CEEJA

EJA
EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

MUNDO DO TRABALHO

MATEMÁTICA

CADERNO DO ESTUDANTE

ENSINO MÉDIO

VOLUME 2

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI) : Secretaria da Educação (SEE), 2015.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 2)

Conteúdo: v. 2. 2ª série do Ensino Médio.
ISBN: 978-85-8312-121-3 (Impresso)
978-85-8312-099-5 (Digital)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

CDD: 372.5

FICHA CATALOGRÁFICA

Tatiane Silva Massucato Arias – CRB-8 / 7262

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Geraldo Alckmin
Governador

Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Márcio Luiz França Gomes
Secretário

Cláudio Valverde
Secretário-Adjunto

Maurício Juvenal
Chefe de Gabinete

Marco Antonio da Silva
Coordenador de Ensino Técnico, Tecnológico e Profissionalizante

Secretaria da Educação

Herman Voorwald
Secretário

Cleide Bauab Eid Bochixio
Secretária-Adjunta

Fernando Padula Novaes
Chefe de Gabinete

Ghisleine Trigo Silveira
Coordenadora de Gestão da Educação Básica

Mertila Larcher de Moraes
Diretora do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Adriana Aparecida de Oliveira, Adriana dos Santos Cunha, Durcilene Maria de Araujo Rodrigues, Gisele Fernandes Silveira Farisco, Luiz Carlos Tozetto, Raul Ravanelli Neto, Sabrina Moreira Rocha, Virginia Nunes de Oliveira Mendes
Técnicos do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Concepção do Programa e elaboração de conteúdos

Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Coordenação Geral do Projeto
Ernesto Mascellani Neto

Equipe Técnica
Cibele Rodrigues Silva, João Mota Jr. e Raphael Lebsa do Prado

Fundação do Desenvolvimento Administrativo – Fundap

Wanderley Messias da Costa
Diretor Executivo

Márgara Raquel Cunha
Diretora Técnica de Formação Profissional

Coordenação Executiva do Projeto
José Lucas Cordeiro

Coordenação Técnica
Impressos: **Dilma Fabri Marão Pichoneri**
Vídeos: **Cristiane Ballerini**

Equipe Técnica e Pedagógica
Ana Paula Alves de Lavos, Carlos Ricardo Bifi, Elen Cristina S. K. Vaz Döppenschmitt, Emily Hozokawa Dias, Fabiana de Cássia Rodrigues, Fernando Manzieri Heder, Herbert Rodrigues, Jonathan Nascimento, Laís Schalch, Liliane Bordignon de Souza, Maria Helena de Castro Lima, Paula Marcia Ciacco da Silva Dias, Rodnei Pereira, Selma Borghi Venco e Walkiria Rigolon

Autores
Arte: Roseli Ventrella e Terezinha Guerra; *Biologia*: José Manoel Martins, Marcos Egelstein, Maria Graciete Carramate Lopes e Vinicius Signorelli; *Filosofia*: Juliana Litvin de Almeida e Tiago Abreu Nogueira; *Física*: Gustavo Isaac Killner; *Geografia*: Roberto Giansanti e Silas Martins Junqueira; *História*: Denise Mendes e Márcia Juliana Santos; *Inglês*: Eduardo Portela; *Língua Portuguesa*: Kátia Lomba Brakling; *Matemática*: Antonio José Lopes; *Química*: Olímpio Salgado; *Sociologia*: Dilma Fabri Marão Pichoneri e Selma Borghi Venco

Gestão do processo de produção editorial

Fundação Carlos Alberto Vanzolini

Mauro de Mesquita Spínola
Presidente da Diretoria Executiva

José Joaquim do Amaral Ferreira
Vice-Presidente da Diretoria Executiva

Gestão de Tecnologias em Educação

Direção da Área
Guilherme Ary Plonski

Coordenação Executiva do Projeto
Angela Sprenger e Beatriz Scavazza

Gestão do Portal
Luis Marcio Barbosa, Luiz Carlos Gonçalves, Sonia Akimoto e Wilder Rogério de Oliveira

Gestão de Comunicação
Ane do Valle

Gestão Editorial
Denise Blanes

Equipe de Produção
Editorial: Carolina Grego Donadio e Paulo Mendes
Equipe Editorial: Adriana Ayami Takimoto, Airton Dantas de Araújo, Alícia Toffani, Amarilis L. Maciel, Ana Paula S. Bezerra, Andressa Serena de Oliveira, Bárbara Odria Vieira, Carolina H. Mestriner, Caroline Domingos de Souza, Cíntia Leitão, Cláudia Letícia Vendrame Santos, David dos Santos Silva, Eloiza Mendes Lopes, Érika Domingues do Nascimento, Fernanda Brito Bincoletto, Flávia Beraldo Ferrare, Jean Kleber Silva, Leonardo Gonçalves, Lorena Vita Ferreira, Lucas Puntel Carrasco, Luiza Thebas, Mainã Greeb Vicente, Marcus Ecclissi, Maria Inez de Souza, Mariana Padoan, Natália Kessuani Bego Maurício, Olivia Frade Zambone, Paula Felix Palma, Pedro Carvalho, Polyanna Costa, Priscila Risso, Raquel Benchimol Rosenthal, Tatiana F. Souza, Tatiana Pavanelli Valsi, Thaís Nori Cornetta, Thamires Carolline Balog de Mattos e Vanessa Bianco Felix de Oliveira
Direitos autorais e iconografia: Ana Beatriz Freire, Aparecido Francisco, Fernanda Catalão, José Carlos Augusto, Larissa Polix Barbosa, Maria Magalhães de Alencastro, Mayara Ribeiro de Souza, Priscila Garofalo, Rita De Luca, Roberto Polacov, Sandro Carrasco e Stella Mesquita
Apoio à produção: Aparecida Ferraz da Silva, Fernanda Queiroz, Luiz Roberto Vital Pinto, Maria Regina Xavier de Brito, Natália S. Moreira e Valéria Aranha
Projeto gráfico-editorial e diagramação: R2 Editorial, Michelangelo Russo e Casa de Ideias

CTP, Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado de São Paulo

Caro(a) estudante

É com grande satisfação que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em parceria com a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação, apresenta os Cadernos do Estudante do Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho para os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs). A proposta é oferecer um material pedagógico de fácil compreensão, que favoreça seu retorno aos estudos.

Sabemos quanto é difícil para quem trabalha ou procura um emprego se dedicar aos estudos, principalmente quando se parou de estudar há algum tempo.

O Programa nasceu da constatação de que os estudantes jovens e adultos têm experiências pessoais que devem ser consideradas no processo de aprendizagem. Trata-se de um conjunto de experiências, conhecimentos e convicções que se formou ao longo da vida. Dessa forma, procuramos respeitar a trajetória daqueles que apostaram na educação como o caminho para a conquista de um futuro melhor.

Nos Cadernos e vídeos que fazem parte do seu material de estudo, você perceberá a nossa preocupação em estabelecer um diálogo com o mundo do trabalho e respeitar as especificidades da modalidade de ensino semipresencial praticada nos CEEJAs.

Esperamos que você conclua o Ensino Médio e, posteriormente, continue estudando e buscando conhecimentos importantes para seu desenvolvimento e sua participação na sociedade. Afinal, o conhecimento é o bem mais valioso que adquirimos na vida e o único que se acumula por toda a nossa existência.

Bons estudos!

Secretaria da Educação

Secretaria de Desenvolvimento
Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

APRESENTAÇÃO

Estudar na idade adulta sempre demanda maior esforço, dado o acúmulo de responsabilidades (trabalho, família, atividades domésticas etc.), e a necessidade de estar diariamente em uma escola é, muitas vezes, um obstáculo para a retomada dos estudos, sobretudo devido à dificuldade de se conciliar estudo e trabalho. Nesse contexto, os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs) têm se constituído em uma alternativa para garantir o direito à educação aos que não conseguem frequentar regularmente a escola, tendo, assim, a opção de realizar um curso com presença flexível.

Para apoiar estudantes como você ao longo de seu percurso escolar, o Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho produziu materiais especificamente para os CEEJAs. Eles foram elaborados para atender a uma justa e antiga reivindicação de estudantes, professores e sociedade em geral: poder contar com materiais de apoio específicos para os estudos desse segmento.

Esses materiais são seus e, assim, você poderá estudar nos momentos mais adequados – conforme os horários que dispõe –, compartilhá-los com sua família, amigos etc. e guardá-los, para sempre estarem à mão no caso de futuras consultas.

Os Cadernos do Estudante apresentam textos que abordam e discutem os conteúdos propostos para cada disciplina e também atividades cujas respostas você poderá registrar no próprio material. Nesses Cadernos, você ainda terá espaço para registrar suas dúvidas, para que possa discuti-las com o professor sempre que for ao CEEJA.

Os vídeos que acompanham os Cadernos do Estudante, por sua vez, explicam, exemplificam e ampliam alguns dos assuntos tratados nos Cadernos, oferecendo informações que vão ajudá-lo a compreender melhor os conteúdos. São, portanto, um importante recurso com o qual você poderá contar em seus estudos.

Além desses materiais, o Programa EJA – Mundo do Trabalho tem um *site* exclusivo, que você poderá visitar sempre que desejar: <http://www.ejamundodotrabalho.sp.gov.br>. Nele, além de informações sobre o Programa, você acessa os Cadernos do Estudante e os vídeos de todas as disciplinas, ao clicar na aba **Conteúdo CEEJA**. Já na aba **Conteúdo EJA**, poderá acessar os Cadernos e vídeos de Trabalho, que abordam temas bastante significativos para jovens e adultos como você.

Os materiais foram produzidos com a intenção de estabelecer um diálogo com você, visando facilitar seus momentos de estudo e de aprendizagem. Espera-se que, com esse estudo, você esteja pronto para realizar as provas no CEEJA e se sinta cada vez mais motivado a prosseguir sua trajetória escolar.

