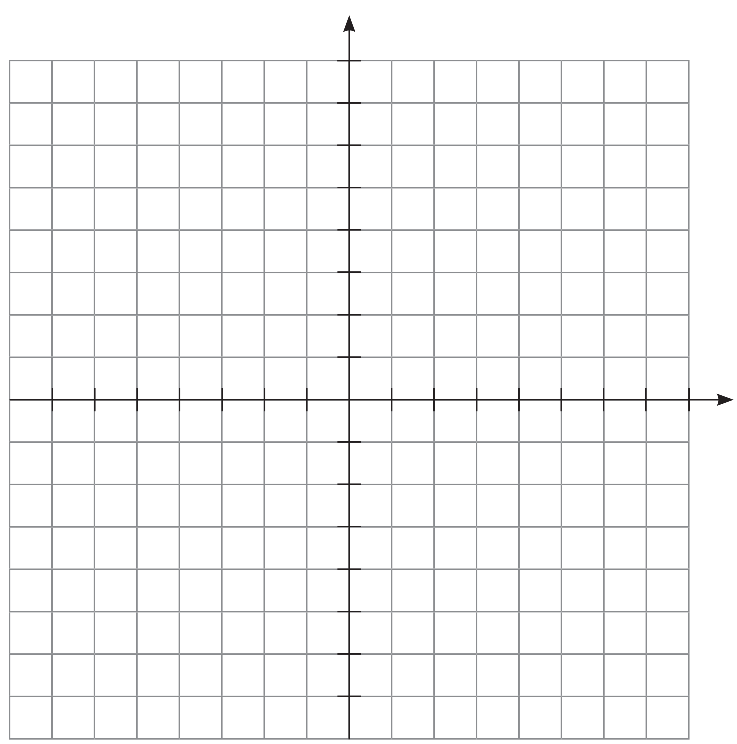
a) $x + y = 1$

x	y



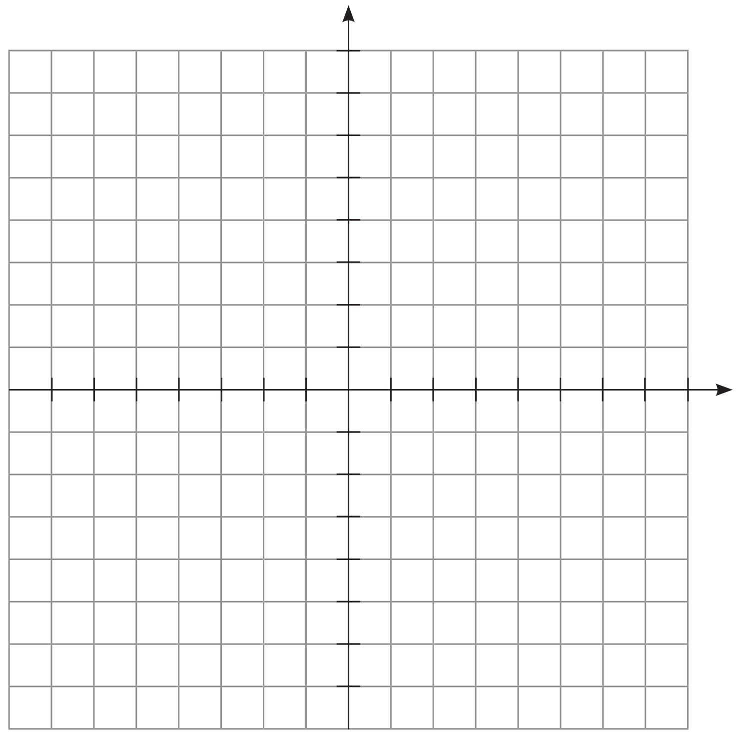
b) $2x + y = 5$

x	y



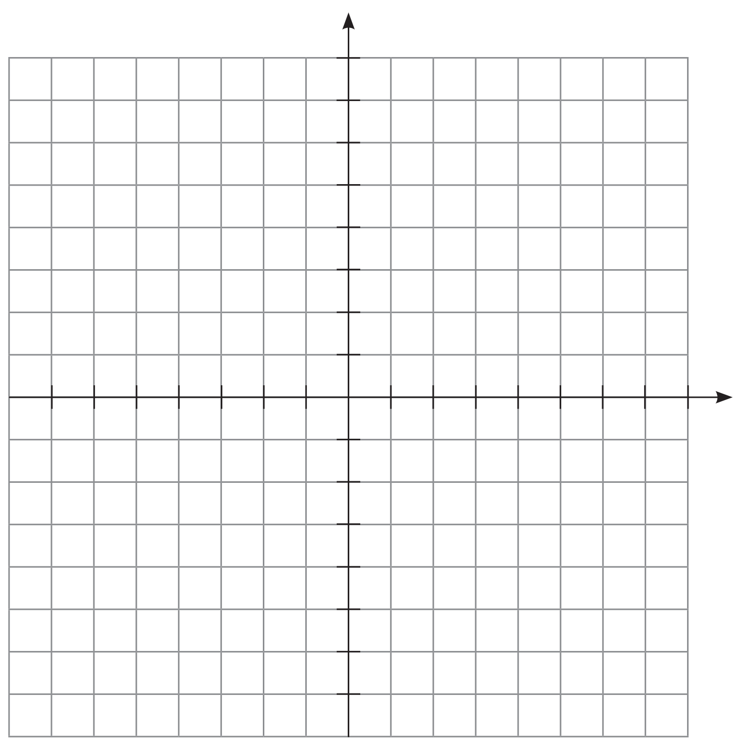
c) $x + 2y = 8$

x	y



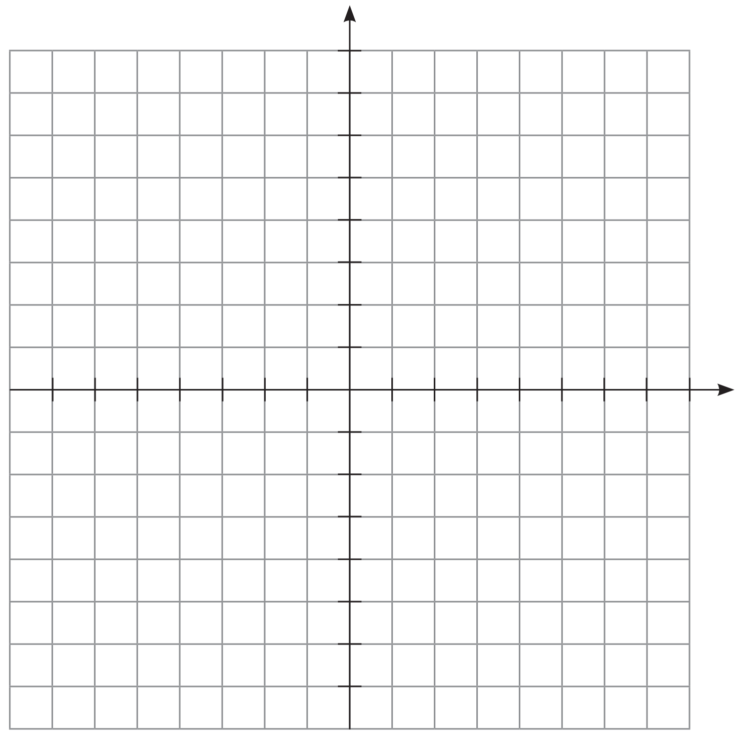
d) $x - y = 0$

x	y



e) $x + y = 0$

x	y



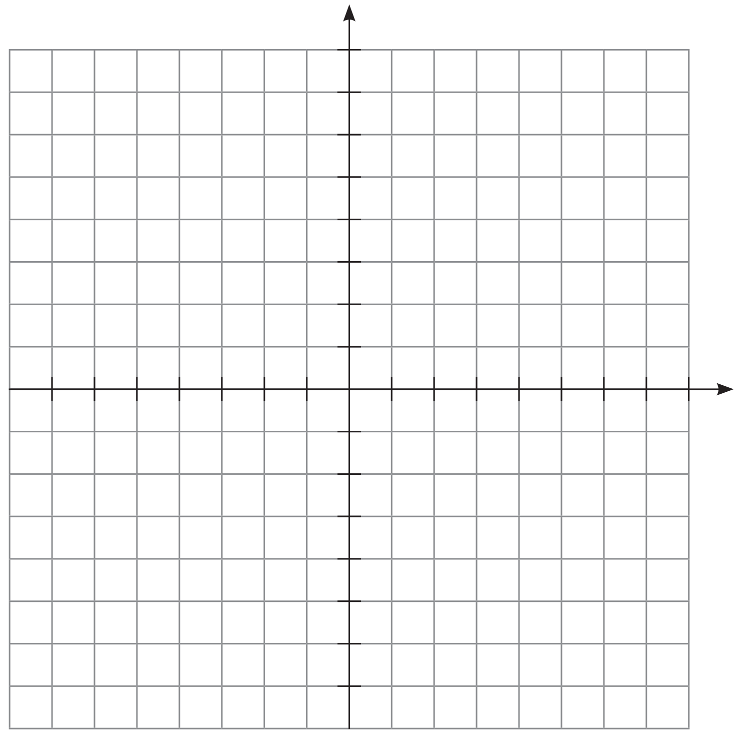
2 Sobre um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das equações:

a) $y = x$

b) $y = 2x$

c) $y = 3x$

d) $y = 4x$



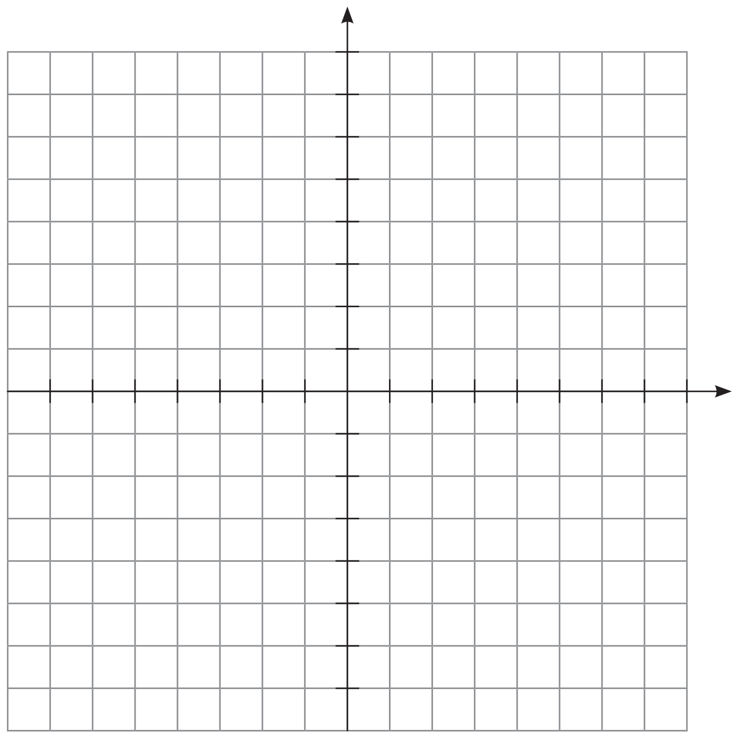
3 Construa, sobre um mesmo plano cartesiano, os gráficos das equações:

a) $y = 2x$

b) $y = 2x - 1$

c) $y = 2x + 1$

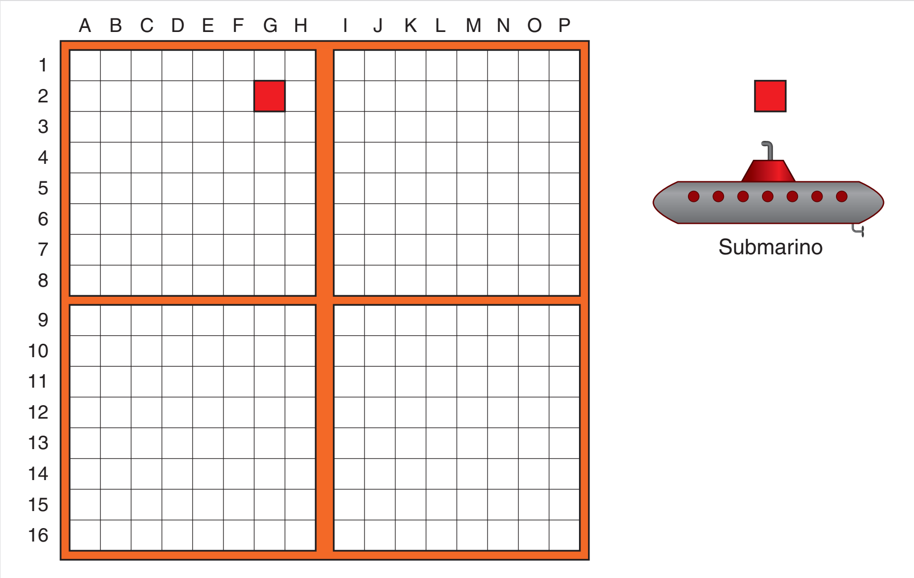
d) $y = 2x + 2$



4 Com base nos gráficos obtidos no item anterior, você observa alguma relação entre os pontos de intersecção de cada reta com o eixo **y** e os coeficientes das equações? Explique.

DESAFIO

Léo e Júlio estão jogando batalha naval. Em dado momento, só sobrou um submarino para Léo, na posição descrita na figura abaixo.



Para Júlio ganhar a partida, é preciso que sua jogada seja

a) A7 **b)** D10 **c)** F5 **d)** G2

Saresp 2012. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/3_Noite/Prova-MAT-8EF-Noite.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

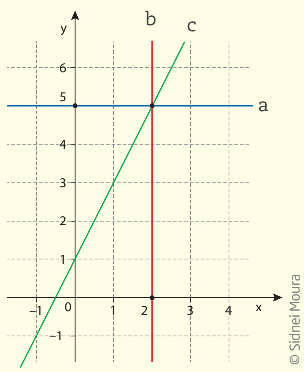
HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 – Trabalhando com retas e gráficos

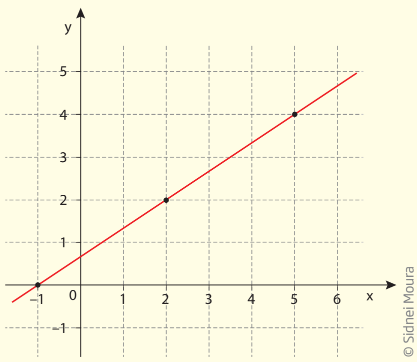
1 Infinitas retas podem passar pelo ponto.

2 Por dois pontos distintos passa uma única reta, pois qualquer outra que se tente passar ou coincide com a primeira ou não passa pelos dois pontos.