SUMÁRIO

TENHO DÚVIDAS

JÁ ESTUDEI

Caro(a) estudante,

Bem-vindo ao Volume 2 de Matemática – Ensino Médio – do CEEJA. Neste Caderno, a Matemática conversará com as outras ciências quase o tempo todo. Aproveite para entender melhor a linguagem matemática, e sua compreensão dos conceitos apresentados nas outras disciplinas de Ciências Exatas e Biológicas será facilitada.

Neste Caderno, serão trabalhados alguns conceitos matemáticos específicos do Ensino Médio, ou seja, conceitos novos. Para melhor entendê-los, é preciso ter muita atenção e dedicação aos estudos.

Na Unidade 1, você iniciará o estudo das sequências e regularidades matemáticas. Verá que esse assunto é muito comum em nosso cotidiano, e a análise de algumas sequências será facilitada pelo uso da Geometria.

Na Unidade 2, conhecerá dois tipos de sequências especiais, chamadas progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG). É possível que você perceba que elas apresentam sempre as mesmas formas padronizadas de cálculos, conhecidas como regularidades.

Na Unidade 3, o foco será o estudo das funções. Serão apresentadas duas novas funções, cujas leis estão ligadas à potenciação: a função exponencial e a função logarítmica, que têm aplicações em situações cotidianas e científicas.

Na Unidade 4, será apresentado um assunto novo: o estudo sobre matrizes e suas operações. Você perceberá que esse conceito vincula-se ao funcionamento de tabelas e de planilhas.

Na Unidade 5, este Caderno será finalizado com o estudo da geometria tridimensional, também chamada geometria espacial. Você verá, ainda, cinco poliedros especiais, regulares, conhecidos como poliedros de Platão.

Bons estudos!

UNIDADE 1

SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES

TEMAS

Introdução

No cotidiano, existem algumas situações nas quais se pode estabelecer uma ordem entre alguns elementos, sejam eles objetos ou números. Em Matemática, essa ordem se chama sequência.

As sequências foram estudadas por matemáticos e utilizadas em inúmeras atividades profissionais e científicas.

Nos primeiros anos escolares, você aprendeu diversos tipos de sequências, por exemplo, a sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, ...). Nesse caso, você consegue afirmar que o próximo mês é "setembro".

Há outras sequências, como a tabuada do 7 (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ...), que, por serem numéricas e simples, também permitem a determinação do próximo termo. Nesse caso, bastaria acrescentar 7 ao termo anterior para obter o seguinte: 49 + 7 = 56.

Nesta Unidade, você estudará variadas sequências e descobrirá suas regularidades. Assim, além de resolver problemas práticos, desenvolverá e exercitará o raciocínio lógico-matemático.

Sequências TEMA 1

Você já estudou tabuadas, funções e outras leis matemáticas que possibilitam determinar valores conhecidos ou desconhecidos. Agora vai usar esses conhecimentos para estudar sequências, observar seu comportamento e verificar suas regularidades.

Assim, você aprenderá a diferenciar uma sequência qualquer de uma sequência numérica, percebendo que há inúmeras sequências desse tipo em nosso cotidiano.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já observou em que anos são realizados os jogos da Copa do Mundo de futebol masculino? Em caso negativo, observe os anos em que as últimas dez competições foram realizadas: 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014. Em sua opinião, existe um padrão nesse conjunto de datas?

Sequências e leis de formação

A palavra **sequência** faz parte do vocabulário usado no dia a dia e é empregada, por exemplo, para se referir à "sequência dos capítulos de uma novela" ou à "sequência de jogos de um campeonato". Em geral, uma "sequência de acontecimentos" sugere um tipo de ordenação e a ideia de 1º, 2º, 3º, ou seja, uma associação entre o que está sequenciado e os números naturais positivos (1, 2, 3, ...). Agora, tente calcular mentalmente o valor do 100º termo.

Ao longo da história, algumas sequências despertaram a curiosidade e a atenção de matemáticos e de outros cientistas, como astrônomos e economistas. Há sequências de muitos tipos, por exemplo, a sequência dos múltiplos de 3 (3, 6, 9, 12, ...).

É possível perceber a regularidade dessa sequência e determinar o valor do próximo termo.

Outras sequências progridem seguindo um padrão constante, mas que, logo nos primeiros termos, já alcançam quantidades maiores:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

ATIVIDADE 1 Início da observação

1 Da sequência dada anteriormente, ou seja, (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), pense sobre as seguintes questões e responda:

a) O 10º termo dessa sequência é maior ou menor do que 1.000?

---

b) Compare o 10º termo dessa sequência com o 10º termo da sequência (7, 14, 21, 28, ...). Qual deles é o menor?

---

2 Há sequências que, ainda que se saiba como funcionam, dão algum trabalho para encontrar o valor de determinado termo. É o caso da **sequência de Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Mas não é difícil descobrir como ela funciona.

a) Tente descobrir e explique.

____

____

b) Utilizando o que você descobriu no item anterior, descubra o valor do 9º e do 10º termos.

____

c) Explique por que não é simples calcular mentalmente qual é o 100º termo.

____

____

VOCÊ SABIA?

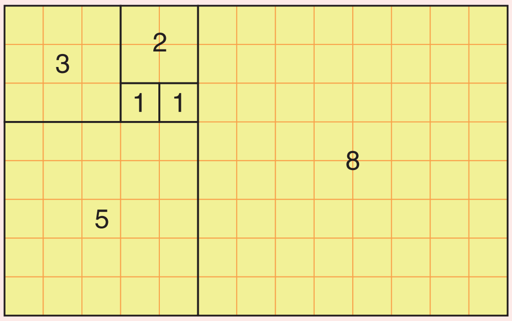
Uma das sequências mais famosas da Matemática é a **sequência de Fibonacci** (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...), cujo nome homenageia seu criador, Leonardo de Pisa (aprox. 1170-1250), mais conhecido como Fibonacci. Ele também foi um dos responsáveis pela introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa medieval, no ano de 1202.

A sequência que leva seu nome foi criada para descrever o crescimento de uma população de coelhos ao longo de um ano.

A figura abaixo está relacionada à sequência de Fibonacci.

Um dos enigmas do livro *O Código da Vinci* e do filme de mesmo título (direção de Ron Howard, 2006) utiliza a sequência de Fibonacci.

Leonardo de Pisa.



Retângulo de Fibonacci.

A sequência de números primos

Há ainda sequências que, mesmo sendo estudadas por matemáticos há mais de 2 mil anos, ainda hoje guardam mistérios e desafiam as mentes mais curiosas. Esse é o caso da sequência dos **números primos**. Observe a seguir:

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots)$$

O que instiga os matemáticos é o fato de que sua maior regularidade é não ter nenhuma regularidade aparente. Para encontrar o valor de determinado termo é necessário utilizar trabalhosos métodos de cálculo. Se o termo for muito grande, como o milionésimo, descobri-lo é uma tarefa que exige a utilização de programas de computação.

Um número primo é um número natural que tem apenas dois divisores: 1 e o próprio número.

O número 9 tem três divisores: (1, 3, 9), portanto, não é primo; diz-se que 9 é um número composto, pois pode ser decomposto como $3 \cdot 3$; 10 também é composto, pois pode ser decomposto como $2 \cdot 5$, tendo quatro divisores (1, 2, 5, 10).

Já o número 13 só tem dois divisores: 1 e o próprio 13, podendo ser decomposto apenas como $1 \cdot 13$; portanto, ele é primo.

A linguagem das sequências

Uma sequência pode ser representada por uma lista ordenada de números entre parênteses, separados por vírgula. A sequência (1930, 1934, 1938, 1950, 1954, 1958, 1962, ..., 2014, ...) indica os anos de Copa do Mundo de futebol masculino, desde o primeiro campeonato, em 1930, até o ocorrido no Brasil em 2014.

© Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Nessa sequência, o **valor numérico** do primeiro termo é 1930; do segundo termo, 1934; do terceiro, 1938; do quarto, 1950; e assim por diante.

São usados uma **letra minúscula** para identificar um termo da sequência e um **número subscrito** à direita da letra para indicar a posição desse termo.

$a_1 \leftarrow$ número subscrito
$\uparrow$
letra minúscula

Assim:

$a_1 = 1930 \rightarrow$ significa que o primeiro termo é igual a 1930;

$a_2 = 1934 \rightarrow$ significa que o segundo termo é igual a 1934;

$a_3 = 1938 \rightarrow$ significa que o terceiro termo é igual a 1938;

$a_4 = 1950 \rightarrow$ significa que o quarto termo é igual a 1950;

...

a_{10} indica o décimo termo e, no caso, refere-se ao ano da 10ª Copa do Mundo.

As Copas do Mundo de futebol masculino e as Olimpíadas ocorrem a cada quatro anos – essa é a regularidade desses eventos. Mas observe que a regularidade da sequência – cada termo é igual ao anterior mais 4 (anos) – foi quebrada no quarto termo. Isso porque, devido à 2ª Guerra Mundial, não foram realizadas competições nos anos de 1942 e 1946. O padrão segundo o qual as Copas são realizadas de 4 em 4 anos foi retomado a partir de 1950, quando a Copa do Mundo aconteceu no Brasil.

Um dos objetivos do estudo das sequências é determinar o valor de certo termo. Em geral, isso é possível se a sequência tem um padrão, ou seja, uma regularidade que possa ser expressa por uma **lei de formação** ou uma fórmula.

Para expressar um termo qualquer da sequência, usa-se a letra **n** subscrita.

a_n é o "**enésimo** termo", ou seja, um termo que está na posição **n** da sequência.

Por exemplo, observe a sequência de números pares (2, 4, 6, ...). Essa é uma sequência infinita de números, mas é possível encontrar um padrão para calcular qualquer número pertencente a ela. Assim:

Posição	Cálculo	Valor na sequência
1	$2 \cdot 1$	2
2	$2 \cdot 2$	4
3	$2 \cdot 3$	6
⋮	⋮	⋮
n	$2 \cdot n$	2n

← Lei de formação

ATIVIDADE 2 Padronização de uma sequência

1 Tente encontrar um padrão para a sequência de números ímpares, a partir do 3.

2 Sabendo que uma fábrica produziu 1.000 pares de sapatos em janeiro e que sua produção aumenta em 50 pares por mês, responda:

a) Qual seria a lei de formação para a sequência que representa a produção mensal de sapatos dessa fábrica?

b) Qual será a produção de sapatos dessa fábrica em agosto?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Início da observação

1

a) Um termo é sempre o dobro do anterior, então os 10 primeiros termos são: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...). Assim, o 10º termo é menor que 1.000.

b) A sequência (7, 14, 21, 28, ...) é uma sequência dos múltiplos de 7; logo, seu 10º termo é igual a $7 \cdot 10 = 70$: (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, ...). Portanto, o 10º termo dessa sequência é menor que o 10º termo da sequência anterior.

2

a) Os elementos, a partir do 3º, são formados pela soma dos dois termos anteriores. Assim:

$1 + 1 = 2$ (soma do 1º e do 2º termos)

$1 + 2 = 3$ (soma do 2º e do 3º termos)

$2 + 3 = 5$ (soma do 3º e do 4º termos)

b) Seguindo a construção do item anterior, verifica-se a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...). Logo, o 9º termo é igual a 34, e o 10º termo, igual a 55.

c) Em uma sequência como a de Fibonacci, para descobrir determinado termo, é preciso conhecer os dois termos que o antecedem. Não há uma regra geral que permita dizer qual é o 100º termo, como ocorre, por exemplo, com os números pares (se tiver dúvida sobre essa regra geral, relembre-a no texto *A linguagem das sequências*). No caso da sequência de Fibonacci, para descobrir o 100º termo, é necessário saber o 99º e o 98º, o que tem o mesmo grau de dificuldade.

Atividade 2 - Padronização de uma sequência

1 Seguindo a construção do exemplo dos números pares, tem-se:

Posição	Cálculo	Valor na sequência
1	$2 \cdot 1 + 1$	3
2	$2 \cdot 2 + 1$	5
3	$2 \cdot 3 + 1$	7
⋮	⋮	⋮
n	$2 \cdot n + 1$	$2n + 1$

2

a) Para entender a produção dessa fábrica, pode-se organizar os dados como na tabela a seguir.

1º mês	janeiro	1.000	
2º mês	fevereiro	$1.050 = 1.000 + 1 \cdot 50 = 1.000 + (2 - 1) \cdot 50$	
3º mês	março	$1.100 = 1.000 + 2 \cdot 50 = 1.000 + (3 - 1) \cdot 50$	
...	...	...	
12º mês	dezembro	$1.550 = 1.000 + 11 \cdot 50 = 1.000 + (12 - 1) \cdot 50$	
nº mês		$1.000 + (n - 1) \cdot 50$	← Lei de formação

A última coluna mostra que o número multiplicado por 50 é o antecessor do número do mês $(n - 1)$. Por exemplo, no 12º mês, é preciso fazer a multiplicação por 11, ou seja, são produzidos $1.000 + 11 \cdot 50 = 1.550$ pares de sapatos.

b) Sabendo que o mês de agosto é o 8º mês do ano e utilizando a lei de formação encontrada no item anterior $[1.000 + (n - 1) \cdot 50]$, é possível calcular:

$1.000 + (8 - 1) \cdot 50 = 1.000 + 7 \cdot 50 = 1.000 + 350 = 1.350$ pares.

Portanto, em agosto, a produção dessa fábrica será de 1.350 pares de sapatos.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

O uso de sequências é muito frequente na Matemática. Elas podem aparecer, também, associadas a figuras geométricas, pois visualizá-las nessa disposição facilita a contagem. É esse assunto que você verá neste tema.

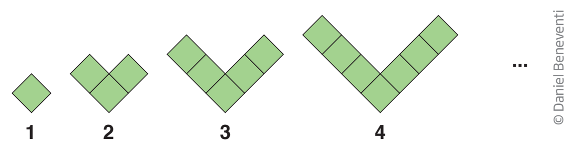
O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já reparou que as pilhas de tijolos costumam ser dispostas na forma de um bloco retangular? Organizar um conjunto de objetos com base em uma disposição geométrica é um procedimento comum também para organizar frutas nas barracas de uma feira livre ou em um supermercado. Procure se lembrar de outros exemplos em que essa disposição é usada.

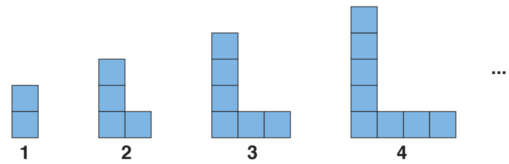
Números figurados

Algumas sequências se baseiam em configurações geométricas de figuras, como é o caso das sequências de tipos **V** e **L**:

Sequência tipo **V**



Sequência tipo **L**



Os valores numéricos dos termos dessas sequências são determinados pelo número de quadradinhos de cada figura. O número que você vê abaixo delas, no entanto, não são os valores numéricos; trata-se do número dos termos: primeiro, segundo, terceiro etc.

A notação utilizada para representar essas sequências será a letra **a** para os termos da sequência **V**, e **b** para representar os termos da sequência **L**. Perceba que:

- o quarto termo da sequência **V** possui 7 quadradinhos, ou seja, $a_4 = 7$;
- o terceiro termo da sequência **L** possui 6 quadradinhos, ou seja, $b_3 = 6$.

Na atividade a seguir, você vai resolver desafios com base nessas sequências figuradas.

ATIVIDADE 1 Sequências

1 Retome as sequências figuradas do tipo **V** e **L** da página anterior para realizar os exercícios abaixo.

a) Quantos quadradinhos tem o 5º termo da sequência **V**?

b) Quantos quadradinhos tem o 5º termo da sequência **L**?

c) Qual termo tem mais quadradinhos: o 6º termo da sequência **V** ou o da sequência **L**?

d) Escreva a quantidade de quadradinhos dos 10 primeiros termos da sequência **V**.

e) Escreva a quantidade de quadradinhos dos 10 primeiros termos da sequência **L**.

f) Escreva, explicando com suas palavras, qual é a regra de formação das sequências **V** e **L**.

2 Determine o 1º termo da sequência formada pelos múltiplos positivos de 5 maiores que 50.

3 Seja a sequência (1, 4, 7, 10, 13, ...).

a) Explique qual é a regra de formação dessa sequência.

b) Determine o próximo termo.

c) Determine o 12º termo.

4 Considere a sequência dos anos em que se realizaram as Copas do Mundo de futebol masculino:

(1930, 1934, 1938, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, ..., 2014, ...)

a) Qual é o valor numérico do 9º termo da sequência?

---

b) Qual é o termo cujo valor numérico é 2002?

---

c) Qual é o termo correspondente ao ano em que o Brasil organizou a última Copa do Mundo?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Sequências

1

a) Os números que formam a sequência **V** são (1, 3, 5, 7, ...), ou seja, formam a sequência dos números ímpares. Portanto, o próximo termo é 9. Você pode obter esse resultado desenhando o 5º termo com base no 4º; para se passar de um termo a outro, acrescentam-se 2 quadradinhos nas extremidades do **V**.

b) Os números que formam a sequência **L** são (2, 4, 6, 8, ...), ou seja, formam a sequência dos números pares. Portanto, o próximo termo é 10. Você pode obter esse resultado desenhando o 5º termo com o acréscimo de 2 quadradinhos, em relação ao 4º termo, um em cada extremidade do **L**.

c) O da sequência **L**, pois o 6º termo da sequência **V** é 11, e o 6º termo da sequência **L** é 12; 12 > 11.

d) Para completar a sequência, acrescenta-se 2 ao termo anterior: (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19). Cada número da sequência representa o total de quadradinhos do termo ao qual se refere.

e) Para completar a sequência, acrescenta-se 2 ao termo anterior: (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20). Cada número da sequência representa o total de quadradinhos do termo ao qual se refere.

f) Existe mais de uma possibilidade de resposta. Uma delas é: nas duas sequências, cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior com o acréscimo de 2. Na sequência **V**, o 1º termo é igual a 1; na sequência **L**, o 1º termo é igual a 2. Portanto, a fórmula que representa a lei de formação da sequência **V** é $V = 2n$ e da sequência **L** é $L = 2n + 1$, com $n \geq 1$ para ambas.

2 Os múltiplos positivos de 5 formam uma sequência de 5 em 5; todo múltiplo de 5 termina em 0 ou 5. Então, o 1º termo da sequência dos múltiplos positivos de 5, maiores que 50, é 55.

3

a) A regra de formação da sequência é: cada termo a partir do 1º é igual ao anterior mais 3: 1 + 3 = 4; 4 + 3 = 7; 7 + 3 = 10; 10 + 3 = 13; e assim por diante. A fórmula que representa a lei de formação é n + 3.

HORA DA CHECAGEM

b) O próximo, que é o 6º termo, é igual a 13 + 3 = 16.

c) O 12º termo é 34. Para descobri-lo, você pode escrever a sequência com os 12 primeiros termos ou usar uma fórmula que será estudada adiante: (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, ...).

4

a) $A_9 = 1970$

b) As Copas do Mundo ocorrem desde 1930, de 4 em 4 anos. Como você já viu, não foram realizadas Copas do Mundo em 1942 e 1946 por causa da 2ª Guerra Mundial. Considerando essas informações e mantendo o padrão de somar 4 ao termo anterior a partir de 1950, tem-se a sequência: (1930, 1934, 1938, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, **2002**, 2006, 2010, 2014, ...). Portanto, 2002 é o 17º termo dessa sequência.

c) 2014, ano em que o Brasil organizou a última Copa do Mundo no País, é o 20º termo da sequência.