3

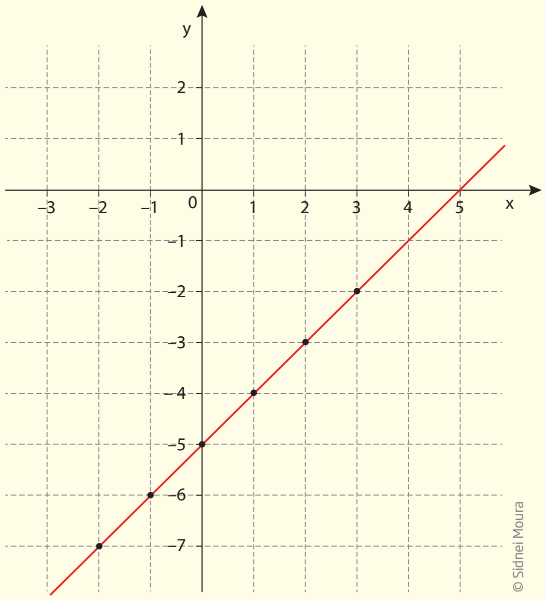


4



5

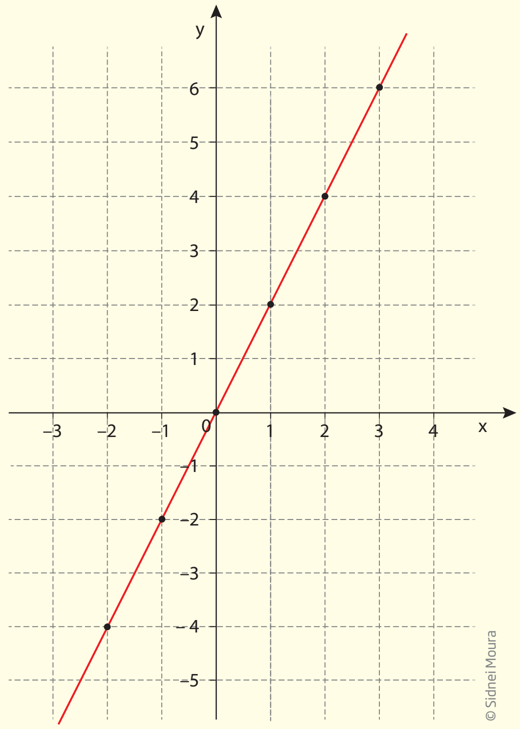
a) x – y = 5 ⇒ –y = 5 – x



x	y	(x, y)
3	–2	(3, –2)
2	–3	(2, –3)
1	–4	(1, –4)
0	–5	(0, –5)
–1	–6	(–1, –6)
–2	–7	(–2, –7)

Multiplicando todos os termos por (–1), chega-se a y = x – 5. Agora é só escolher um dos valores de **x** que há em cada linha da tabela, substituir na equação dada para obter o valor de **y**, e completar a tabela na linha correspondente. Repetindo esse procedimento, você vai obter vários pares ordenados que correspondam aos pontos para construir o gráfico da equação.

b)



x	y	(x, y)
3	6	(3, 6)
2	4	(2, 4)
1	2	(1, 2)
0	0	(0, 0)
–1	–2	(–1, –2)
–2	–4	(–2, –4)

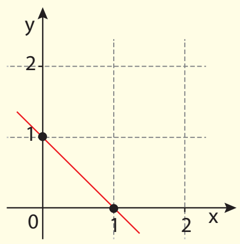
HORA DA CHECAGEM

Atividade 2 – Gráficos

1

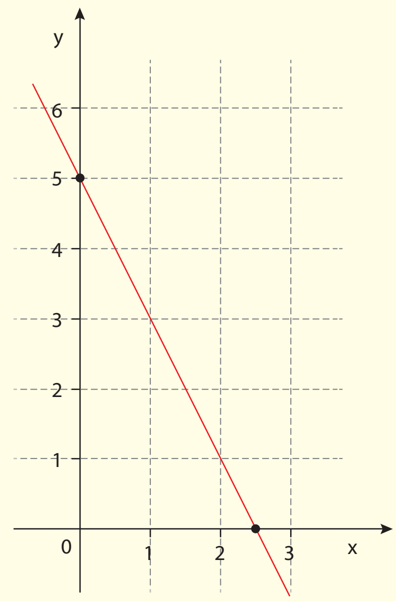
a)

x	y
0	1
1	0



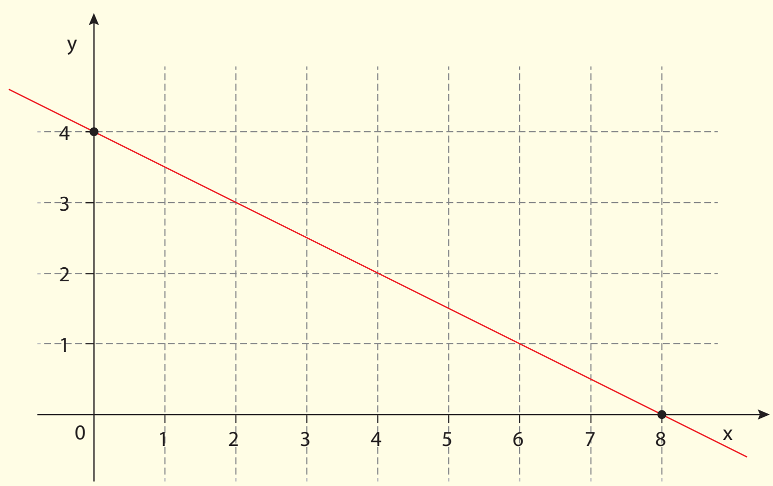
b)

x	y
0	5
2,5	0



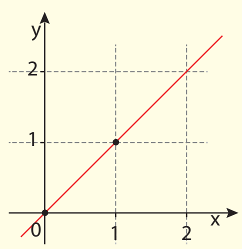
c)

x	y
0	4
8	0



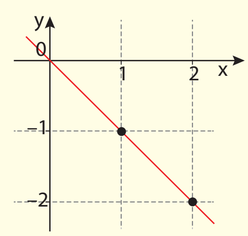
d)

x	y
0	0
1	1



e)

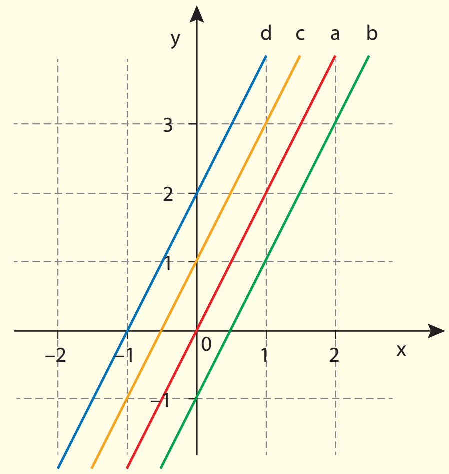
x	y
1	–1
2	–2



HORA DA CHECAGEM

2

3



Ilustrações: © Sidnei Moura

4 A ordenada do ponto de intersecção é exatamente o valor do termo independente de cada equação, ou seja, se a equação é $y = ax + b$, o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, b)$.

Desafio

Alternativa correta: **d**.

Registro de dúvidas e comentários

Agora você vai aprender a efetuar a resolução gráfica de um sistema de equações com duas incógnitas e a selecionar, a partir de uma situação proposta, o melhor e mais rápido método de resolução.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

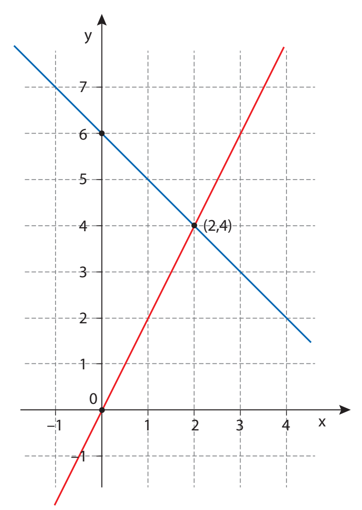
Ao realizar uma compra, você já precisou analisar qual forma de pagamento seria mais interessante para você? Se seria melhor pagar à vista ou em 2 ou 3 vezes?

E ao contratar um plano de internet ou de telefonia? Já precisou verificar qual forma de pagar é mais condizente com seu orçamento?

Entender o significado de um sistema de equações, saber como equacionar problemas com duas variáveis, reconhecer o princípio por trás de alguns métodos de resolução faz que você seja capaz de usar técnicas para resolver problemas práticos do seu dia a dia.

Representação gráfica de um sistema de duas equações com duas variáveis

Para representar graficamente um sistema de duas equações com duas variáveis, como os estudados neste Caderno, basta traçar, no mesmo plano cartesiano, as retas correspondentes a cada equação do sistema. Veja:

Sistema	Representação gráfica
$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$	 © Sidnei Moura

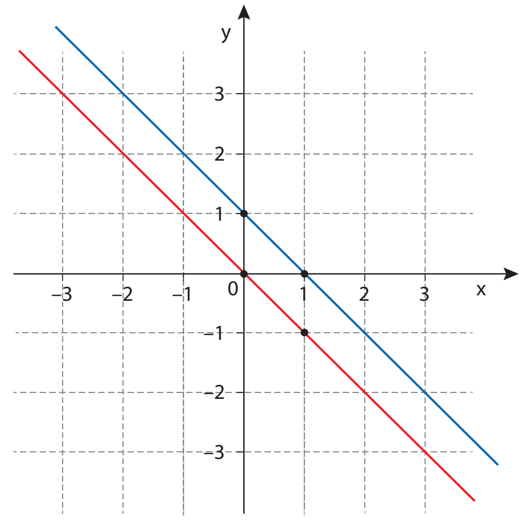
Note que o par ordenado (2, 4) corresponde ao ponto de intersecção das duas retas, ou seja, satisfaz as duas equações. Verifique:

$x + y = 6 \Rightarrow 2 + 4 = 6$

$2x - y = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Dessa forma, se um sistema tem uma única solução, então as retas que formam o gráfico do sistema se interceptam (se cruzam) em um ponto.

Observe esse outro sistema e o gráfico das equações correspondentes:

Sistema	Representação gráfica
$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$	

© Sidnei Moura

Veja que, nesse caso, não é possível encontrar um par ordenado (x, y) que satisfaça as duas equações simultaneamente. Isso fica claro nos gráficos de cada equação, pois as retas são paralelas, o que significa que elas não se encontram em ponto algum. Nesses casos, se diz que o sistema não tem solução, ou seja, é **impossível**.

ATIVIDADE 1 Posições de duas retas

1 Comente as seguintes proposições:

a) se os gráficos de duas equações são representados por duas retas que se interceptam em um único ponto, então é possível dizer que o sistema formado por essas duas equações tem uma única solução.

b) se um sistema de duas equações de primeiro grau não tem solução, então seu gráfico é formado por duas retas paralelas.

2 Construa o gráfico do sistema a seguir e responda: o que acontece com as tabelas das duas equações? E com seus gráficos?

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

3 Com base no gráfico do sistema a seguir, responda: os gráficos de cada equação se interceptam? Se sim, quais são as coordenadas do ponto de intersecção?

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

4 Utilizando o método da substituição ou da adição, resolva o sistema e, em seguida, esboce o seu gráfico e analise o seu significado.

$$\begin{cases} x - 5 = y \\ y + 5 = x \end{cases}$$

5 Considerando o sistema a seguir, esboce o gráfico das equações e reflita: o que se pode concluir sobre ele?

$$\begin{cases} x - 5 = y \\ y + 1 = x \end{cases}$$

Resolvendo problemas com equações e gráficos

Em determinada empresa, há dois planos de telefonia para seus clientes. O plano **A** cobra R$ 0,20 por minuto de ligação, e o plano **B**, que tem uma taxa de R$ 30,00 pelo direito de uso do serviço, cobra R$ 0,10 por minuto de ligação. Carlos e Daniel trabalham como vendedores e pretendem escolher um plano compatível com suas necessidades. Carlos faz, em média, 250 ligações por mês, Daniel faz, em média, 350 ligações por mês. Os dois colegas fizeram as contas para decidir qual era o plano mais econômico para cada um deles.

Para saber como a Matemática pode ajudá-los a tomar uma decisão, considere:

- Quanto Carlos gastaria no plano **A**?
- Quanto Carlos gastaria no plano **B**?
- Quanto Daniel gastaria no plano **A**?
- Quanto Daniel gastaria no plano **B**?
- Qual é o plano mais econômico para cada um deles?

Nesse caso particular, em que se sabe a média de chamadas mensais de cada um dos vendedores, é possível, por meio de cálculos, perceber qual é o melhor plano. Mas, se o número de chamadas não for constante ao longo dos meses, como decidir?

Nesses casos, vale a pena comparar os dois planos por meio do uso de sistemas e gráficos, conforme apresentado a seguir.

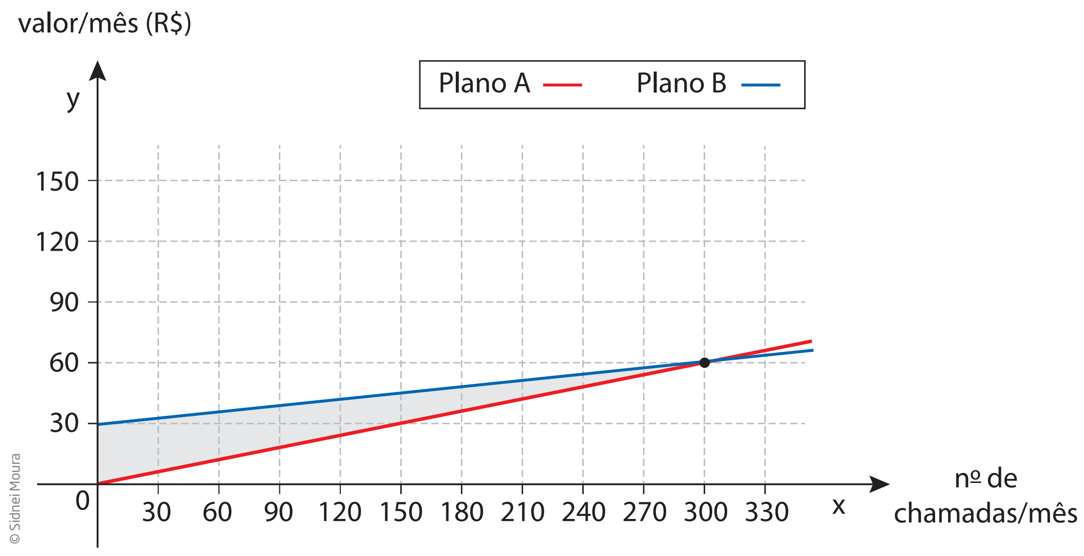
Considere **x** o número de ligações mensais e **y** o valor a ser pago mensalmente.

Veja a equação para cada plano:

Plano **A**: $y = 0{,}20x$.

Plano **B**: $y = 0{,}10x + 30$.

A seguir, confira o gráfico de cada equação:



Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = \dfrac{x}{5} \\ y = \dfrac{x}{10} + 30 \end{cases}$, a solução é (300, 60).

O par ordenado (300, 60), que corresponde ao ponto de intersecção das duas retas, satisfaz a equação do plano **A** e a equação do plano **B**. Dessa forma, é possível concluir que, para quem faz até 300 ligações por mês, o plano **A** é o mais vantajoso economicamente, mas, a partir de 300 ligações por mês, o plano **B** sai mais barato.

Confira a seguir. As opções mais econômicas estão em azul na tabela:

Ligações	Plano A	Plano B
250	R$ 50,00	R$ 55,00
300	R$ 60,00	R$ 60,00
350	R$ 70,00	R$ 65,00

ATIVIDADE 2 Aplicações de equações e gráficos

1 Duas empresas de telefonia fixa oferecem planos diferentes para seus clientes. A empresa **A** cobra R$ 0,10 por minuto de ligação, e a empresa **B**, que tem uma taxa de R$ 39,50 pelo direito de uso do serviço, cobra R$ 0,04 por minuto de ligação. Um consumidor que utiliza, em média, 580 minutos de ligação por mês terá vantagens ao aderir ao plano da empresa **A**. Qual alternativa apresenta o valor que ele gastará?

a) R$ 5,30 a menos que a empresa **B**.

b) R$ 4,70 a menos que a empresa **B**.

c) R$ 2,70 a menos que a empresa **B**.

d) R$ 1,30 a menos que a empresa **B**.