Registro de dúvidas e comentários

Neste tema, serão associadas sequências de figuras a sequências numéricas. Como ponto de partida têm-se configurações curiosas, estudadas desde Pitágoras, na Grécia Antiga. Você perceberá que é possível determinar a quantidade de latas em uma pilha organizada, sem a necessidade de contá-las uma a uma.

Observará também configurações de pontos ou quadradinhos agrupados para formar um quadrado, um triângulo ou uma escada e aprenderá a relacioná-los. Mas o mais importante é que você desenvolverá o olhar e o raciocínio para prever e determinar quantidades desconhecidas por meio da Álgebra e da Lógica.

As configurações de quadrados que têm regularidade aparecem em problemas curiosos e também nas artes.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

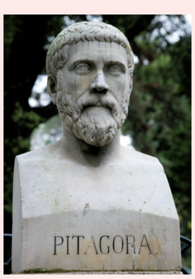
Você conhece as potências de números e o comportamento de algumas sequências numéricas. Agora, pense em um jogo de boliche. Nele, os pinos são organizados sempre da mesma forma. Você se lembra de como ela é? Ela apresenta alguma sequência?

Outros tipos de números figurados

Entre as várias sequências muito apreciadas pelos matemáticos, destacam-se as dos **números figurados**, que são aqueles que podem ser representados por um conjunto de pontos equidistantes, formando uma figura geométrica.

Os primeiros a estudar as regularidades dos números figurados foram os **pitagóricos**, curiosos em relação à disposição de pedras em configurações geométricas na areia.

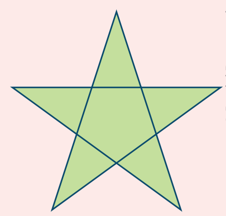
VOCÊ SABIA?



Pitágoras de Samos
(aprox. 571-496 a.C.)

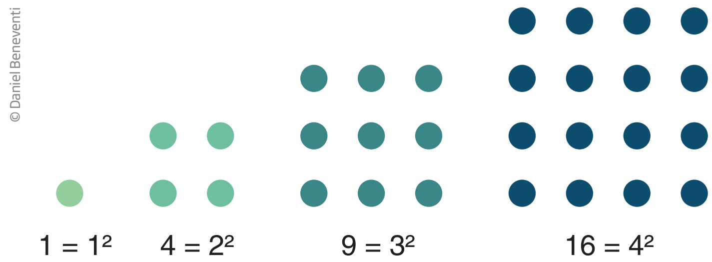
Os pitagóricos eram os seguidores de Pitágoras; eles formaram uma sociedade de pensadores e estudiosos da Matemática, Filosofia e Física, entre outras ciências, no século VI a.C.

Eles adotavam como símbolo da sociedade o pentagrama: a estrela de cinco pontas.



Números quadrados

Em Matemática, **número quadrado** é um número inteiro que pode ser escrito como o quadrado de outro número inteiro. A sequência desses números é a mais conhecida entre os números figurados.



Sabe-se que, para calcular um termo qualquer dessa sequência, basta elevar o valor da ordem (posição) ao quadrado.

Seja $\mathbf{Q_n}$ o enésimo termo da sequência dos números quadrados, então Q_n é dado por:

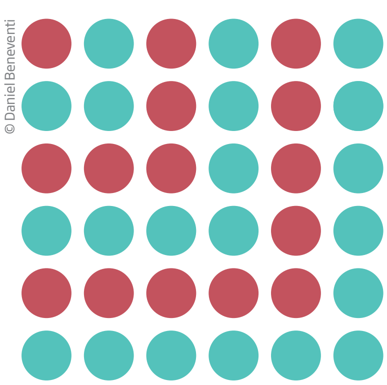
$$Q_n = n \cdot n = n^2$$

ATIVIDADE 1 Números quadrados

1 Escreva a sequência dos 10 primeiros quadrados perfeitos.

2 Forme uma sequência com as diferenças entre dois termos consecutivos da sequência dos 10 primeiros quadrados perfeitos. O que você descobriu?

3 Observe o quadrado formado com pontos coloridos:



a) Calcule 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.

b) Calcule Q_6.

c) Verifique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique sua resposta.

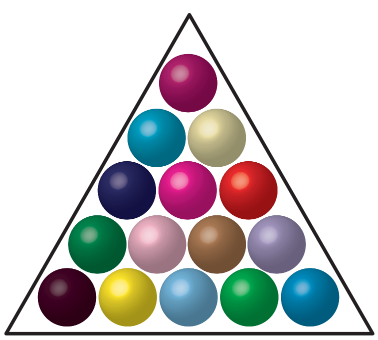
☐ A soma dos 6 primeiros números ímpares consecutivos é um quadrado perfeito.

☐ A soma dos 6 primeiros números pares consecutivos é um quadrado perfeito.

4 O que se pode afirmar sobre a soma dos 10 primeiros números ímpares positivos?

Números triangulares

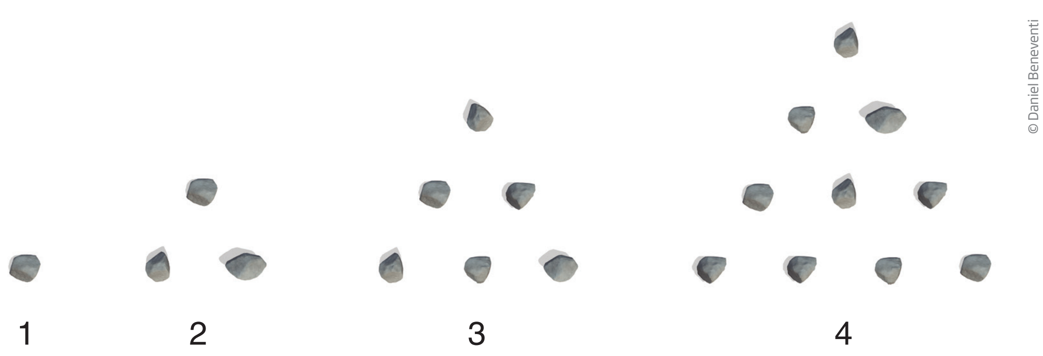
Em muitas situações do dia a dia, é comum se deparar com configurações geométricas triangulares, como na arrumação de bolas de bilhar ou de pilhas de latas.



Agrupamento de bolas de bilhar

Pilha de latas

Os números associados a essas configurações – ou seja, aqueles que podem ser representados na forma de um triângulo – são chamados **números triangulares**. A sequência desses números também foi estudada pelos pitagóricos há mais de 2.500 anos.



Por meio da contagem das pedras sobre a areia, os pitagóricos perceberam regularidades na formação dos termos da sequência:

$$(1, 3, 6, 10, 15, ...)$$

Seja $\mathbf{T_n}$ o enésimo número triangular.

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

ATIVIDADE 2 Números triangulares

1 Determine o valor do 6º número triangular.

____

2 Determine o valor de:

a) T_7 ______________________

b) T_8 ______________________

c) T_9 ______________________

3 Explique como se pode determinar o valor de $\mathbf{T}_n$ com base no termo anterior.

____

4 Mostre que a soma do 9º e do 10º número triangular é 100.

____

____

5 Verifique se a soma do 11º com o 12º número triangular é um quadrado perfeito.

O método de Gauss

A história da Matemática também tem seus mitos e lendas. Uma das histórias mais famosas refere-se à juventude de Carl F. Gauss (1777-1855), um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Conta-se que Gauss, aos dez anos, era muito inquieto. Um dia, o professor, na esperança de manter Gauss e os colegas quietos por algum tempo, propôs que eles calculassem a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 98 + 99 + 100$$

Tudo foi muito bem até o terceiro minuto, quando o pequeno Gauss apresentou sua resposta escrita no caderno: o número 5.050. Desconfiado, o professor fez os próprios cálculos e constatou, incrédulo, que a resposta estava certa. Ele então pediu explicações ao menino, que descreveu seu método engenhoso.

Gauss escreveu a série de 1 até 100 numa linha e a mesma série de 100 até 1 na linha de baixo:

1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100
100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1
101	+	101	+	101	+	...	+	101	+	101	+	101

Ele sabia que o resultado de $100 \cdot 101$ era 10.100 – o dobro da soma pedida pelo professor –, portanto dividiu por 2 o resultado, para obter: $10.100 \div 2 = 5.050$.

Gauss havia inventado um método para calcular a soma de sequências em que cada termo é igual ao anterior mais um número fixo.

ATIVIDADE 3 Aplicando o método de Gauss

1 Use o mesmo método do jovem Gauss para determinar a soma dos 20 primeiros números positivos:

$$S_{20} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 18 + 19 + 20$$

2 Calcule a soma dos 10 primeiros números ímpares usando o método de Gauss:

$$x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

3 Usando o método de Gauss, determine a soma dos 20 primeiros números pares positivos:

$$y = 2 + 4 + 6 + \ldots + 36 + 38 + 40$$

O termo geral de um número triangular

As sequências de números quadrados e de números triangulares têm muitas características comuns.

Nos dois casos, a sequência das diferenças entre termos consecutivos gera uma sequência com uma regularidade simples de ser reconhecida:

- a sequência das diferenças dos números quadrados gera uma sequência de números ímpares consecutivos:

(1, 4, 9, 16, ...)

+3 +5 +7 +9

- a sequência das diferenças dos números triangulares gera uma sequência de números naturais consecutivos:

(1, 3, 6, 10, ...)

+2 +3 +4 +5

Essas regularidades serão utilizadas para se encontrar a **lei geral da sequência dos números triangulares** usando o método de Gauss.

O enésimo número triangular é a soma dos **n** primeiros números naturais:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
T_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
T_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2 \cdot T_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Somando as duas primeiras linhas, tem-se **n** parcelas de valor n + 1; logo, o dobro de $T_n = n(n + 1)$. Ou seja:

$$2 \cdot T_n = n(n + 1)$$

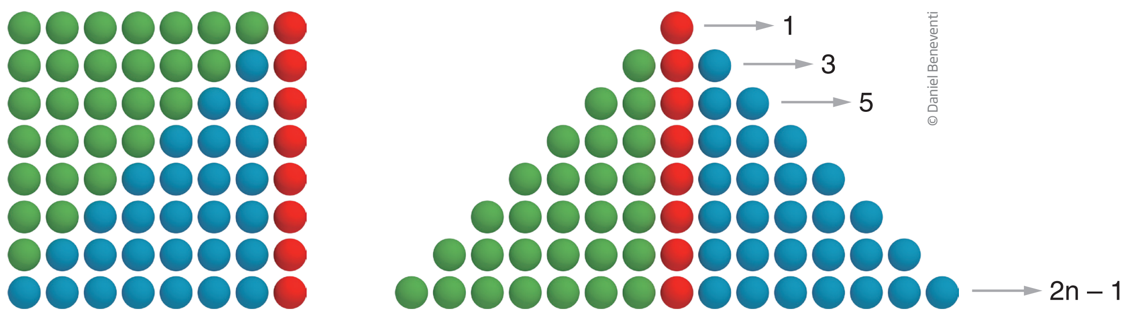
Portanto:

$$T_n = \frac{(n + 1) \cdot n}{2}$$

Essa é a lei geral que fornece o valor numérico de um número triangular qualquer.

Relação entre números triangulares e números quadrados

A soma dos primeiros números ímpares consecutivos é um quadrado perfeito. Para provar isso, será usado o método de Gauss.



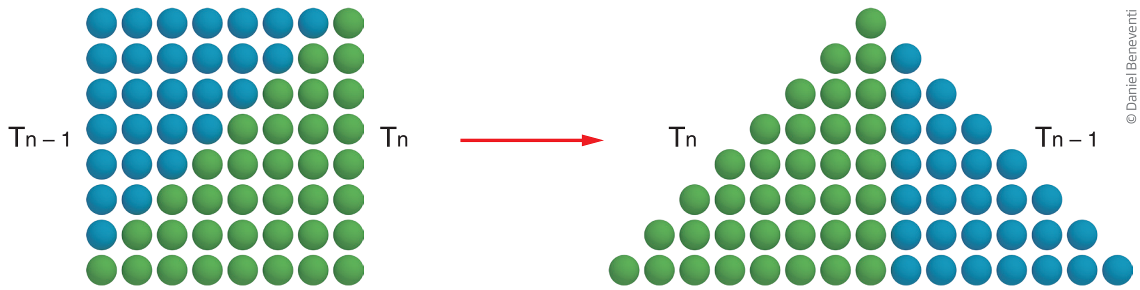
A soma dos primeiros números ímpares consecutivos é $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.

Para somar pelo método de Gauss, soma-se o 1º (1) ao último termo da sequência $(2n - 1)$, multiplica-se pela quantidade de termos (**n**) e divide-se o resultado por 2.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{(1 + (2n - 1)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = \frac{(2n) \cdot n}{2} = \frac{2n \cdot n}{2} = n^2 = Q_n$$

Observe que a soma de dois números triangulares consecutivos é um número quadrado, ou seja:

$$T_n + T_{n-1} = Q_n \text{ (I)}$$



É possível visualizar essa propriedade por meio das figuras acima.

Será feita uma demonstração algébrica, provando que a igualdade é verdadeira, com base na expressão geral de $\mathbf{Q_n}$, $\mathbf{T_n}$ e $\mathbf{T_{n-1}}$.

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1) \qquad \text{(I)}$$

$$T_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n - \cancel{1} + \cancel{1}) = \frac{1}{2} \cdot (n-1)\,n \qquad \text{(II)} \leftarrow \text{Regra do cancelamento}$$

$$Q_n = n^2 \qquad \text{(III)}$$

É preciso demonstrar que $\mathbf{T_n + T_{n-1} = Q_n}$. Acompanhe as passagens:

$$\frac{1}{2} \cdot n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot (n-1)n = \frac{1 \cdot n(n+1) + 1 \cdot (n-1)n}{2} \rightarrow \text{Redução a um mesmo denominador.}$$

$$\frac{1 \cdot n(n+1) + 1 \cdot (n-1)n}{2} = \frac{n(n+1) + (n-1)n}{2} \rightarrow \text{1 é elemento neutro da multiplicação.}$$

$$\frac{n(n+1) + (n-1)n}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} \rightarrow \text{Eliminação dos parênteses, aplicação da propriedade distributiva.}$$

$$\frac{n^2 + \cancel{n} + n^2 - \cancel{n}}{2} = \frac{n^2 + n^2}{2} \rightarrow \text{Propriedade do cancelamento.}$$

$$\frac{n^2 + n^2}{2} = \frac{2n^2}{2} \rightarrow \text{Redução dos termos semelhantes.}$$

$$\frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2 \rightarrow \text{Simplificação.}$$

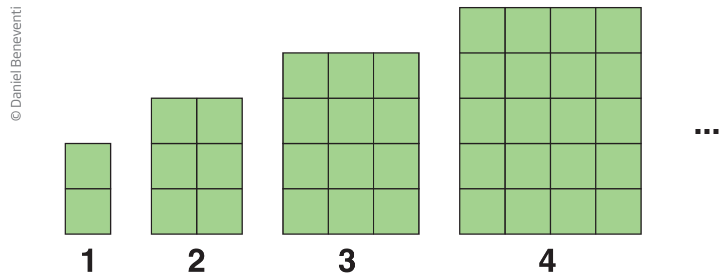
$$\frac{1}{2} \cdot n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot (n-1)n = n^2 \rightarrow \mathbf{T_n + T_{n-1} = Q_n}$$

Verifique, escolhendo dois números triangulares consecutivos quaisquer, como no exemplo:

$$T_7 + T_6 = 28 + 21 = 49 = 7^2 = Q_7$$

ATIVIDADE 4 Regularidades em sequências

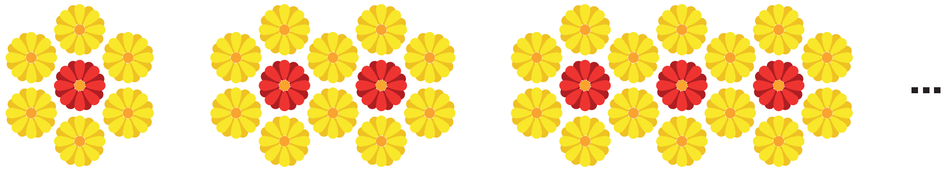
1 Observe a sequência de figuras a seguir. Depois, responda às questões propostas.



a) Descubra uma lei geral que forneça o enésimo termo da sequência figurada dos números "retangulares".

b) Determine a quantidade de quadradinhos do 5º termo dessa sequência.

2 As figuras a seguir representam os três primeiros termos de uma sequência de arranjos de flores amarelas e vermelhas.



© Daniel Beneventi

O número de flores vermelhas (**n**) em cada arranjo indica a ordem na sequência, e a_n é a quantidade de flores amarelas de cada arranjo.

n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	6	10	14	18	?	?	...

a) Qual é a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência?

b) Escreva os 8 primeiros termos da sequência.

c) Determine a_7.

d) Determine a ordem **n** da configuração que tem exatamente 38 flores amarelas.

3 Atribua V (verdadeiro) ou F (falso) a cada igualdade e justifique sua resposta.

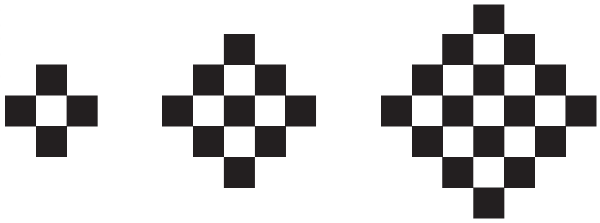
a) ☐ $T_{11} + T_{10} = Q_{11}$

b) ☐ $T_{11} + T_{10} = Q_{10}$

c) ☐ $Q_{10} + Q_{11} = T_{10}$

d) ☐ $Q_{10} + Q_{11} = T_{11}$

4 Observe a sequência figurada de trançados que formam quadrados pretos e brancos.

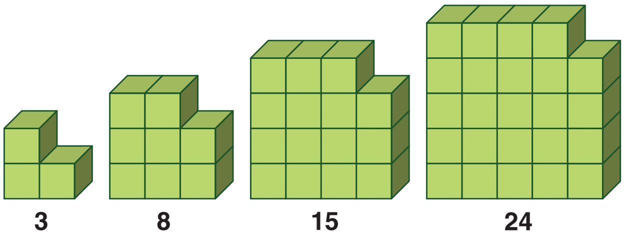

© Daniel Beneventi

a) Determine quantos quadrados brancos e pretos tem a próxima figura.

b) Quantos quadrados brancos tem a figura que possui exatamente 49 quadrados pretos?

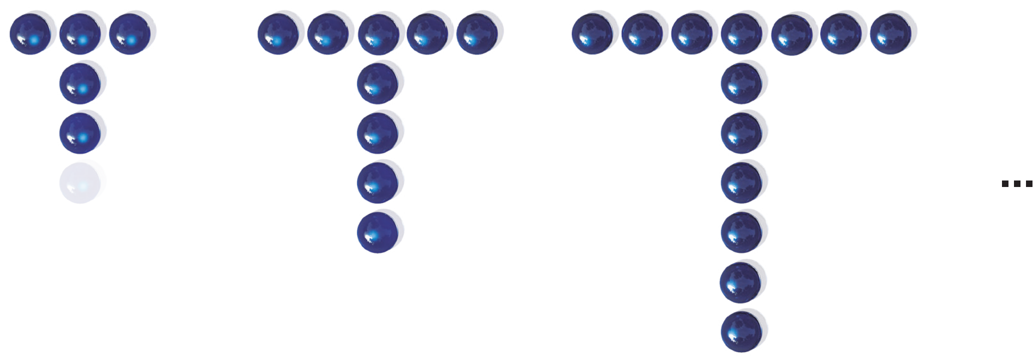
c) Quantos quadrados pretos tem a figura que possui exatamente 49 quadrados brancos?