2 Um sorveteiro ambulante ganha R$ 5,00 por dia trabalhado e R$ 0,25 por picolé vendido. Qual é a expressão que representa o seu ganho diário (**y**) em função da quantidade de picolés vendidos (**x**)?

a) $y = 5 - \frac{25}{100}x$

b) $y = 5 + \frac{25}{100}x$

c) $y = \frac{25}{100}x + 25$

d) $y = \frac{25}{100}x - 25$

3 Uma pessoa deixou seu veículo em um estacionamento que cobra R$ 2,50 pela primeira hora, R$ 1,50 pela segunda hora e R$ 1,00 a cada hora subsequente. Se, ao sair, essa pessoa pagou R$ 10,00, quantas horas o veículo ficou no estacionamento?

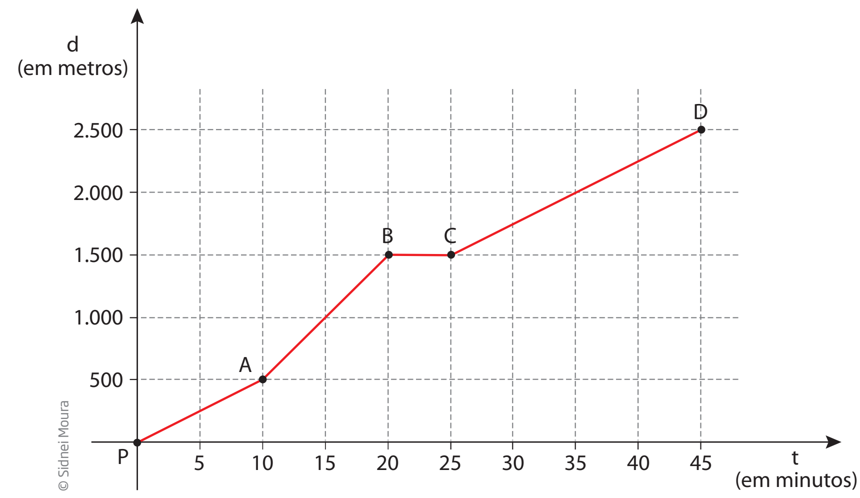
a) 2 horas.

b) 6 horas.

c) 8 horas.

d) 10 horas.

4 Toda manhã, antes de começar o expediente, seu Joaquim sai para caminhar. Responda às perguntas com base no gráfico que representa a distância percorrida em função do tempo.



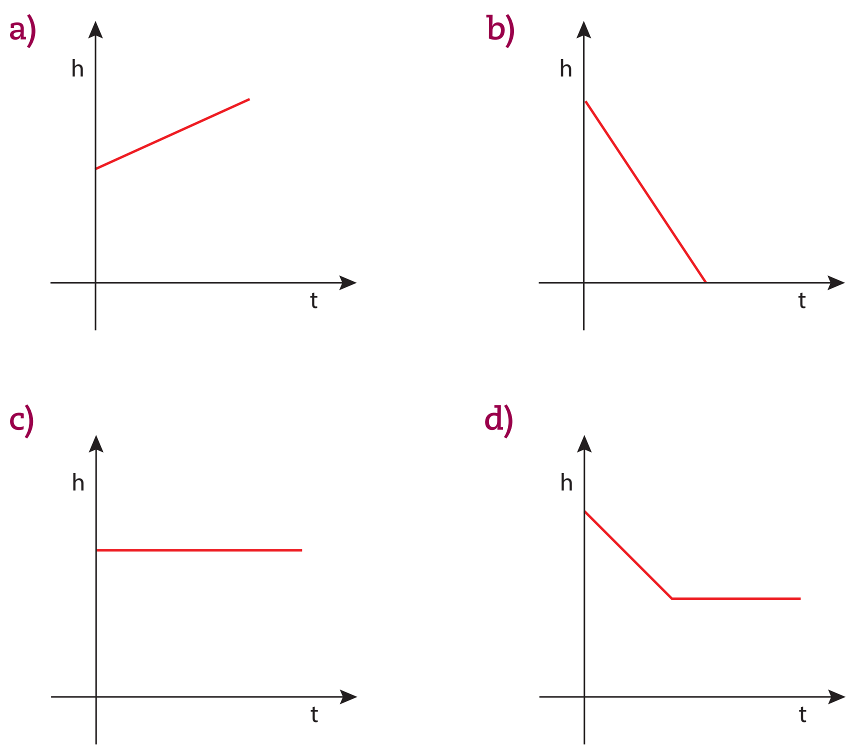
a) Quanto tempo ele parou para descansar?

b) Em que intervalo de tempo ele caminhou na maior velocidade?

c) Em que trechos ele caminhou com velocidade constante?

d) Observe o trecho entre **P** e **A** e o trecho entre **C** e **D**. Em que trecho ele caminhou com velocidade maior?

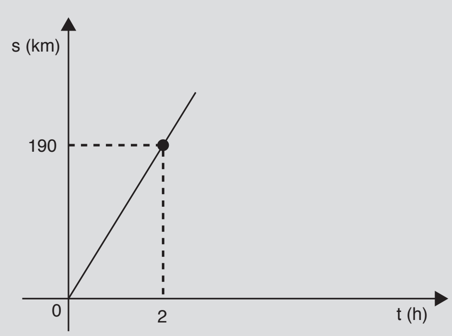
5 João trabalha em um laboratório de controle de qualidade. Em um experimento do laboratório, uma vela foi acesa e foram registradas as medidas da altura da vela (**h**) a cada intervalo de tempo (**t**). Qual dos gráficos expressa melhor a variação da altura da vela em função do tempo, de acordo com a queima da vela? Justifique sua resposta.



Ilustrações: © Sidnei Moura

DESAFIO

O gráfico a seguir representa a distância **s**, em quilômetros, percorrida por um veículo em **t** horas, rodando a uma velocidade constante.



Esse gráfico permite que se conclua corretamente que as grandezas **s** e **t** são tais que:

a) $s = 95t$ **b)** $s = 190t$ **c)** $t = 95s$ **d)** $t = 190s$

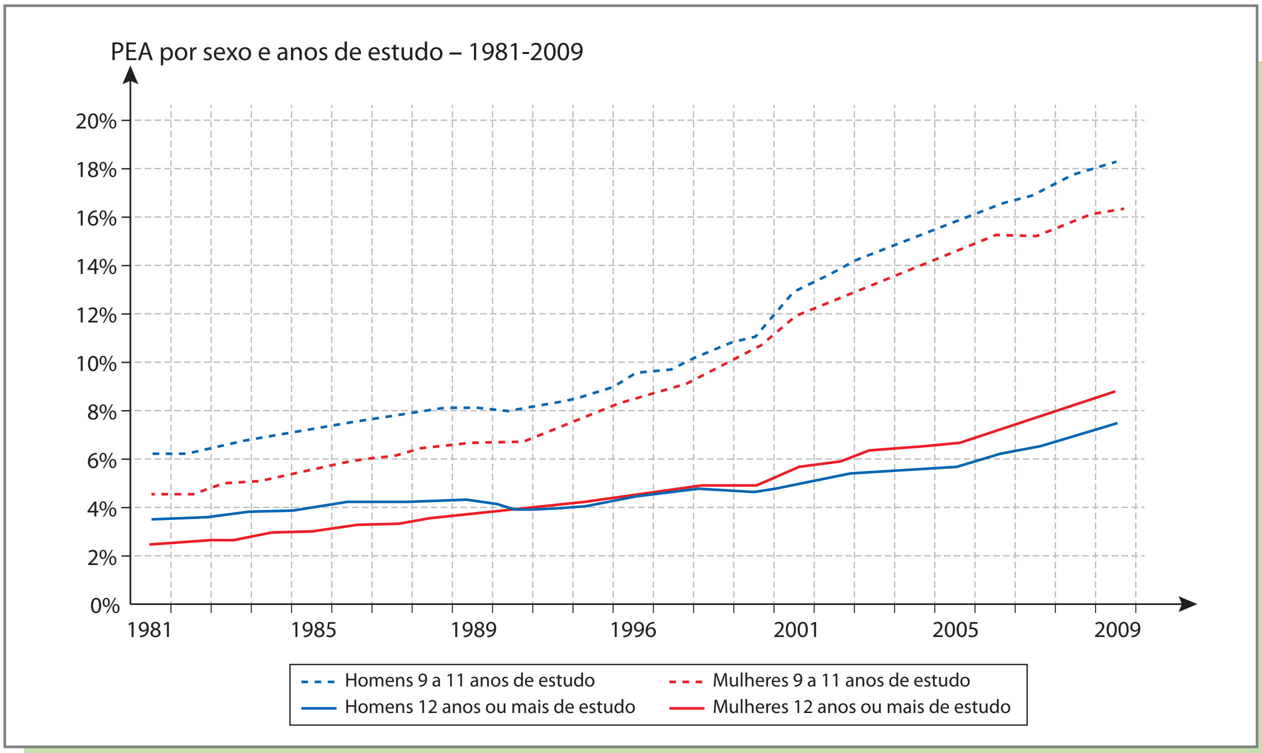
Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-8EF-Tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

PENSE SOBRE...

Agora que você já estudou e construiu alguns gráficos, analise o gráfico a seguir.

Quais informações esse gráfico contém? Como você o interpreta?

Considere, para a sua análise, que PEA significa População Economicamente Ativa.



Fonte: PNADs/IBGE de 1981-2009. Elaboração dos autores. (conforme original)
NONATO, Fernanda J. A. P. et al. O perfil da força de trabalho brasileira: trajetórias e perspectivas. In: *Mercado de Trabalho - Conjuntura e Análise*, n. 51, maio 2012. Disponível em: <http://www.ipea.gov.br/agencia/images/stories/PDFs/mercadodetrabalho/bmt51_nt02_perfildaforca.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Posições de duas retas

1

a) A proposição está correta, pois a solução única é o par ordenado correspondente ao ponto de intersecção das duas retas.

b) A proposição está correta, pois as retas correspondentes às duas equações não têm ponto de intersecção.

2 As equações são equivalentes; isso implica que as retas que representam as equações coincidem, ou seja, elas têm todos os seus pontos em comum; portanto esse sistema possui infinitas soluções.

3 As equações são rigorosamente iguais; então, as retas que representam cada equação coincidem, o que significa que elas compartilham os mesmos pontos e, portanto, há infinitas soluções.

4 Isolando **x** no primeiro membro da primeira equação, obtém-se a segunda equação, apenas com os membros trocados. Substituindo **y** na segunda equação: (x – 5) + 5 = x, que leva a **x** = **x**, o que é verdade para qualquer valor de **x**. A conclusão é que há infinitas soluções para esse sistema, portanto a representação gráfica das equações são duas retas coincidentes.

5 Ao esboçar o gráfico, você constatará que as retas são paralelas e, portanto, que um sistema como esse não tem solução.

Atividade 2 - Aplicações de equações e gráficos

1 Alternativa correta: **b**. Uma maneira de começar a resolver o exercício é separar as informações presentes no enunciado:

Tarifa/minuto da empresa **A**: $0{,}10 = \dfrac{1}{10}$

Tarifa/minuto da empresa **B**: $0{,}04 = \dfrac{1}{25}$

Valor do Plano da empresa **A**: $y = \dfrac{x}{10}$

Valor do Plano na empresa **B**: $y = \dfrac{x}{25} + 39{,}50$

Se você chamar de **x** o número de minutos que o consumidor usa, então, nesse caso, x = 580. Agora, usando as equações acima, você pode calcular quanto custa cada plano:

- na empresa **A**, ele vai pagar $580 \cdot \dfrac{1}{10}$ = R$ 58,00;
- na empresa **B**, ele vai pagar $580 \cdot \dfrac{1}{25} + 39{,}50 = 62{,}70$.

Para descobrir quanto ele vai economizar contratando os serviços da Empresa **B**, subtraia do resultado do Plano **A** o valor que ele gastaria no Plano **B**: 62,70 – 58,00 = R$ 4,70.

2 Alternativa correta: **b**. Se você chamar de **x** a quantidade de picolés vendidos e de **y** o valor que ele ganha no dia, então:

$y = 5{,}00 + 0{,}25x$

Mas 0,25 são vinte e cinco centavos, ou vinte e cinco centésimos, ou seja, 25 partes de 100, que pode ser escrito na forma de fração como $\dfrac{25}{100}$; portanto, a equação que representa o que o sorveteiro ganha no dia é $y = 5 + \dfrac{25}{100}x$.

3 Alternativa correta: **c**. O preço pago pelo estacionamento pode ser descrito da seguinte maneira:

A primeira hora custou: R$ 2,50.

As 2 primeiras horas custaram: R$ 2,50 (1ª hora) mais R$ 1,50 (2ª hora), isto é, R$ 4,00.

As horas restantes custaram: o número adicional de horas que o veículo ficou estacionado vezes R$ 1,00.

Equacionando: se **t** é o tempo (em horas) de permanência no estacionamento, e **P**, o total a ser pago (em reais) pelo estacionamento por mais de 2 horas, tem-se:

$P = 4 + (t - 2) \cdot 1 \Rightarrow P = 4 + t - 2 = t + 2$

$P = t + 2$ (lembre-se de que essa equação só vale para $t > 2$).

Por exemplo, se o veículo ficou 5 horas no estacionamento, o total pago deverá ser $P = 5 + 2 = 7$, ou seja, R$ 7,00.

Como foram pagos R$ 10,00, basta substituir **P** por 10 na equação.

$10 = t + 2 \Rightarrow t = 8$. O veículo ficou 8 horas no estacionamento.

4 Essa questão requer uma leitura cuidadosa do gráfico para poder responder a cada um dos itens:

a) Considere que, se ele parou, não deve haver aumento na distância percorrida, então, no gráfico, há um período de 5 minutos, entre os instantes 20 e 25 (pontos **B** e **C**) que indica essa parada.

b) Note que, quanto maior a velocidade, maior é a distância percorrida em um período de tempo. No gráfico, isso é indicado pelo trecho que fica "mais em pé". Analisando a inclinação da reta, no intervalo entre 10 e 20 minutos, ele percorreu 1.000 m (1.500 – 500) em 10 minutos (20 – 10), ou seja, 1 km em 10 minutos, o que equivale a 6 km/h.

c) Caminhar em velocidade constante é indicado no gráfico por trechos em que não há alterações na inclinação do traçado da curva. Observe que isso ocorre da partida **P** ao ponto **A**, de **A** para **B** e de **C** para **D**.

d) Observe que, no trecho de **P** até **A**, o trecho do gráfico coincide com a diagonal do retângulo formado por dois quadrinhos do quadriculado. Agora, observe também o trecho de **C** até **D** e verifique que parte desse trecho também coincide com a diagonal do retângulo formado por dois quadrinhos. Isso indica que a velocidade nos dois percursos foi a mesma. Outro modo de constatar isso é observando que a inclinação dos dois segmentos é a mesma. Isso quer dizer que o gráfico das equações que contém esses segmentos faz o mesmo ângulo com o eixo horizontal. Verifique que, de **P** para **A**, ele percorreu 500 m em 10 minutos e, de **C** para **D**, seu Joaquim percorreu 1.000 m (2.500 – 1.500) em 20 minutos (45 – 25), ou seja, nos dois trechos ele manteve a velocidade constante de 3 km/h.

5 No gráfico (b), você pode observar que a vela começa com determinada altura e, conforme o tempo vai passando, ela diminui de tamanho até acabar em $h = 0$; o gráfico (a) não corresponde à situação da vela queimando, pois sugere que a vela aumenta sua altura conforme queima, o que não é verdade; perceba que, no gráfico (c), ela mantém altura constante, o que sugere que não queima, ou seja, está apagada; já o gráfico (d) pode ser interpretado como uma vela que foi apagada, em determinado instante, antes de terminar de queimar; portanto, manteve sua altura constante depois de ter queimado por um tempo. Logo, o gráfico que melhor expressa a situação correspondente entre a altura da vela e o tempo que ela fica acesa é o gráfico (b).

Desafio

Alternativa correta: **a**. Lendo o gráfico que indica espaço *versus* tempo, é possível verificar que após 2 horas o veículo andou 190 km. Se a velocidade é constante, pode-se dizer que a cada hora o veículo percorre a metade de 190, que é 95 km, portanto $s = 95t$.

Registro de dúvidas e comentários

UNIDADE 5

GEOMETRIA NO COTIDIANO E NO MUNDO DO TRABALHO

TEMAS

1. Figuras congruentes
2. Figuras semelhantes

Introdução

Nesta Unidade, você vai estudar algumas ferramentas matemáticas para resolver situações do dia a dia que envolvem Geometria.

Você deve ter percebido que a presença da Matemática no mundo do trabalho é fundamental. Na última Unidade deste Volume, você terá a oportunidade de analisar a presença da Geometria em situações cotidianas e profissionais. Embora seja praticamente impossível listar aqui todas as profissões que fazem uso da Geometria, é necessário destacar alguns fatores importantes para a resolução de problemas, simples ou complexos, que estão presentes na maioria delas.

O cálculo de distâncias em lugares inacessíveis, como a altura de uma montanha ou a largura de um rio, faz parte de problemas já estudados pelos sábios da Grécia antiga há mais de 2.500 anos. Tales de Mileto (624-543 a.C.) e Pitágoras (582-496 a.C.), por exemplo, fizeram descobertas importantes que são utilizadas até hoje.

Com o avanço da tecnologia, topógrafos e agrimensores são profissionais capazes de encontrar medidas precisas para montanhas, edifícios e torres, usando ferramentas matemáticas e aparelhos eletrônicos como o teodolito. Alguns dos instrumentos utilizados no século XXI são os mesmos criados pelos geômetras gregos.

Figuras congruentes TEMA 1

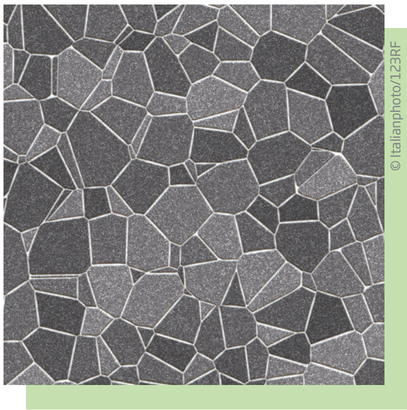
Neste Tema, você vai se deparar com situações cotidianas e históricas em que será preciso verificar se duas formas geométricas são idênticas ou não. Esse tipo de verificação vai te ajudar a tomar decisões corretas antecipadamente.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Veja o mosaico; com o que se parece?

Faz lembrar paredes ou pisos de pedras?

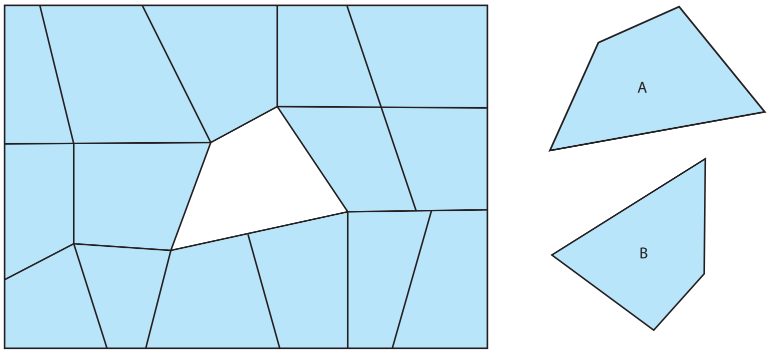
Como você pavimentaria uma região plana, usando diversas pedras com formatos diferentes?



© Italianphoto/123RF

Figuras de mesma forma e mesmas medidas

Agora imagine que um pedreiro dispõe de duas placas de pedra para cobrir um buraco formado no mosaico a seguir.



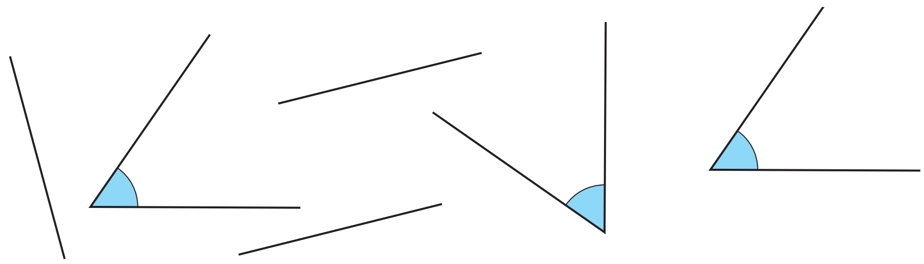
© Sidnei Moura

- Qual é a pedra que se encaixa perfeitamente no buraco?
- O que o pedreiro precisa saber sobre a forma da pedra para poder escolher aquela que cobre adequadamente o buraco?

A pedra escolhida deve ter a mesma forma e as mesmas medidas do buraco.

Quando duas figuras geométricas têm a mesma forma e as mesmas medidas, elas são chamadas figuras congruentes. Na prática, pode-se dizer que são figuras planas que podem ser sobrepostas de modo a se encaixar exatamente uma sobre a outra.

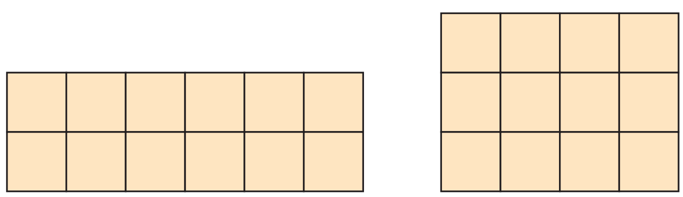
Seguindo essa linha de raciocínio, dois segmentos com medidas iguais são chamados segmentos congruentes, dois ângulos com a mesma medida são ângulos congruentes etc.



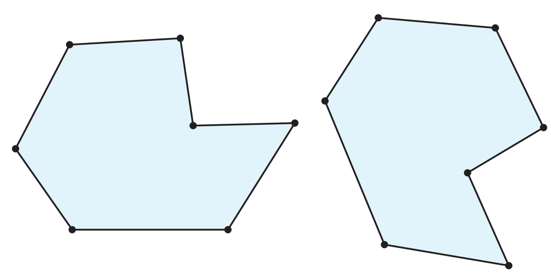
Ilustrações: © Sidnei Moura

É possível deslizar ou girar segmentos de modo que eles fiquem sobrepostos.
A mesma propriedade pode ser aplicada aos ângulos.

No entanto, é possível encontrar figuras que têm características em comum, mas não são congruentes. Por exemplo, o retângulo 2 × 6 e o retângulo 3 × 4, a seguir, têm a mesma área, mas não são congruentes, pois não é possível sobrepor um ao outro de forma que fiquem completamente “encaixados”.

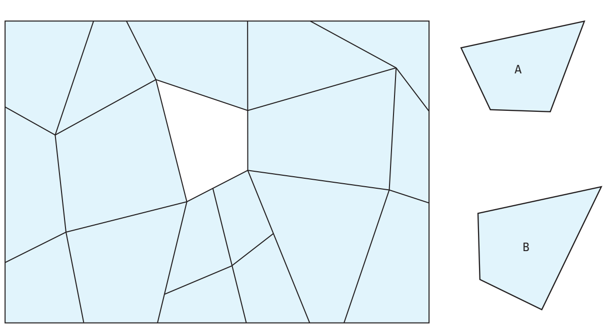


A ideia de congruência pode ser estendida a qualquer figura plana, então, quaisquer polígonos que tenham a mesma forma e as mesmas medidas (lineares e angulares) são congruentes.

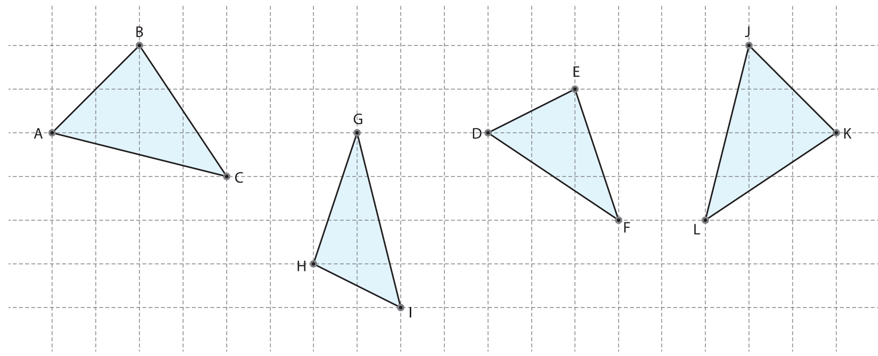


ATIVIDADE 1 Congruência

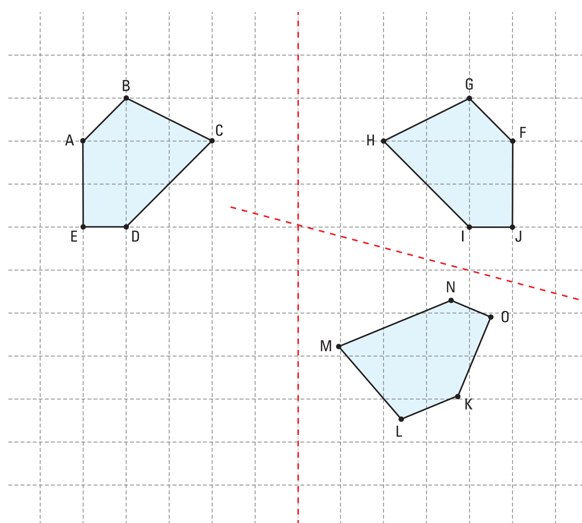
1 Qual quadrilátero se encaixa perfeitamente no buraco?



2 Identifique dois triângulos que sejam congruentes:



3 Os três pentágonos a seguir são congruentes. Considerando as três figuras ao mesmo tempo, relacione os seus vértices correspondentes.



4 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

a) Todos os retângulos são congruentes.

b) Todos os quadrados são congruentes.

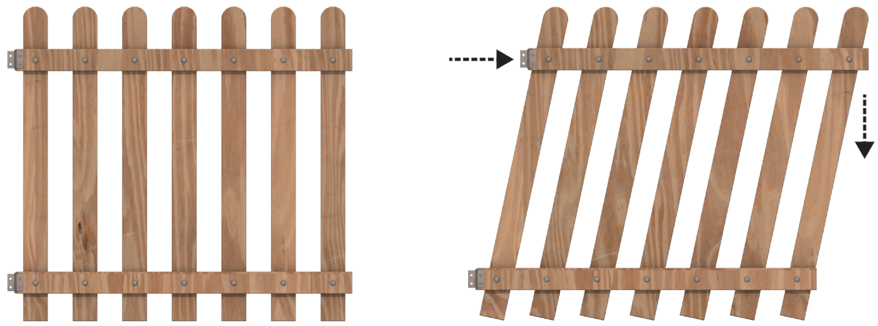
c) Dois retângulos cujos lados correspondentes têm as mesmas medidas são congruentes.

d) Se os lados de dois quadrados têm a mesma medida, então eles são congruentes.

e) Todas as circunferências que têm o mesmo diâmetro são congruentes.

Triângulos congruentes

Qualquer carpinteiro experiente sabe como construir portões de madeira que fiquem firmes.



Ilustrações: © Daniel Beneventi

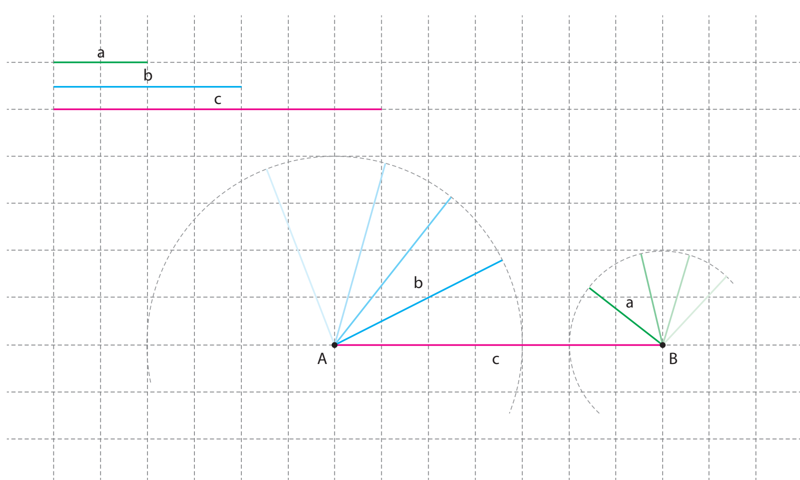
Portões construídos apenas com ripas paralelas e perpendiculares não têm estabilidade e podem se inclinar.

Para resolver o problema, os carpinteiros colocam uma ripa na diagonal, o que imprime firmeza ao portão.

O que garante que isso funcione é a **rigidez do triângulo**, característica exclusiva entre esses polígonos.

Desigualdade triangular

Para que um triângulo possa existir, é necessário que a soma das medidas de dois de seus lados seja maior que a do terceiro lado.



© Sidnei Moura

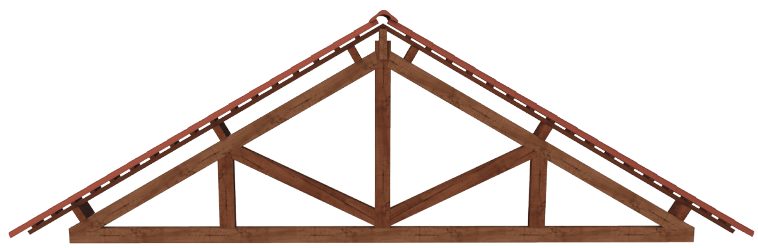
Observe a figura apresentada anteriormente. Já que $a + b < c$, os dois arcos de circunferência não têm ponto de intersecção, ou seja, se o terceiro vértice não pode ser determinado, o triângulo não pode existir.

Aplicações da rigidez do triângulo no mundo do trabalho

A rigidez dos triângulos é uma das propriedades geométricas mais importantes. É usada na construção de estruturas de edifícios, coberturas, pontes, torres etc.

Vigas de telhado

Essas estruturas são trianguladas para garantir a estabilidade do telhado.

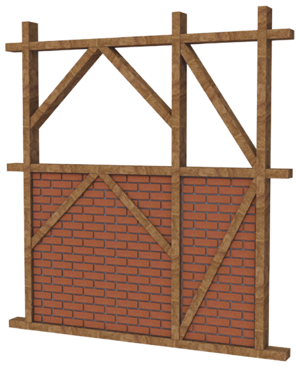


© Daniel Beneventi

© Ingram Publishing / Diomedia

Paredes e muros

A triangulação também é usada para a construção de paredes resistentes. Nas cidades da região Sul do Brasil, por exemplo, ela é muito comum em casas que adotam o estilo enxaimel da arquitetura alemã. É o caso de Blumenau (SC).



© Daniel Beneventi

Esquema de parede em estilo enxaimel.

© Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

Edifícios do centro de Blumenau (SC).

Pontes, torres, coberturas e suportes

A rigidez do triângulo também é usada em treliças tridimensionais, cuja estrutura é utilizada para dar suporte a pontes, coberturas, torres etc. Além disso, a triangulação é utilizada em suportes tridimensionais de quiosques de estabelecimentos comerciais.