5 Qual é a lei geral que mostra o número de cubinhos de cada figura da sequência a seguir?



© Daniel Beneventi

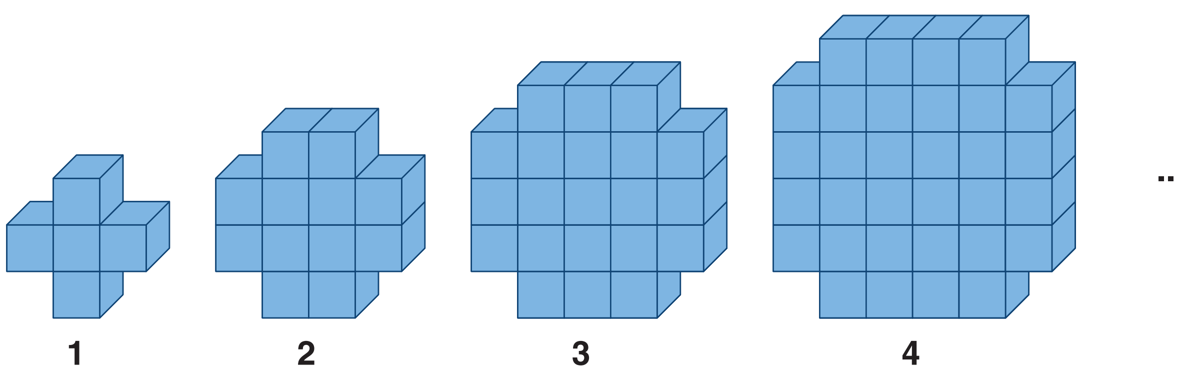
6 Tiago ficou sem parceiro para jogar bolinha de gude. Então, ele pegou sua coleção de bolinhas e formou uma sequência de **T** (a inicial de seu nome), conforme a figura:



Determine a quantidade de bolinhas de gude da configuração correspondente ao 4º termo.

---

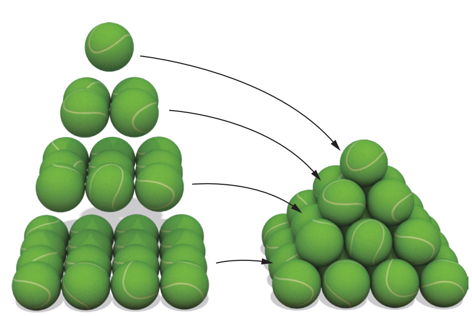
7 Observe a sequência ($\mathbf{a}_n$) a seguir.



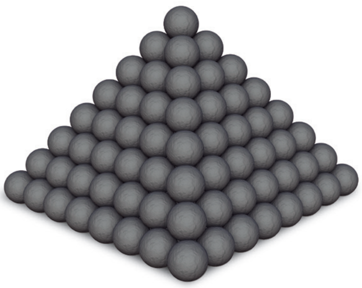
Determine quantos cubos são necessários para compor o termo $\mathbf{a}_5$.

PENSE SOBRE...

Os pitagóricos também estudaram os **números piramidais**, que podem ser imaginados como configurações espaciais montadas com esferas.



Os números piramidais aparecem em muitas situações curiosas. Os generais de Napoleão Bonaparte (1769-1821), por exemplo, calculavam o número de bolas de canhão pelas dimensões da pilha.



© Daniel Beneventi

Você sabe por que os feirantes empilham laranjas, melancias e outras frutas de acordo com a mesma regularidade?

© Rubens Chaves/Pulsar Imagens

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Números quadrados

1 Um número quadrado é um número do tipo $n \cdot n = n^2$.

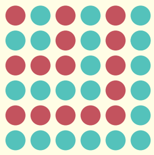
$1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 2 = 4$; $3 \cdot 3 = 9$; e assim por diante.

Portanto, a sequência é: (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100).

2 A sequência é (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19), pois $4 - 1 = 3$; $9 - 4 = 5$; $16 - 9 = 7$; $25 - 16 = 9$; $36 - 25 = 11$; $49 - 36 = 13$; $64 - 49 = 15$; $81 - 64 = 17$; e $100 - 81 = 19$.

Pode-se perceber que a diferença entre dois números quadrados consecutivos é sempre um número ímpar.

3



© Daniel Beneventi

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

b) $Q_n = n^2 \Rightarrow Q_6 = 6^2 = 36$

c) **V** $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

F $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$; 42 não é um quadrado perfeito.

4 A soma dos 10 primeiros números ímpares positivos é o 10º número quadrado perfeito, ou seja, é igual a $10 \cdot 10 = 100$.

Na sequência $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$, somando-se os números que estão nos extremos, tem-se: $1 + 19 = 3 + 17 = 5 + 15 = 13 + 7 = 11 + 9 = 20 \Rightarrow 5 \cdot 20 = 100 = 10 \cdot 10 = 100$.

Atividade 2 - Números triangulares

1 $T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

2

a) $T_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ ou $T_7 = 21 + 7 = 28$

b) $T_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ ou $T_8 = 28 + 8 = 36$

c) $T_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ ou $T_9 = 36 + 9 = 45$

3 Basta somar o número que expressa a posição do número triangular ao termo anterior. Por exemplo, para calcular T_{10}, é preciso somar 10 a T_9. No item *c* do exercício anterior, você calculou $T_9 = 45$, portanto $T_{10} = 45 + 10 = 55$.

4 $T_9 = 45$ e $T_{10} = 55$; $T_9 + T_{10} = 45 + 55 = 100$

5 $T_{11} = 55 + 11 = 66$; $T_{12} = 66 + 12 = 78$; $T_{11} + T_{12} = 66 + 78 = 144 = 12 \cdot 12$

144 é o 12º número quadrado perfeito.

Atividade 3 - Aplicando o método de Gauss

1 $S_{20} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 18 + 19 + 20 \Rightarrow S_{20} = ((1 + 20) \cdot 20) \div 2 = (21 \cdot 20) \div 2 = 210$

2 A sequência (1, 3, 5, 7, ...) dos números ímpares satisfaz as características da soma de Gauss, pois cada termo a partir do 2º é igual ao anterior mais um valor constante, que neste caso é igual a 2.

$$x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Essa soma tem 10 parcelas.

$$S = ((1 + 19) \cdot 10) \div 2 = (20 \cdot 10) \div 2 = 100$$

A soma dos 10 primeiros números ímpares é 100.

3 A sequência (2, 4, 6, 8, ...) dos números pares satisfaz as características da soma de Gauss, pois cada termo a partir do 2º é igual ao anterior mais um valor constante, que neste caso é 2.

$$y = 2 + 4 + 6 + \ldots + 36 + 38 + 40$$

Essa soma tem 20 parcelas.

$$S = ((2 + 40) \cdot 20) \div 2 = (42 \cdot 20) \div 2 = 420$$

A soma dos 20 primeiros números pares positivos é 420.

Atividade 4 – Regularidades em sequências

1

a) O número total T_n de quadradinhos em cada caso é igual ao número de quadrados da base multiplicado por seu sucessor: $1 \cdot 2 = 2$; $2 \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 4 = 12$; $4 \cdot 5 = 20$; e assim por diante. Em linguagem matemática: $T_n = n \cdot (n + 1)$.

A sequência numérica é: (2, 6, 12, 20, ...).

b) A quantidade de quadradinhos no 5º termo é 30, pois $T_5 = 5 \cdot 6 = 30$.

2

a) A diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é 4.

b) $18 + 4 = 22$
$22 + 4 = 26$
$26 + 4 = 30$
$30 + 4 = 34$

Os 8 primeiros termos da sequência são: (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34).

c) $a_7 = 30$

d) $38 = 34 + 4$, portanto a configuração que tem exatamente 38 flores amarelas é a 9ª.

3

a) **V** Pois $T_{11} + T_{10} = Q_{11}$, isto é, a soma de dois números triangulares consecutivos é igual a um número quadrado perfeito; $T_{11} = 66$ e $T_{10} = 55$; $T_{11} + T_{10} = 66 + 55 = 121 = 11 \cdot 11 = 11^2$.

b) **F** Pois $66 + 55 = 121 \neq 100$.

c) **F** Pois $100 + 121 \neq 55$.

d) **F** Pois $100 + 121 \neq 66$.

4

a) O número de quadrados brancos ou pretos é sempre um quadrado perfeito. Na terceira figura, a quantidade de quadrados brancos é $3 \cdot 3 = 9$ e a quantidade de quadrados pretos é $4 \cdot 4 = 16$. Portanto, a próxima figura tem $4 \cdot 4 = 16$ quadrados brancos e $5 \cdot 5 = 25$ quadrados pretos.

b) O número de quadrados pretos é sempre maior que o número de quadrados brancos, que ficam na parte interna. Se uma figura tem $7 \cdot 7 = 49$ quadrados pretos, então o número de quadrados brancos será $6 \cdot 6 = 36$.

c) O número de quadrados brancos é sempre menor que o número de quadrados pretos, que ficam na parte externa. Se uma figura tem $7 \cdot 7 = 49$ quadrados brancos, então o número de quadrados pretos será $8 \cdot 8 = 64$.

5 Todas as figuras são obtidas de um empilhamento de cubos do qual foi retirado um cubinho na parte superior à direita. A lei geral que dá o número de cubinhos de cada figura dessa sequência figurada é:

$$T_{n-1} = n^2 - 1, \text{ para } n \geq 2$$

6 O número de bolinhas na horizontal é o mesmo que na vertical, só que a bolinha que fica na intersecção está sendo contada duas vezes. Assim, o número de bolinhas da primeira figura é $2 \cdot 3 - 1 = 5$; o da segunda é $2 \cdot 5 - 1 = 9$; o da terceira é $2 \cdot 7 - 1 = 13$ (o dobro de um número ímpar menos 1).

A quantidade de bolinhas da configuração correspondente ao 4º termo é, portanto, $2 \cdot 9 - 1 = 17$.