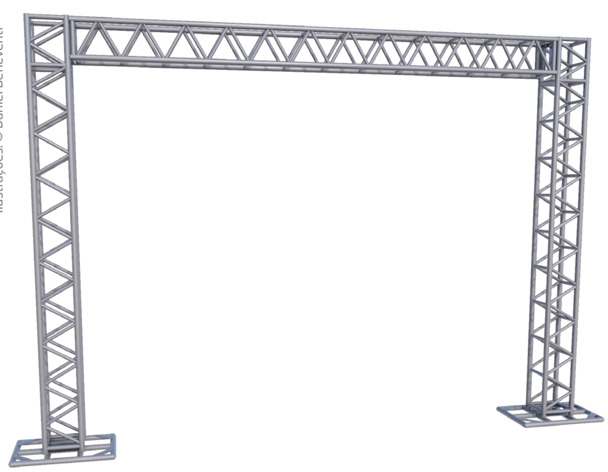
© Delfim Martins/Pulsar Imagens

Torres de transmissão.

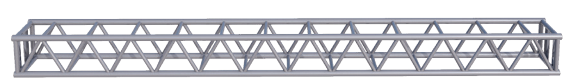
© Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

Torre da TV Cultura de São Paulo.

Ilustrações: © Daniel Beneventi



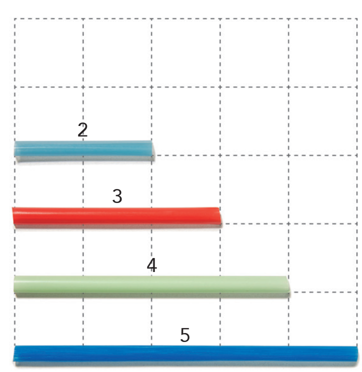
Arco de sustentação de quiosques comerciais.



Detalhe da treliça tridimensional.

ATIVIDADE 2 Triângulos e suas aplicações

1 Considere quatro canudos de cores diferentes com as medidas indicadas a seguir. Quantos triângulos diferentes podem ser construídos com esses canudos?



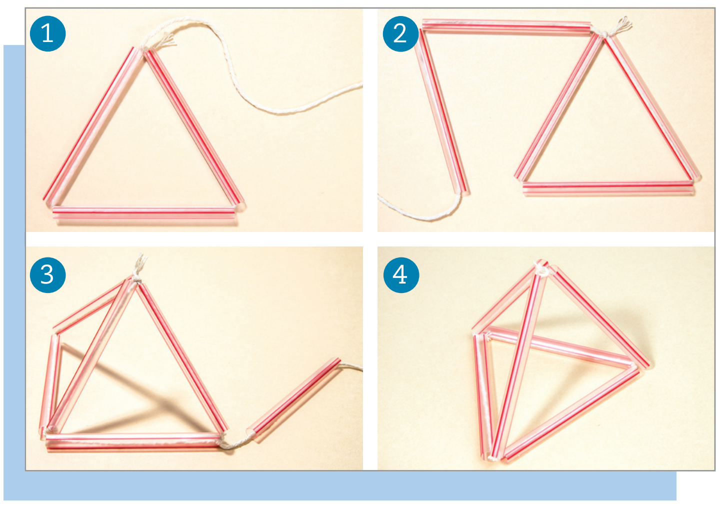
© Paulo Savala

2 Pesquise e, em uma folha avulsa, liste situações e objetos em que a rigidez do triângulo é usada.

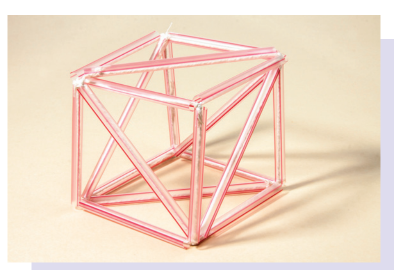
3 Construa modelos tridimensionais, com base nas orientações a seguir.

a) Recorte seis canudinhos de refresco, do mesmo tamanho, e construa o "esqueleto" de um tetraedro, que é uma figura tridimensional, em forma de uma pirâmide com base triangular. Use uma agulha ou grampo para passar a linha, ou o barbante, por dentro dos canudos recortados.

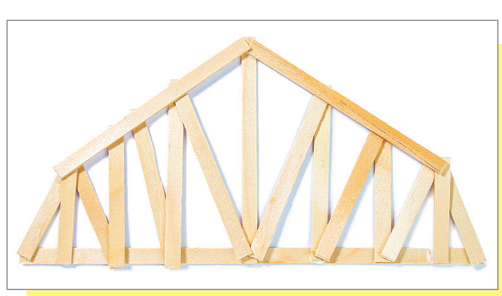
Veja o modelo:



b) Observe o modelo e construa um cubo rígido com canudos e barbante.

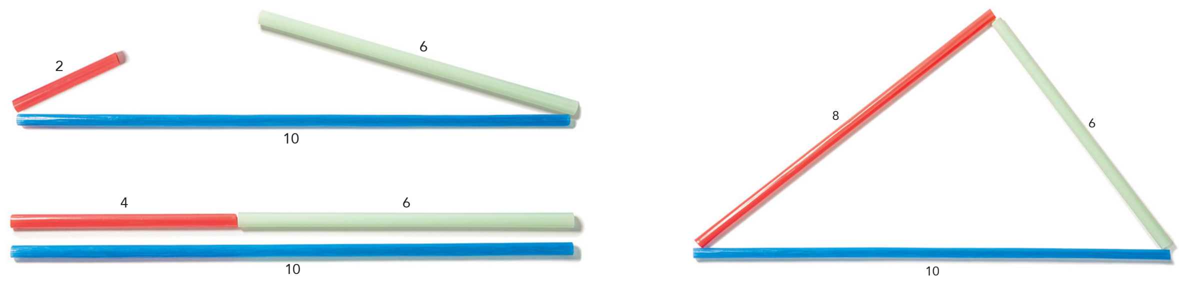


c) Utilizando palitos de sorvete e tachinhas, construa algumas estruturas rígidas.



Fotos: © Paulo Savala

4 Observe as imagens a seguir. O que elas sugerem?

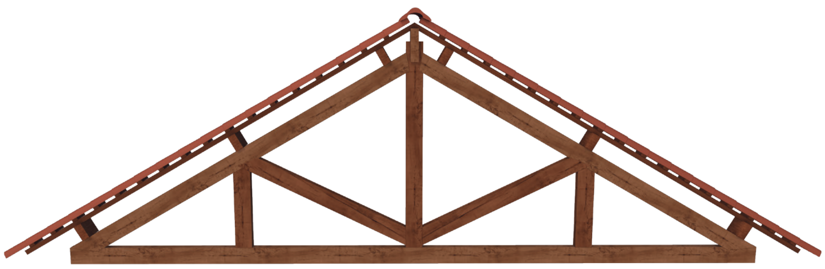


Fotos: © Paulo Savala

Casos de congruência

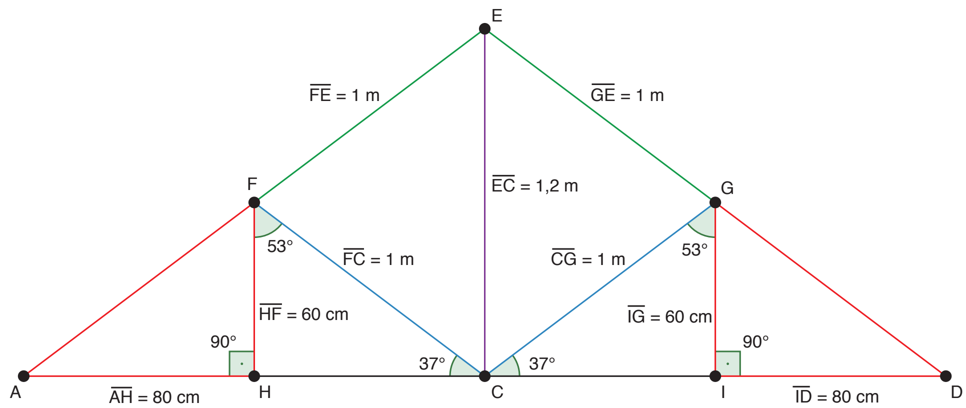
Já foi visto que, para garantir a estabilidade de um telhado, é preciso utilizar triângulos, pois sua rigidez proporciona uma estrutura estável.

Ao observar a figura abaixo, você vê uma estrutura que possui vários triângulos de diversos formatos. Será que é possível, em uma construção como essa, utilizar triângulos de qualquer formato, ou é preciso ter um padrão?



Para decidir isso, os profissionais que trabalham com a construção de estruturas como essa fazem um desenho para representar o projeto antes de executá-lo.

Suponha que o desenho abaixo é o esquema que representa a estrutura do telhado acima.



Ilustrações: © Daniel Beneventi

a) Veja, nesse projeto, os triângulos AHF e DIG (ambos em vermelho) e observe que os ângulos $\hat{H}$ e $\hat{I}$ são iguais a 90° e que $\overline{AH} = \overline{ID} = 80$ cm e $\overline{HF} = \overline{IG} = 60$ cm.

Esse é um caso conhecido de congruência de triângulos, o **LAL** (lado-ângulo-lado), em que dois lados têm a mesma medida e o ângulo formado por eles também.

Se o ΔAHF e o ΔDIG têm $\overline{AH} = \overline{ID}$, $\overline{HF} = \overline{IG}$ e $A\hat{H}F = D\hat{I}G$, então eles são congruentes. Assim, é possível concluir que $\overline{AF} = \overline{GD}$.

b) Se você observar os triângulos EFC e EGC, vai notar que os segmentos $\overline{FE} = \overline{GE} = \overline{CG} = \overline{FC} = 1$ m e $\overline{EC} = 1{,}2$ m é comum.

Esse caso de congruência de triângulos é conhecido como **LLL** (lado-lado-lado), em que as medidas dos lados correspondentes entre os triângulos são iguais, ou seja,

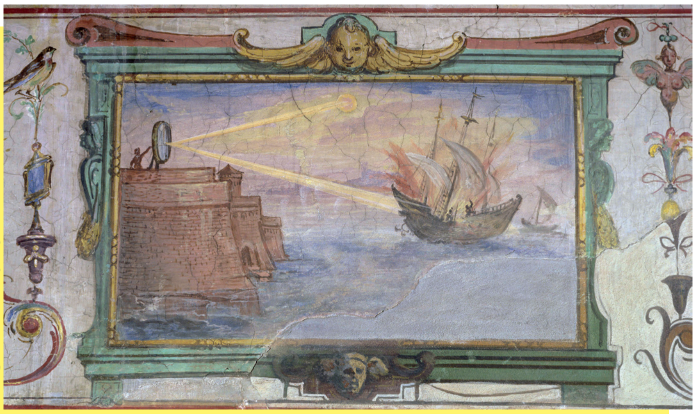
$$\begin{cases} \overline{FE} = \overline{GE} \\ \overline{FC} = \overline{GC} \\ \overline{EC} \text{ é comum} \end{cases}$$

Nessas condições, conclui-se que os ΔEFC e ΔEGC são congruentes.

c) Por fim, observe os triângulos CHF e CIG, nos quais já foi visto que $\overline{FC} = \overline{GC}$. Além disso, tem-se neste projeto que os ângulos $H\hat{F}C = I\hat{G}C = 53°$ e $F\hat{C}H = I\hat{C}G = 37°$. Nessas condições, tem-se que esses triângulos são congruentes pelo caso **ALA** (ângulo-lado-ângulo).

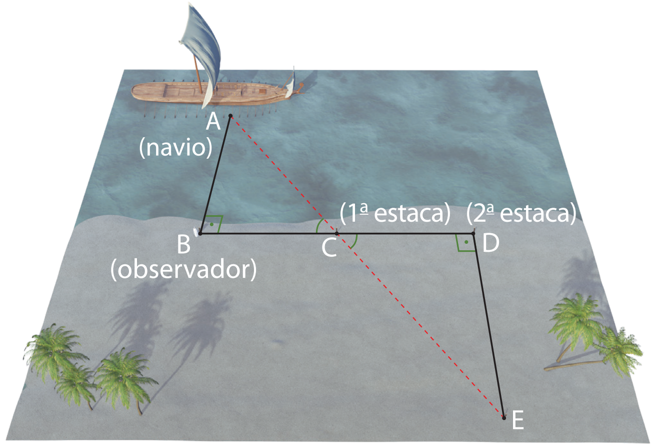
Uma aplicação engenhosa

Na Grécia antiga, devido às constantes ameaças de invasão, matemáticos inventaram aparelhos para fins militares. Conta uma lenda que, no século III a.C., Arquimedes criou um sistema de espelhos inclinados para que a luz do Sol queimasse os navios inimigos durante as guerras.



© Bridgeman Art Library/Keystone

Alguns séculos antes de Arquimedes, outro matemático grego, Tales de Mileto, desenvolveu um método para calcular a distância de um navio em relação à praia, sem a necessidade de realizar uma medição direta.



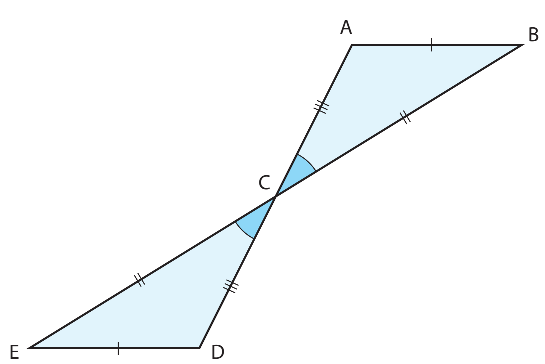
© Daniel Beneventi

Há muitos livros, *sites* e filmes sobre as guerras que ocorreram na Grécia antiga. Um deles é *Ágora* (direção de Alejandro Amenábar, 2009), filme que narra a vida da egípcia Hipátia (355-415), considerada a primeira matemática da história.

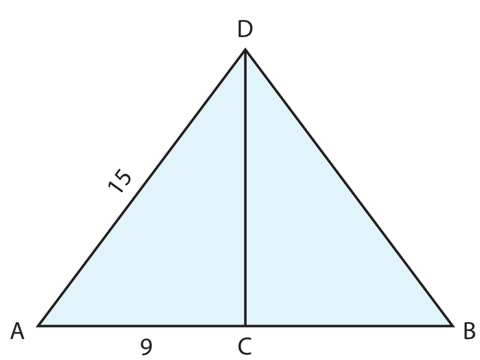
A estratégia de Tales é bastante engenhosa, pois utiliza uma característica de dois triângulos congruentes chamada **ALA** (ângulo-lado-ângulo).

ATIVIDADE 3 Casos de congruência

1 Na figura a seguir, observe que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DC}$ e $A\hat{C}B = D\hat{C}E$. O que você pode concluir em relação às medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{EC}$?



2 No triângulo a seguir, use o caso LAL para determinar a medida $\overline{BD}$, sabendo que $\overline{CD}$ é perpendicular à base $\overline{AB}$ e que **C** é o ponto médio de $\overline{AB}$.



Ilustrações: © Sidnei Moura

LEMBRANDO!

Ponto médio é o ponto que se localiza exatamente no meio de um segmento de reta.

Quadriláteros

Os quadriláteros são polígonos de quatro lados. O retângulo, por exemplo, é um dos mais comuns, pois está presente no formato de papéis, portas, janelas, paredes, mesas etc.

ATIVIDADE 4 Quadriláteros

1 Quais quadriláteros você conhece?

a) Liste os nomes desses quadriláteros.

b) Desenhe os quadriláteros que você listou.

c) Descreva cada quadrilátero que você desenhou.

2 O que você sabe sobre as diagonais de um polígono?

3 Quantas diagonais tem um quadrilátero?

____

4 Escreva o que você sabe sobre as diagonais dos seguintes polígonos:

a) Paralelogramo.

____

____

____

b) Retângulo.

____

____

____

c) Losango.

____

____

____

d) Quadrado.

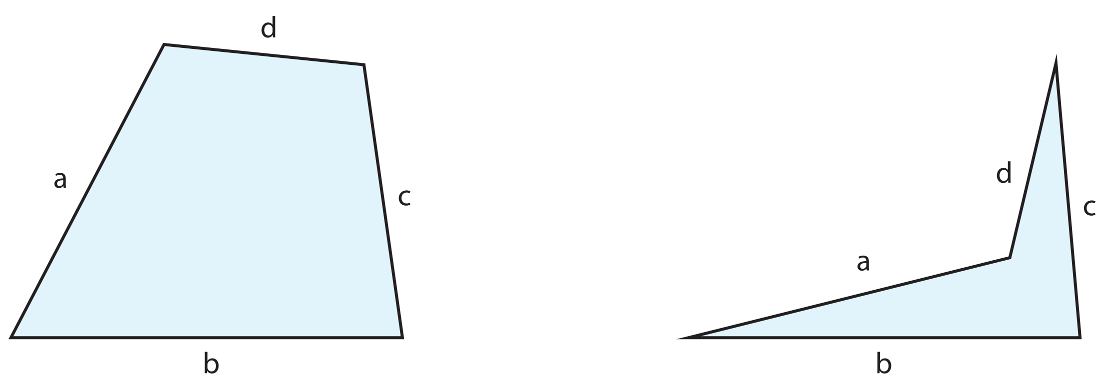
____

____

____

Características dos quadriláteros

Diferentemente dos triângulos, os quadriláteros não são estruturas rígidas. É possível formar diferentes quadriláteros com as mesmas medidas de lado.



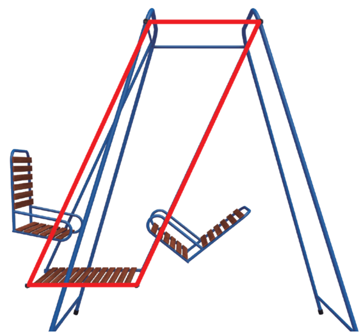
Ilustrações: © Sidnei Moura

Esses quadriláteros têm lados com as mesmas medidas, mas seus ângulos e formatos são diferentes.

Paralelogramos

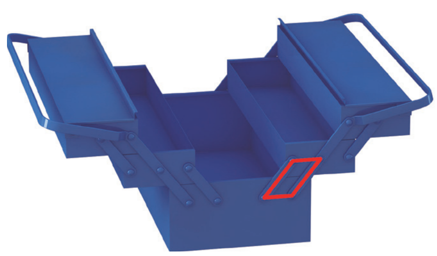
O paralelogramo é muito utilizado em sistemas articulados, cujas estruturas precisam manter o paralelismo. Está presente na estrutura das balanças de prato, grelhas de fornos, no limpador de para-brisas, nas janelas do tipo basculante, nas persianas, em brinquedos de parques etc.

© Daniel Beneventi



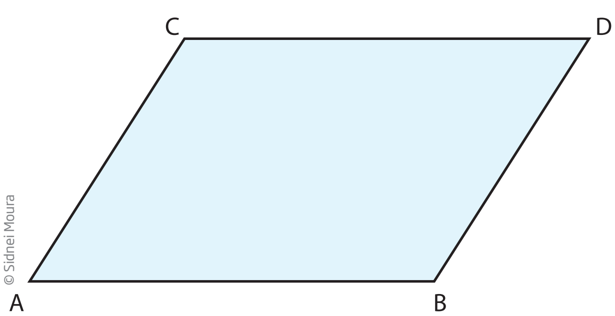
© João Pirolla

Quando o serralheiro constrói um balanço de brinquedo, ele deve usar duas correntes com o mesmo comprimento e garantir que a distância entre as extremidades das correntes seja a mesma. Assim, ele terá certeza de que a tábua de apoio em que as crianças ficarem sentadas sempre vai estar paralela à barra superior do brinquedo, que, por sua vez, deve estar paralela ao solo. Caso contrário, a tábua de apoio ficaria inclinada, e as crianças poderiam cair do brinquedo.



Ilustrações: © Daniel Beneventi

A origem dessa técnica de construção decorre de uma propriedade que vale para qualquer paralelogramo: os lados opostos são paralelos e têm a mesma medida.

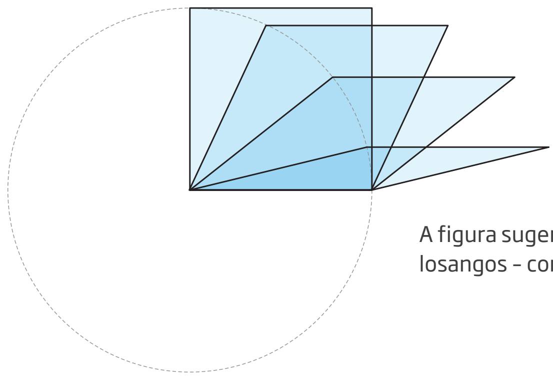


© Sidnei Moura

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{BD} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \overline{AC} \mathbin{//} \overline{BD} \\ \overline{AB} \mathbin{//} \overline{CD} \end{cases}$$

Losangos

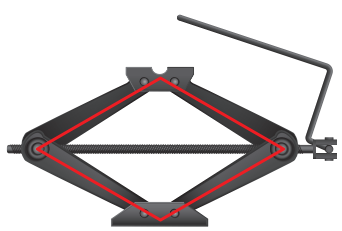
Losangos são paralelogramos cujos lados têm a mesma medida. Por ser um paralelogramo, os lados opostos de um losango são paralelos.

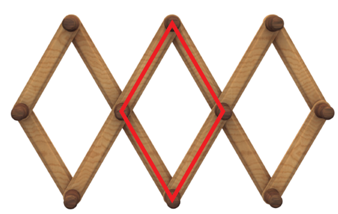


© Sidnei Moura

A figura sugere que há infinitos quadriláteros – no caso, losangos – com todos os lados iguais.

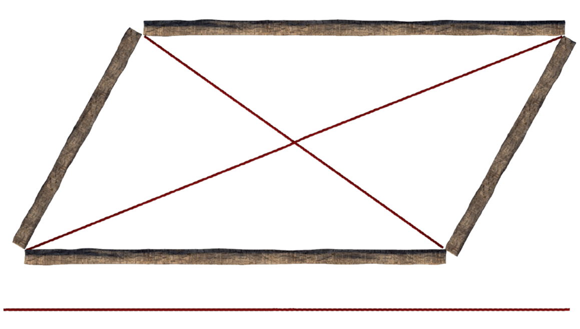
Os losangos são encontrados na estrutura de mecanismos como cabides e macacos de carros (ferramentas utilizadas para efetuar a troca de pneus). No mecanismo do macaco de carro, há uma manivela que faz diminuir ou aumentar o comprimento da diagonal vertical do losango, o que provoca a variação dos ângulos internos e da medida da outra diagonal, fazendo que o carro possa ser levantado e abaixado.



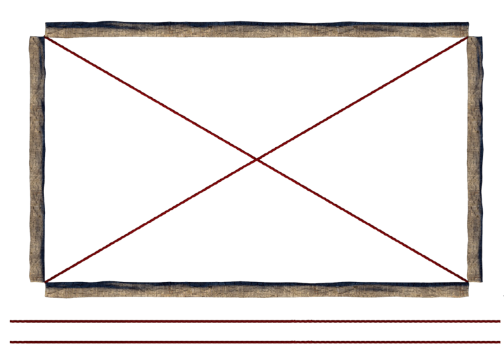


O retângulo na construção de casas na África

Em algumas aldeias de Moçambique – país que fica no sul da África –, para construir casas de base retangular, alguns construtores cortam quatro troncos com dois comprimentos diferentes. Para medir as diagonais do quadrilátero, usam uma corda. Se elas têm o mesmo comprimento, eles sabem que a base da casa é um retângulo.



Com diagonais diferentes, o quadrilátero não é um retângulo.



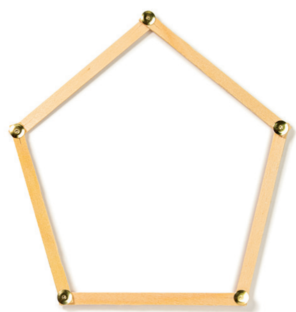
Ilustrações: © Daniel Beneventi

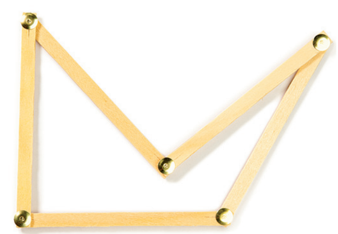
Com diagonais iguais, o quadrilátero é um retângulo.

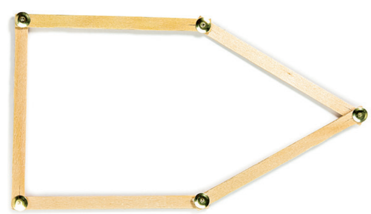
Ao utilizar a corda para verificar se as diagonais têm o mesmo comprimento e se, portanto, a planta é retangular, os moçambicanos estão, na verdade, fazendo uso do princípio da rigidez do triângulo, pois os demais polígonos não são rígidos.

Se você pretende fixar a forma de um polígono por meio de materiais, é preciso triangular.

Fotos: © Paulo Savala

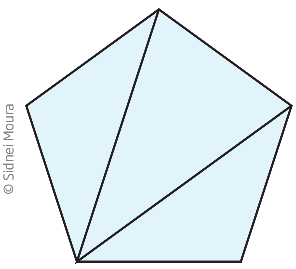






Os pentágonos têm os mesmos lados, mas não são estáveis.

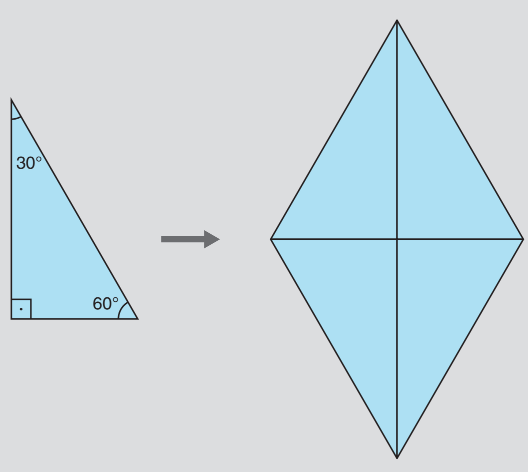
© Sidnei Moura



Pentágono rígido.

DESAFIO

Com quatro triângulos iguais ao da figura abaixo, Gustavo montou um losango.



A soma das medidas dos ângulos internos do losango de Gustavo é:

a) 720° **b)** 360° **c)** 240° **d)** 180°

Saresp 2009. Relatório Pedagogico – Matemática. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2009/ArquivosPdf/Relatorios/2_Saresp%202009%20-%20Relat%C3%B3rio%20Pedag%C3%B3gico_Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Congruência

1 O quadrilátero A.

2 É importante observar que os lados dos triângulos coincidem com as diagonais de retângulos da malha quadriculada. Se dois lados coincidem com diagonais de retângulos de mesmo tamanho, eles têm a mesma medida. Assim, os triângulos ABC e JKL são congruentes.

3 Vértices correspondentes são aqueles que, entre duas figuras congruentes, determinam os lados que têm mesma medida. Note que a posição da figura não importa nesta análise. Desse modo, as correspondências são entre os vértices: A, F e K; B, G e L; C, H e M; D, I e N; E, J e O.

4

a) Falsa. Apesar de todos os retângulos terem os quatro ângulos medindo 90º, para serem congruentes, têm de ter também os lados correspondentes de mesma medida.

b) Falsa. Apesar de os quadrados terem os quatro ângulos medindo 90º, e seus quatro lados contarem com a mesma medida, só são congruentes aqueles cujos lados coincidem, isto é, sobrepõem-se exatamente.

c) Verdadeira, pois todos os ângulos de um retângulo são retos.

d) Verdadeira.

e) Verdadeira.

Atividade 2 - Triângulos e suas aplicações

1 Ao juntar os canudos de diferentes medidas, você notará que é possível construir os triângulos (2, 3, 4); (2, 4, 5) e (3, 4, 5), portanto, 3 triângulos. Já com as medidas 2, 3 e 5 não é possível construir um triângulo porque, ao juntar os pedaços 2 e 3, você obterá um pedaço de comprimento igual ao 5.

2 Resposta pessoal, mas é interessante que observe a presença dos triângulos em diferentes construções, tanto as de grandes estruturas até em obras de arte e objetos de decoração, antes de realizar esse exercício. Como exemplo, você pode citar as estruturas de telhados, como foi apresentado no texto, torres de telefonia, quadros de bicicleta etc.

3 Siga em cada uma das atividades os esquemas apresentados, mas se encontrar dificuldade em resolver o que é proposto aqui, você pode consultar novamente a série de exemplos que antecedem essa atividade.

4 As imagens indicam que só é possível montar um triângulo quando a medida do maior lado é menor que a soma dos outros dois. Essa relação é conhecida como desigualdade triangular.

$2 + 6 < 10$, com essas medidas não é possível montar um triângulo com os canudos.

$4 + 6 = 10$, com essas medidas também não é possível montar um triângulo.

$6 + 8 > 10$ satisfaz à desigualdade triangular; é possível montar um triângulo.

Atividade 3 - Casos de congruência

1 $\overline{BC} = \overline{EC}$ pelo caso de congruência LAL.

2 Como os triângulos ACD e BCD são congruentes pelo caso LAL, então $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{DC}$ é comum e $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ são ângulos retos, então $\overline{BD} = \overline{AD} = 15$.

Atividade 4 - Quadriláteros

1

a) Respostas possíveis: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, trapézio, a forma da pipa, a forma da asa-delta etc.

b) Resposta pessoal. Seu desenho precisa representar cada quadrilátero citado anteriormente.

c) Resposta pessoal. O que você precisa fazer é uma descrição de cada quadrilátero citado no item *a*. As descrições devem abordar tanto as medidas dos lados e ângulos como também se os lados são paralelos ou não. Exemplos: "o quadrado possui os 4 lados com mesma medida", "o losango também tem os quatro lados de mesma medida, mas não é quadrado por causa de seus ângulos". "O trapézio tem apenas dois de seus lados paralelos".

2 Diagonais são segmentos que ligam dois vértices não consecutivos de um polígono.

3 Qualquer quadrilátero tem duas diagonais.

4

a) Cruzam-se no ponto médio.

b) Cruzam-se no ponto médio e têm a mesma medida.

c) Cruzam-se no ponto médio e são perpendiculares.

d) Cruzam-se no ponto médio, têm a mesma medida e são perpendiculares.

Desafio

Resposta correta: **b**. A soma dos quatros ângulos internos de qualquer quadrilátero é sempre igual a 360°. Pode-se verificar do seguinte modo: a soma dos ângulos internos (não reto) do triângulo é igual a 90°; como o losango montado por Gustavo é composto por quatro triângulos, então $90° \cdot 4 = 360°$.

Registro de dúvidas e comentários

Agora você vai conhecer uma das ideias mais importantes da Geometria, que diz respeito à semelhança entre figuras geométricas. Porém, aqui, o termo "semelhante" não corresponde ao uso feito pelo senso comum, ou seja, ele não significa "parecido".

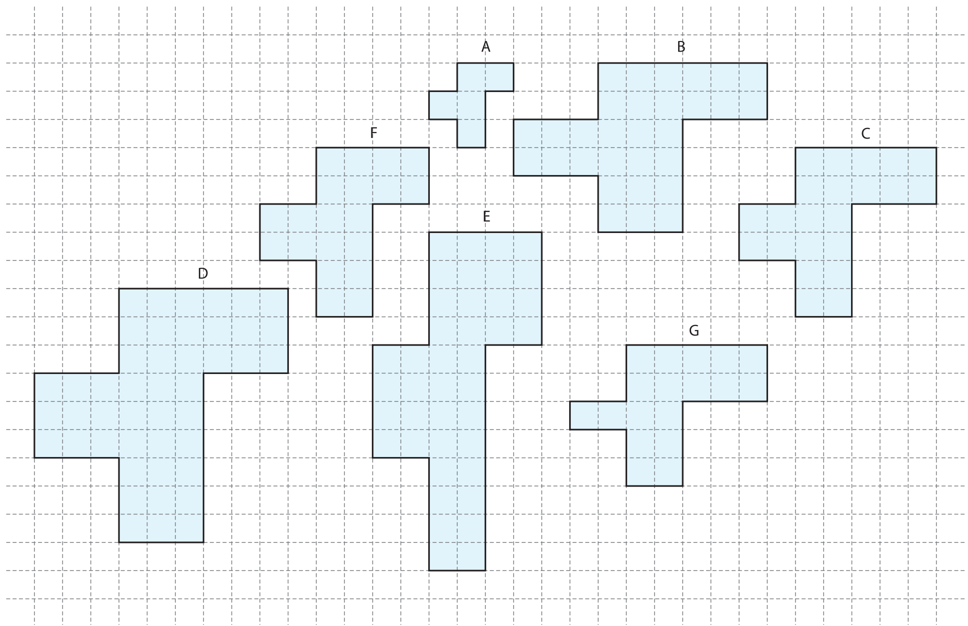
O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Quando alguém se depara com a palavra semelhança, logo pode pensar em si mesmo e em seus pais. Pode ser comum dizer "Eu sou semelhante aos meus pais". Outra aplicação dessa palavra pode ser utilizada em Geografia, quando se verifica um mapa que está em um livro ou pendurado na parede de uma sala de aula, você pode pensar "Este mapa do livro é semelhante ao terreno real".

A palavra "semelhante" tem o mesmo significado nessas duas situações?

Na Geometria, duas figuras são semelhantes se uma puder ser obtida da outra por meio de uma transformação – ampliação ou redução –, preservando sua forma.

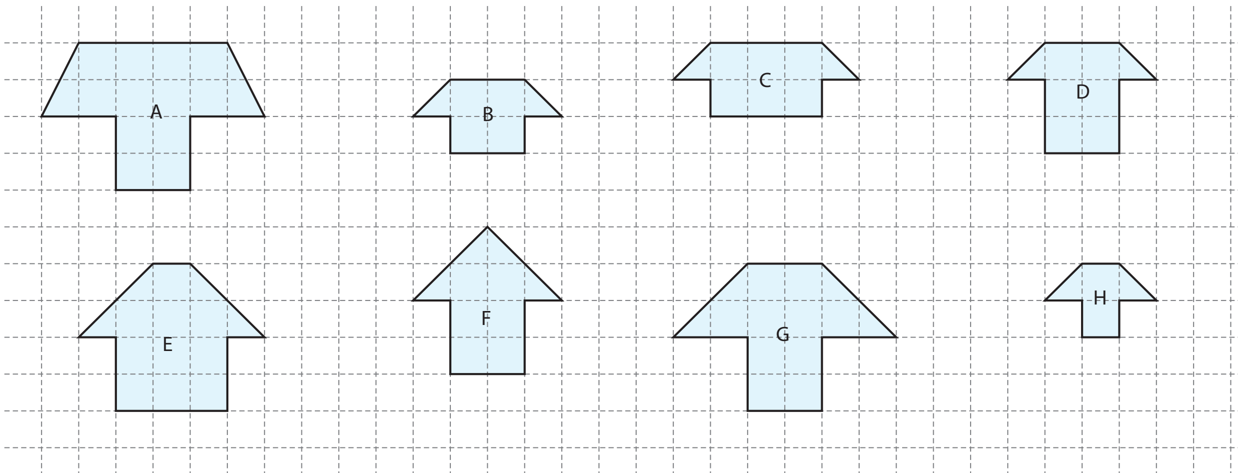
Observe os polígonos a seguir. Quais podem ser considerados reduções ou ampliações da figura F?



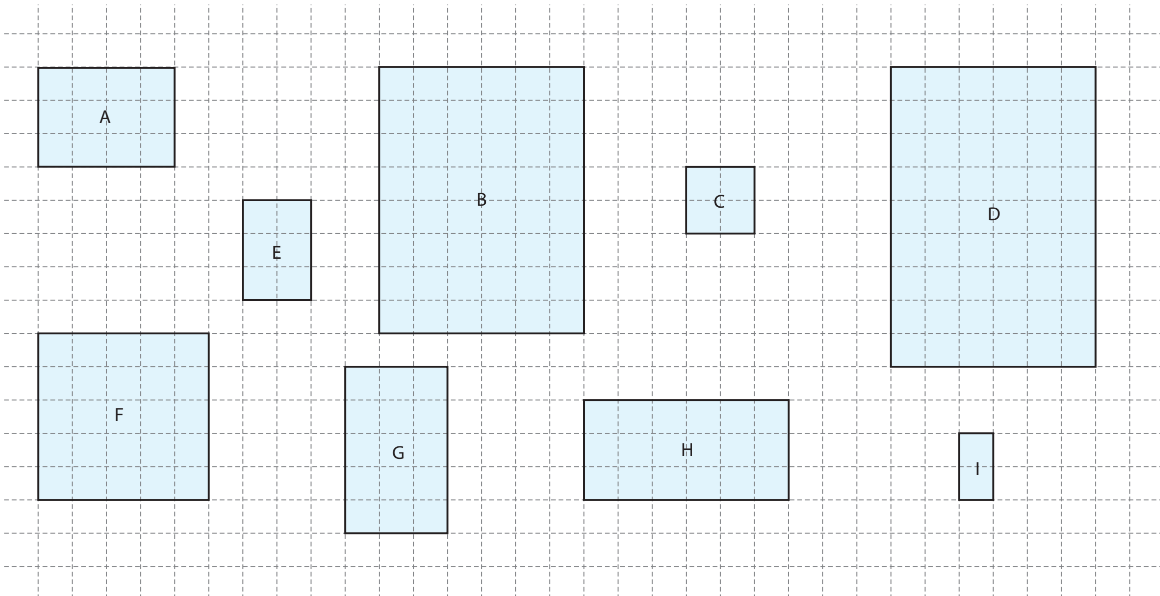
© Sidnei Moura

ATIVIDADE 1 Semelhança nas figuras geométricas

1 Observe os desenhos das casas. Há duas figuras que são a ampliação uma da outra. Circule-as.



2 Observe os quadriláteros a seguir.



Ilustrações: © Sidnei Moura

a) Apenas visualizando, identifique pares de retângulos que pareçam ser semelhantes por ampliação ou redução.

____

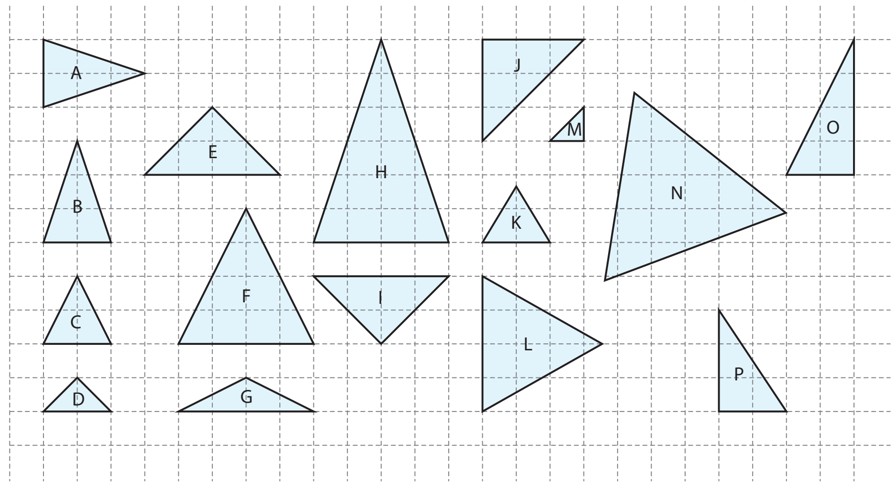
____

b) Confira seu palpite, comparando, em cada caso, a razão entre as medidas dos lados (por exemplo, a do lado menor sobre a do lado maior). Quais razões são equivalentes?

____

____

3 Identifique pares de triângulos que pareçam ser semelhantes por ampliação ou redução.



Triângulos semelhantes

Os estudos sobre triângulos e semelhança entre figuras geométricas são realizados há milhares de anos e seu grande precursor foi Tales de Mileto. Estabelecendo as primeiras proposições sobre fatos geométricos, ele foi capaz de resolver diferentes problemas práticos, como a determinação da distância entre um navio e a praia (situação que você já analisou nesta Unidade) e a medição da altura das pirâmides do Egito, cuja descoberta dependeu de um conceito que você vai estudar a seguir: os triângulos semelhantes.

Para compreender as descobertas de Tales de Mileto sobre triângulos semelhantes, faça os seguintes experimentos:

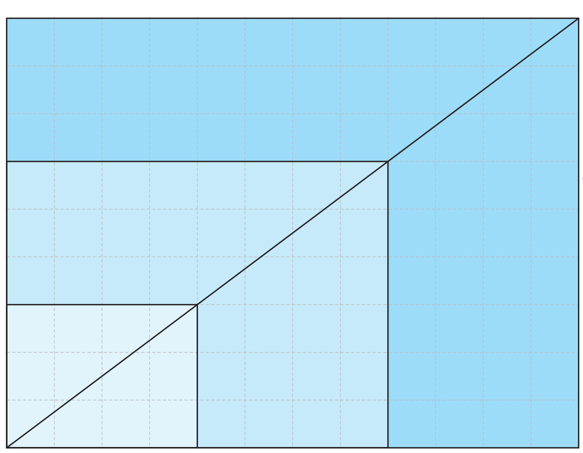
Experimento 1

Recorte três retângulos com as dimensões:

3 cm × 4 cm, 6 cm × 8 cm e 9 cm × 12 cm.

Sobreponha os retângulos que você recortou.

Trace as diagonais desses retângulos a partir de um vértice comum, como na imagem ao lado.



Ilustrações: © Sidnei Moura

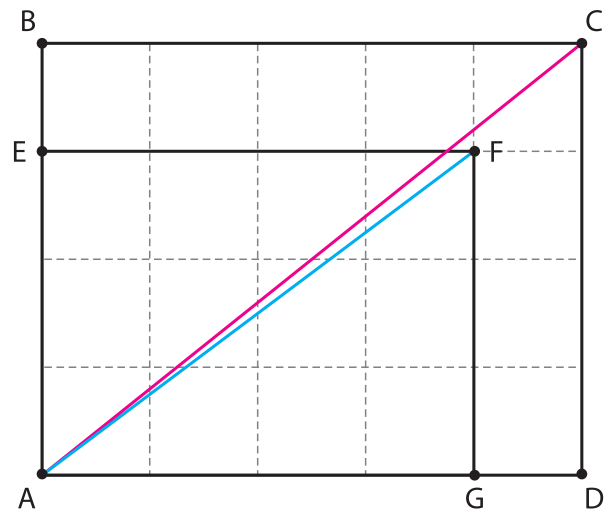
Observe que as diagonais ficam alinhadas, mantendo a mesma direção. Ou seja, o ângulo que a diagonal forma com a base é o mesmo em qualquer um dos três retângulos.

Note também que os lados dos retângulos são **proporcionais**, pois a razão entre o lado menor e o lado maior é **constante**: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$.

Portanto, os retângulos são semelhantes.

Experimento 2

Recorte um retângulo com dimensões 3 cm × 4 cm e outro medindo 4 cm × 5 cm.

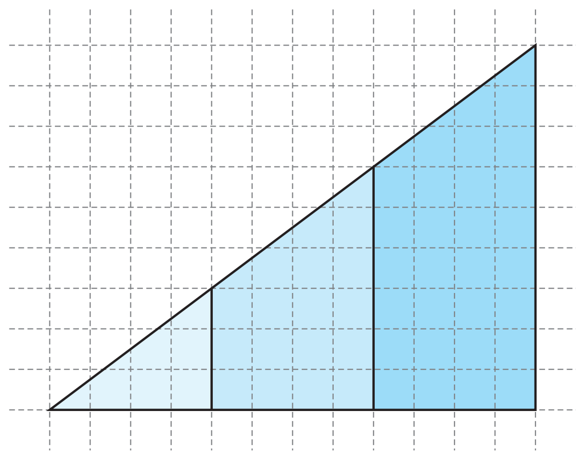


Perceba, na imagem anterior, como as diagonais não formam o mesmo ângulo com as respectivas bases. Em casos como esse, os retângulos não são semelhantes, e seus lados não são proporcionais.

Os ângulos internos de triângulos obtidos da decomposição, pelas diagonais, de retângulos semelhantes têm a mesma medida. Assim:

- um dos ângulos é determinado pelas diagonais e pela base do retângulo;
- o ângulo reto é herdado do retângulo;
- o terceiro ângulo é o que falta para completar 180°.

Lembre-se: a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.



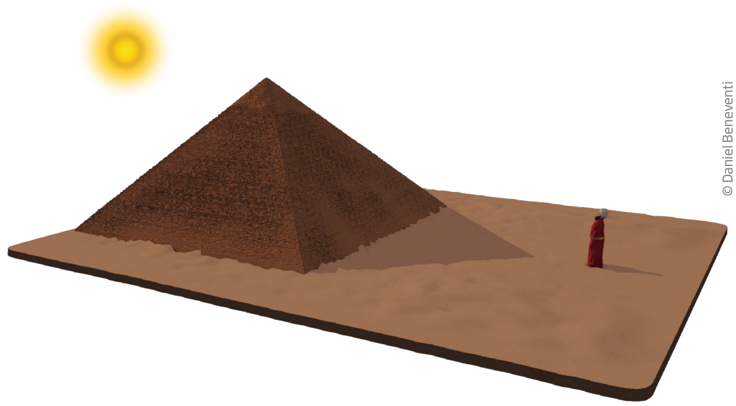
Tales estudou triângulos semelhantes e formulou algumas proposições:

- se os ângulos correspondentes de dois triângulos têm a mesma medida, então esses triângulos são semelhantes;
- se dois triângulos são semelhantes, então as medidas de seus lados correspondentes são proporcionais.

ATIVIDADE 2 Tales e a altura das pirâmides

1 Dizem que Tales surpreendeu os faraós quando esteve no Egito porque foi capaz de medir a altura das pirâmides sem precisar escalá-las. Sua estratégia foi medir as sombras das pirâmides.

Baseando-se nos seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos, explique o procedimento que Tales usou para medir a altura das pirâmides.



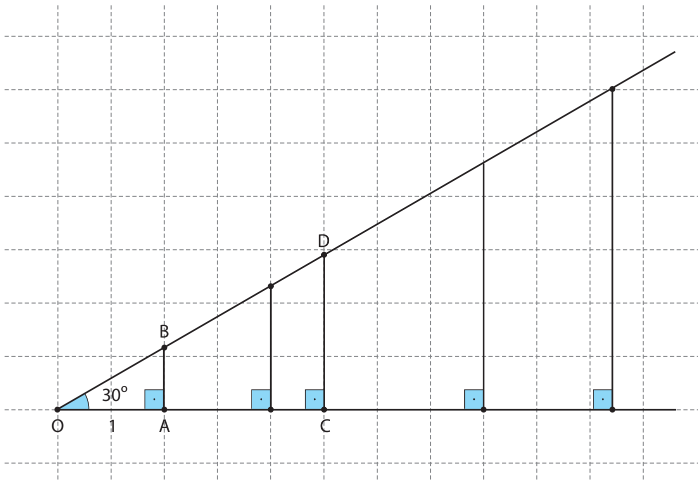
VOCÊ SABIA?

A Pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, é a única construção da lista das sete maravilhas do mundo antigo que continua em pé ainda hoje. Sua construção data de 2550 a.C. Também conhecida como Grande Pirâmide, é a maior e mais antiga das três pirâmides de Gizé. Ela tinha 146,6 m de altura quando foi construída, o que equivale a um edifício de 48 andares, mas, devido a movimentos geológicos, atualmente ela mede 137,16 m.

Aplicações da semelhança de triângulos

Topógrafos e agrimensores utilizavam a semelhança de triângulos para determinar distâncias inacessíveis. Hoje em dia, eles usam modernos aparelhos tecnológicos, como teodolitos e até GPS. Porém, o princípio geométrico que esses aparelhos utilizam é o mesmo usado pelos antigos gregos.

Com base nos triângulos retângulos a seguir, observe:



Todos os triângulos dessa figura são semelhantes, ou seja, têm os mesmos ângulos internos: um ângulo reto; um ângulo de 30°, que é comum a todos; e um terceiro ângulo que mede 60°, totalizando 180°.

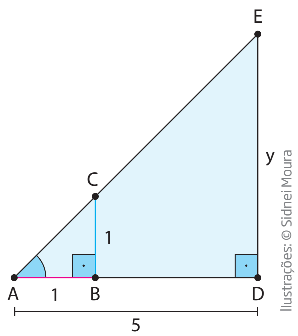
Logo, é possível montar uma proporção com as medidas dos lados correspondentes.

$$\frac{\text{Lado oposto ao ângulo comum}}{\text{Lado adjacente ao ângulo comum}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$$

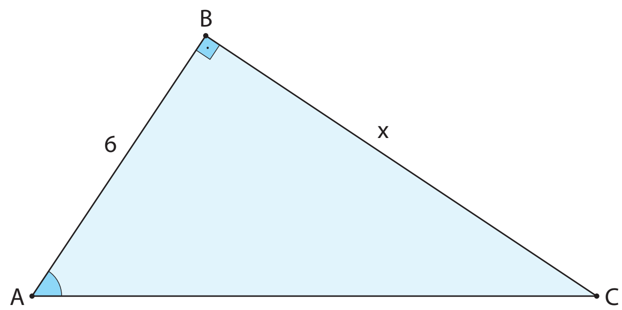
Definindo o valor de apenas um lado do triângulo (por exemplo, $\overline{OA} = 1$ na figura anterior) e do ângulo em comum, os geômetras construíram tabelas para calcular as medidas dos outros lados desse triângulo.

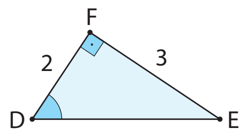
ATIVIDADE 3 Semelhança de triângulos

1 Se $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AD} = 5$, qual é a medida de $\overline{DE}$? Explique.



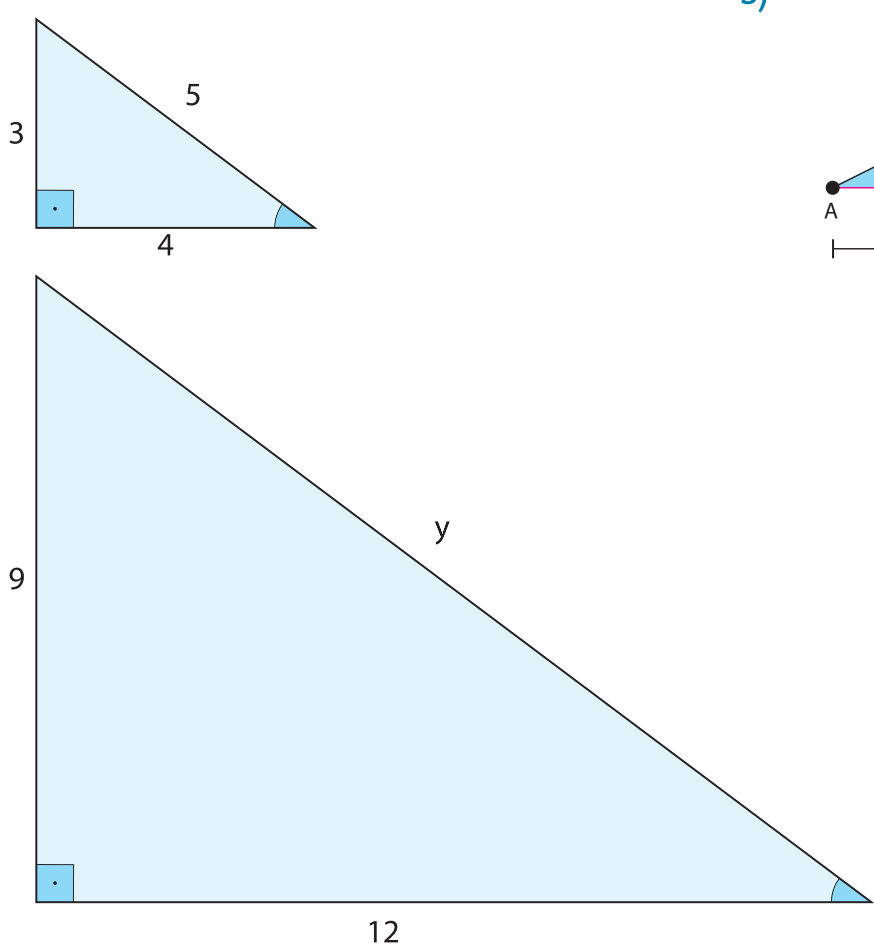
2 Dados os seguintes triângulos, calcule a medida **x**.



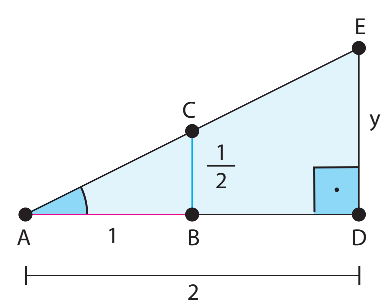


3 Nas figuras a seguir, determine os valores de **y**.

a)



b)



Ilustrações: © Sidnei Moura

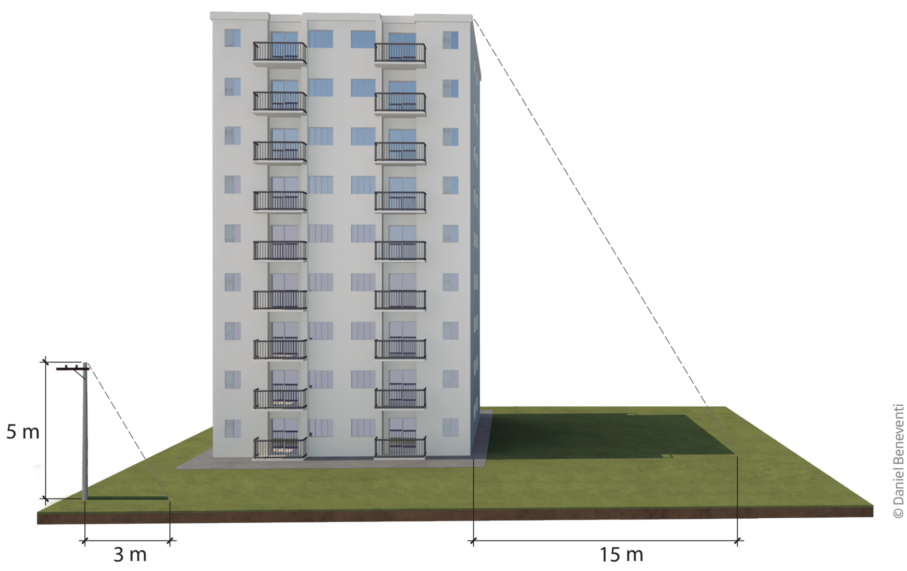
4 Recorte retângulos de papel com as dimensões indicadas em cada item e trace uma diagonal em cada um. Em seguida, sobreponha-os. Indique quais são semelhantes.

a) 2×3 **b)** 5×7 **c)** $7{,}5 \times 10{,}5$

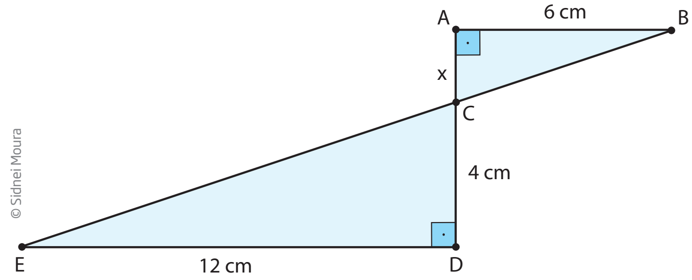
d) 3×4 **e)** 4×6 **f)** 5×8

5 Calcule a altura da árvore maior com base nas medidas da árvore menor.

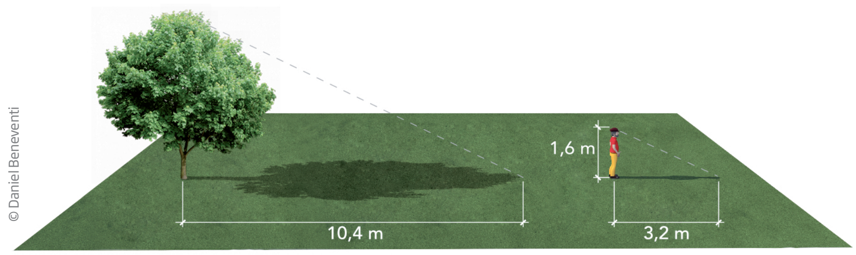
6 Em um terreno plano e em determinada hora do dia, a sombra de um prédio mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste com 5 m de altura mede 3 m. Qual é a altura do edifício?



7 Qual é o valor de **x** na imagem a seguir? Explique como você chegou ao resultado.



8 Seu Belarmino queria determinar a altura de uma árvore. Como era um dia de sol, ele decidiu medir a sua própria sombra e a sombra da árvore. Sabendo que seu Belarmino tem 1,6 m e que sua sombra mediu 3,2 m, calcule a altura da árvore cuja sombra tinha 10,4 m.



DESAFIO

A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, uma altura de 2,2 metros. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metros.
b) 3,0 metros.
c) 5,4 metros.
d) 5,6 metros.
e) 7,04 metros.

Enem 2009, caderno 7 - Azul. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf >. Acesso em: 11 abr. 2014.

PENSE SOBRE...

Como você estudou nesta Unidade, a Geometria está presente no dia a dia de diferentes profissionais: marceneiros, carpinteiros, pedreiros, topógrafos, engenheiros, astrônomos, médicos etc. Além disso, a Geometria também está presente dentro de casa. Você já parou para pensar sobre a geometria dos cômodos de uma casa? E a geometria por trás da estrutura de uma casa ou da distribuição das redes elétrica e hidráulica?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Semelhança nas figuras geométricas

1 São as casas **G** e **H**.

2

a) **C** e **F** são quadrados, portanto semelhantes, e são semelhantes os retângulos: **A** e **B**; **D** e **E**; **H** e **I**.

b) Conferindo a razão entre o lado menor e o lado maior nos quadriláteros, tem-se A: $\frac{3}{4}$; B: $\frac{6}{8}$; C: $\frac{2}{2}$; D: $\frac{6}{9}$; E: $\frac{2}{3}$; F: $\frac{5}{5}$; G: $\frac{3}{5}$; H: $\frac{3}{6}$; I: $\frac{1}{2}$.

As razões equivalentes (iguais) são: $\frac{2}{2} = \frac{5}{5}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ e $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Portanto, os quadriláteros semelhantes são **C** e **F**, **I** e **H**, **E** e **D**, **A** e **B**.

3 São semelhantes os triângulos **C** e **F**; **D** e **E**; **K** e **L**; os triângulos retângulos isósceles **J** e **M**. **A** e **B** são congruentes e, portanto, semelhantes.

Atividade 2 - Tales e a altura das pirâmides

1 Tales considerou que os raios de sol são paralelos, o que o levou a concluir que os raios do sol, a altura da pirâmide e sua sombra formam um triângulo semelhante ao triângulo formado pelos raios do sol, um bastão (cuja altura era conhecida por ele) e sua sombra. Ele calculou a razão entre a medida da altura **h** do bastão e sua sombra **s** para determinar a altura **H** da pirâmide por meio da medida **S** de sua sombra. Ou seja, $\frac{h}{s} = \frac{H}{S}$.

Atividade 3 - Semelhança de triângulos

1 Tem-se que os triângulos ABC e ADE são semelhantes, pois possuem o ângulo $\hat{A}$ comum e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos. Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{5}{y} \Rightarrow y = \overline{DE} = 5.$$

2 Pela figura apresentada, tem-se que, pelo caso ALA, os triângulos ABC e DFE são semelhantes, então:

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = \frac{18}{2} \Rightarrow x = 9$$

3

a) Pelo caso LAL, esses triângulos são semelhantes. Logo,

$$\frac{y}{12} = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{12 \cdot 5}{2} \Rightarrow y = \frac{60}{4} \Rightarrow y = 15$$

b) É possível concluir que os triângulos possuem dois ângulos de mesma medida. Sabendo disto, conclui-se que os triângulos são semelhantes, então:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$$

4 As diagonais coincidem nos seguintes pares de retângulos: 2 × 3 e 4 × 6; 5 × 7 e 7,5 × 10,5.

5 Se a árvore menor mede 3 m, sua sombra mede 5 m, e a sombra da árvore maior, 25 m, então a altura **x** é: $\frac{x}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 15$ m

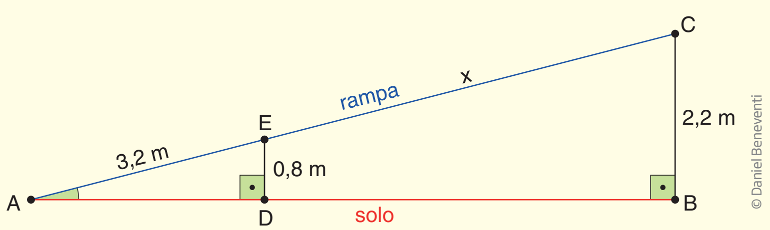
6 $\frac{x}{15} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 15}{3} = 25$ m

7 $\frac{x}{4} = \frac{6}{12} \Rightarrow x = 2$ cm. Os triângulos são semelhantes, pois têm dois ângulos de mesma medida: o ângulo reto e os ângulos $A\hat{C}B$ e $E\hat{C}D$, que são opostos pelo vértice.

8 $\frac{1,6}{3,2} = \frac{x}{10,4} \Rightarrow x = 5,2$ m

Desafio

Alternativa correta: **d**. Segundo enunciado, pode-se montar o esquema ao lado.



Então, tem-se dois triângulos: o ΔABC e o ΔADE. Como o ângulo $\hat{A}$ é comum aos triângulos e os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$ são iguais a 90°, pelo caso AA, tem-se que ΔABC e ΔADE são semelhantes, então os lados correspondentes são proporcionais. Logo,

$$\frac{0,8}{3,2} = \frac{2,2}{3,2 + x} \Rightarrow 0,8 \cdot (3,2 + x) = 2,2 \cdot 3,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,8 \cdot 3,2 + 0,8x = 2,2 \cdot 3,2 \Rightarrow 2,56 + 0,8x = 7,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,8x = 7,04 - 2,56 \Rightarrow 0,8x = 4,48 \Rightarrow$$

$$x = \frac{4,48}{0,8} \Rightarrow x = 5,6 \text{ m}$$

Registro de dúvidas e comentários