7 Este exercício é semelhante ao exercício 6, com a diferença de que, neste caso, é preciso formar um empilhamento de cubos e tirar os 4 cubinhos das pontas.

Partindo de um empilhamento de $3 \cdot 3 = 9$, subtrai-se $4 \Rightarrow 9 - 4 = 5$, que é o número de cubinhos da primeira configuração. A seguinte é $4 \cdot 4 - 4 = 16 - 4 = 12$ (número de cubinhos da segunda configuração); depois é $5 \cdot 5 - 4 = 25 - 4 = 21$; $6 \cdot 6 - 4 = 36 - 4 = 32$. Portanto, a figura que está na 5ª posição tem $7 \cdot 7 - 4 = 49 - 4 = 45$ cubinhos.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

UNIDADE 2

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

TEMAS

Introdução

As progressões estão presentes em muitas situações, desde problemas de economia pessoal até descobertas científicas.

Imagine o caso de um jovem trabalhador que estabeleceu um plano de poupança para fazer uma viagem de estudos. Suponha que ele deposite mensalmente uma quantia e aumente o valor do depósito a cada mês, do seguinte modo: deposita R$ 100,00 no primeiro mês, R$ 110,00 no segundo mês, e vai acrescentando R$ 10,00 reais à quantia depositada no mês anterior, fazendo isso regularmente por 24 meses. Se você aprender como trabalhar com progressões, saberá, por exemplo, quanto deve ser depositado em determinado mês, ou a quantia acumulada ao fim de dois anos de poupança.

Também nas Ciências as progressões são úteis. Algumas descobertas importantes da Astronomia só foram possíveis graças à observação dos astrônomos das regularidades na sequência de períodos de tempo observados e registrados. Foi o que aconteceu com a descoberta do cometa Halley, por exemplo, assunto que você verá nesta Unidade, na seção *Pense sobre...*

Progressões aritméticas TEMA 1

Agora que você já tem alguma noção sobre sequências (assunto abordado na Unidade 1), estudará neste tema, de modo mais aprofundado, a **progressão aritmética (PA)**, que é um dos dois tipos especiais de sequências tratadas nesta Unidade.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Desde o início de seus estudos, você tem contato com sequências que apresentam alguma regularidade aditiva. Você se lembra de algum assunto da Matemática em que aparece essa característica?

As sequências e as progressões

Algumas progressões são muito simples, e você já as conhece do estudo das primeiras tabuadas, como é o caso da sequência dos números pares positivos:

$$(2, 4, 6, 8, ..., a_{10}, a_{11}, ..., a_n, ...)$$

Assim, não é difícil determinar o valor numérico do 5º termo.

Considerando que a diferença entre dois termos consecutivos da sequência é 2 e que $a_4 = 8$, pode-se concluir que $a_5 = 8 + 2 = 10$.

Pelo mesmo motivo, sabe-se que $a_{11} = a_{10} + 2$. O problema nesse caso é que ainda não se conhece o valor de a_{10}, pois, pela regra anterior, ele depende do termo antecedente a_9, que por enquanto também é desconhecido.

No entanto, é possível observar outros padrões e determinar o valor numérico de um termo qualquer em função da posição que ele ocupa na sequência.

Observe:

$a_1 = 2 \Rightarrow$ dado que é uma sequência dos pares positivos (o zero não é positivo nem negativo)

$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4 = \mathbf{2} \cdot 2$

$a_3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6 = \mathbf{2} \cdot 3$

$a_4 = a_3 + 2 = 6 + 2 = 8 = \mathbf{2} \cdot 4$

$a_5 = a_4 + 2 = 8 + 2 = 10 = \mathbf{2} \cdot 5$

Com base nessa regularidade, é possível calcular outros termos.

$a_{10} = a_9 + 2$, mas também pode ser calculado em função de sua posição na sequência (décima):

$a_{10} = \mathbf{2} \cdot 10 = 20$

$a_{11} = \mathbf{2} \cdot 11 = 22$

...

$a_{111} = \mathbf{2} \cdot 111 = 222$

Generalizando, pode-se dizer que um termo qualquer $\mathbf{a_n}$ pode ser determinado em função de sua posição; em outras palavras: o enésimo termo da sequência é:

$$a_n = 2n$$

LEMBRE!

Enésimo é o termo que está na posição **n**.

Quando se sabe a lei geral de uma sequência, fica fácil resolver problemas do tipo.

- Calcular o valor numérico do 30º termo:

$$a_{30} = \mathbf{2} \cdot 30 = 60$$

- Determinar a posição do termo cujo valor numérico é 100:

Nesse caso, o que se quer descobrir é o valor de **n**, sabendo que $a_n = 100$.

A lei geral do enésimo termo é $a_n = 2n$, portanto, basta resolver a equação $2n = 100 \Rightarrow n = 50$, ou seja, o termo cujo valor numérico é 100 é o que está na 50ª posição da sequência dos números pares positivos.

Agora considere outras sequências simples como a dos números ímpares positivos e a sequência dos múltiplos de 3 maiores que zero:

$$(1, 3, 5, 7, ...)$$

$$(3, 6, 9, 12, ...)$$

O que essas sequências têm em comum com a sequência dos números pares?

Para responder, acompanhe a comparação, de duas em duas:

Pares positivos → $(2, 4, 6, 8, ..., a_n)$

Ímpares positivos → $(1, 3, 5, 7, ..., a_n)$

Semelhança: a diferença entre dois termos consecutivos é 2.

Diferença: cada uma das sequências tem um primeiro termo diferente.

Agora observe a comparação da sequência dos números pares com a sequência dos múltiplos positivos de 3:

Pares positivos → $(2, 4, 6, 8, ..., a_n)$

Múltiplos de 3 → $(3, 6, 9, 12, ..., a_n)$

Note que, nas duas sequências, a diferença entre dois termos consecutivos é constante, porém diferente em cada sequência.

Na sequência dos números pares, a diferença entre dois termos consecutivos é $a_n - a_{n-1} = \mathbf{2}$.

Na sequência dos múltiplos de 3, essa diferença é $a_n - a_{n-1} = \mathbf{3}$.

As sequências cuja diferença entre dois termos consecutivos é constante são chamadas de **progressão aritmética**. Também conhecidas como **PA**, sendo sua constante denominada **razão da PA**.

Uma PA fica bem determinada quando se conhece seu **primeiro termo** (a_1) e sua **razão** (**r**). Com esses elementos, é possível calcular o valor numérico de qualquer termo em função de sua posição (**n**) na progressão.

Pares positivos	→	$(2, 4, 6, 8, ..., a_n, ...)$
Primeiro termo:		$a_1 = 2$
Razão:		$r = 2$

Ímpares positivos	→	$(1, 3, 5, 7, ..., a_n, ...)$
Primeiro termo:		$a_1 = 1$
Razão:		$r = 2$

Múltiplos de 3	→	$(3, 6, 9, 12, ..., a_n, ...)$
Primeiro termo:		$a_1 = 3$
Razão:		$r = 3$

Antes de aplicar essas ideias e técnicas, acompanhe o estudo da progressão aritmética a seguir, cujos quatro primeiros termos são conhecidos:

$(2, 5, 8, 11, ...)$

Primeiro termo:	$a_1 = 2$
Razão:	$r = 3$

Para determinar a razão de uma PA, basta calcular a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer e que sejam conhecidos:

$\mathbf{r = a_n - a_{n-1}}$

$r = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

$r = 11 - 8 = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$

Com base nesses dados, é simples determinar o valor do 5º termo:

$$a_5 = a_4 + 3 \Rightarrow 11 + 3 = 14$$

Também é possível determinar o 11º termo, mas, para isso, seria necessário conhecer o valor numérico do 10º termo, e, para achar o valor do 10º termo, depende-se do valor do 9º termo, e assim por diante.

Mas existe um caminho mais curto e engenhoso para encontrar o valor do 11º termo.

2	5	8	11	?	?	?	?	?	?	?
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}

Lembre-se de que a razão é r = 3.

$$\underbrace{2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} ? \xrightarrow{+3} a_{11}}_{10 \cdot 3}$$

O que se procura saber é quantas vezes é preciso somar a razão r = 3 para ir do 1º termo até o 11º (**a_{11}**). Para responder, observe o que acontece com os quatro termos conhecidos:

$a_2 = a_1 + r = a_1 + \mathbf{1} \cdot 3 = 2 + 3 = \mathbf{5}$

$a_3 = a_1 + 2r = a_1 + \mathbf{2} \cdot 3 = 2 + 6 = \mathbf{8}$

$a_4 = a_1 + 3r = a_1 + \mathbf{3} \cdot 3 = 2 + 9 = \mathbf{11}$

Para calcular a_5, basta somar ao primeiro termo **4** vezes a razão:

$a_5 = a_1 + \mathbf{4}r$

$a_5 = 2 + \mathbf{4} \cdot 3 = 2 + 12 = \mathbf{14}$

Para determinar o valor numérico do 5º termo, soma-se 4 vezes (5 – 1 = 4) a razão.

Portanto, para ir de a_1 até a_{11}, soma-se **10** vezes a razão:

$a_{11} = a_1 + \mathbf{10}r$

$a_{11} = 2 + \mathbf{10} \cdot 3 = 2 + 30 = \mathbf{32}$

Pratique determinando o valor de todos os termos até o 11º.

Para calcular o *enésimo* termo de uma PA, usa-se uma fórmula derivada do raciocínio descrito anteriormente.

Fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Observe a aplicação dessa fórmula para resolver outros problemas relativos à mesma sequência:

- calcular o valor de $\mathbf{a_{20}}$:

$a_1 = 2$

$r = 3$

$n = 20$

$a_{20} = ?$

Basta substituir na fórmula:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$

$a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 3 = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = 59$

$\mathbf{a_{20} = 59}$

- determinar a posição **n** do termo cujo valor numérico é $a_n = 65$:

$a_1 = 2$

$r = 3$

$n = ?$

$a_n = 65$

Substituindo na fórmula, tem-se:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$

$65 = 2 + (n - 1) \cdot 3$

$65 = 2 + (n - 1) \cdot 3$

Eliminam-se os parênteses aplicando a propriedade distributiva:

$65 = 2 + 3n - 3$

$65 = 3n - 1$

$65 + 1 = 3n$

$66 = 3n$

$66 \div 3 = n$

$\mathbf{n = 22}$

ATIVIDADE 1 Progressões aritméticas

1 O termo geral de uma PA é dado por $a_n = 2n - 1$. Então, o 3º termo da PA vale:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

2 Determine o número de termos de uma PA cujo 1º termo é 1,5 e o último termo é 31,5, e cuja razão é 1,5.

3 O número de múltiplos de 11 entre 100 e 1.000 é:

a) 11

b) 81

c) 91

d) 100

e) 111

4 A razão de uma PA, na qual $a_3 + a_5 = 20$ e $a_4 + a_7 = 29$, vale:

a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) 11

5 A quantidade de números compreendidos entre 1 e 2.101, que são divisíveis por 3 e 7, é:

a) 98

b) 99

c) 100

d) 101

e) 102

6 Três números estão em PA, e o maior deles é o triplo do menor. Sabendo-se que a soma dos três é 18, o termo do meio vale:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 9

e) 10

7 Assinale a alternativa em que a sequência corresponde às medidas dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que elas formam uma PA cuja razão é 3.

a) 3, 6, 9

b) 6, 9, 12

c) 12, 15, 18

d) 9, 12, 15

e) n.d.a.

DESAFIO

A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar [na mesma região], respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela ANATEL? Qual o número do canal com maior frequência?

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas?

Unicamp 2005. Disponível em: <http://www.comvest.unicamp.br/vest2005/F1/provaf1.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

PENSE SOBRE...

A descoberta do cometa Halley e a PA

As progressões aritméticas são muito importantes no estudo de fenômenos periódicos. No século XVII, o astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742) analisou as características de cometas observados em 1531, 1607 e 1682, quando se deu conta de que, além de a descrição desses cometas serem muito semelhantes, havia um padrão na sequência das datas em que tinham sido vistos. Halley concluiu que, na verdade, não se tratava de três cometas diferentes, mas sim de um mesmo cometa que passava perto da Terra a cada 76 anos e, portanto, deveria voltar e ser observado próximo do ano 1758, o que realmente ocorreu na noite de 25 de dezembro daquele ano.

As datas do aparecimento do cometa formavam uma sequência muito parecida com uma progressão aritmética (1531, 1607, 1682, ...).

Halley observou que 1607 – 1531 = 76 e que 1682 – 1607 = 75. Pesquisou outros registros de cometas e as datas em que foram vistos. A partir daí, formulou a hipótese de que o cometa, que hoje leva seu nome, passa próximo da Terra a cada 75 anos e alguns meses, o que veio a se confirmar mais tarde, com a invenção de instrumentos de observação mais precisos.

O cometa Halley passou pela Terra em 1910 e 1986. Descubra para qual ano está prevista a sua volta.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Progressões aritméticas

1 Alternativa correta: **d**.

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

2 $n = ?$

$a_1 = 1,5$

$a_n = 31,5$

$r = 1,5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 31,5 = 1,5 + (n - 1) \cdot 1,5 \Rightarrow 31,5 - 1,5 = (n - 1) \cdot 1,5 \Rightarrow 30 = (n - 1) \cdot 1,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 30 \div 1,5 \Rightarrow n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21$

A PA tem 21 termos.

3 Alternativa correta: **b**. O primeiro múltiplo de 11 maior que 100 é 110, e o último múltiplo de 11 menor que 1.000 é 990. Portanto, pode-se considerar $a_1 = 110$, $a_n = 990$ e razão $r = 11$. Para encontrar **n**, basta substituir na fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$990 = 110 + (n - 1) \cdot 11$

$11(n - 1) = 990 - 110 \Rightarrow 11(n - 1) = 880 \Rightarrow (n - 1) = 880 \div 11 \Rightarrow (n - 1) = 80 \Rightarrow n = 80 + 1 = 81$

Existem 81 múltiplos de 11 entre 100 e 1.000.

4 Alternativa correta: **a**. Para encontrar a razão, equaciona-se cada condição:

$a_3 = a_1 + 2r$; $a_4 = a_1 + 3r$; $a_5 = a_1 + 4r$; $a_7 = a_1 + 6r$

Substituindo nas igualdades $a_3 + a_5 = 20$ e $a_4 + a_7 = 29$ que aparecem no enunciado, tem-se:

$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 20$

$a_1 + 3r + a_1 + 6r = 29$

Resolve-se o sistema de duas equações e duas incógnitas (a_1 e r):

$2a_1 + 6r = 20$

$2a_1 + 9r = 29$

Subtraindo as duas equações, encontra-se:

$(2a_1 + 9r) - (2a_1 + 6r) = (2a_1 - 2a_1) + (9r - 6r) = 29 - 20$

$3r = 9 \Rightarrow r = 3$

5 Alternativa correta: **c**.

É preciso lembrar que um número que é divisível por 3 e por 7 é divisível por 21.

O primeiro número que satisfaz essa condição no intervalo é 21; o último é 2.100.

Logo, $a_1 = 21$, $a_n = 2.100$, e a razão é 21. Basta substituir na fórmula do termo geral e resolver a equação em **n**:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 2.100 = 21 + (n - 1) \cdot 21 \Rightarrow (n - 1) \cdot 21 = 2.100 - 21 \Rightarrow n - 1 = (2.100 - 21) \div 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 2.100 \div 21 - 21 \div 21 \Rightarrow n - 1 = 100 - 1 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 99 + 1 = 100$

Existem 100 números divisíveis por 3 e 7 entre 1 e 2.101.

6 Alternativa correta: **b**. Se (a_1, a_2, a_3) formam uma PA, então eles podem ser escritos, respectivamente, como: $(x - r, x, x + r)$.

$a_1 + a_2 + a_3 = 18 \Rightarrow x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Independentemente do valor da razão, nessas condições, o termo do meio vale 6.

7 Alternativa correta: **d**. Se as medidas dos lados estão em PA, pode-se escrever a sequência $(x - 3, x, x + 3)$.

Usando o teorema de Pitágoras ($h^2 = a^2 + b^2$) e resolvendo a equação, tem-se:

$(x + 3)^2 = x^2 + (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow -x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 12$.

$x \neq 0$, pois a medida do lado de um triângulo tem de ser um número maior que 0 (zero), portanto $x = 12$, e os lados do triângulo são (9, 12, 15).

Esse resultado satisfaz o teorema de Pitágoras:

$15^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = 144 + 81$

Desafio

a) Podem funcionar 101 emissoras, e a que apresenta maior frequência é o canal de número 300, pois:

i. (87,9; 88,1; ...; 107,9) é uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 87{,}9$ e razão $r = 0{,}2$.

Assim, $107{,}9 = 87{,}9 + (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow n - 1 = 101$. Logo, essa sequência tem 101 termos.

ii. A sequência (200, 201, 202, ...) é uma progressão aritmética de primeiro termo 200, razão $r = 1$.

$a_{101} = 200 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 200 + (101 - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 200 + 100 \Rightarrow a_{101} = 300$

Assim, a 101ª emissora é a do canal 300.

b) A frequência do canal 285 é o 86º termo da progressão aritmética das frequências.

Vejam: (200, 201, 202, ..., 285), quantos termos existem?

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 285 = 200 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow 285 - 199 = n \Rightarrow n = 86$

e, portanto:

$a_{86} = a_1 + 85 \cdot r \Rightarrow a_{86} = 87{,}9 + 85 \cdot 0{,}2 \Rightarrow a_{86} = 104{,}9$

Logo, a frequência que ocupa a 86ª posição é 104,9.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Como você viu no caso da PA, as sequências apresentam uma regularidade, porém algumas delas têm como característica uma regularidade multiplicativa e, consequentemente, crescem mais rápido que uma progressão aritmética. Esse tipo de comportamento aparece, por exemplo, em determinadas aplicações em que incidem juros sobre juros, propagação de epidemia de vírus, divisões em partituras musicais, entre outras aplicações.

Neste tema, você vai estudar e se aprofundar na **progressão geométrica (PG)**, um tipo especial de sequência.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já deve ter ouvido falar que as coisas se desvalorizam com o uso, não é? Já pensou como é determinado o valor de cada objeto diante dessa desvalorização?

ASSISTA!

Matemática – Volume 2

Sequências numéricas

Esse vídeo apresenta situações do dia a dia nas quais podem ser observadas as sequências. Além disso, mostra como as sequências podem ajudar na solução de problemas. Depois de exemplificá-las, um educador matemático as relaciona à PA ou à PG, conceituando cada uma delas.

Progressão geométrica – início de conversa

No livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (1938), há uma passagem que conta a história do xadrez, conhecida como Lenda de Sessa. Diz a lenda que o jogo de xadrez foi inventado para divertir um rei, que, encantado com o jogo, pediu a seu criador, Sessa, que escolhesse uma recompensa em ouro e joias.

Sessa, muito humildemente, pediu apenas para ser pago em trigo, deixando todos perplexos e zombando do ingênuo inventor. Mas ele prosseguiu, e pediu ao rei que lhe pagasse 1 grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, 2 grãos para a segunda casa, 4 para a terceira, 8 para a quarta, e assim por diante, dobrando o número de grãos para cada casa sucessiva do tabuleiro.

O rei sorriu ao ouvir o que acreditou ser um pedido modesto. Mas seu sorriso desapareceu na manhã seguinte quando ouviu de seu secretário de Finanças, um contador muito habilidoso, que ele, o rei, teria de pagar uma quantidade de trigo que não existia no reino, nem provavelmente no mundo todo.

A explicação é simples: ao dobrar a quantidade de grãos de trigo em cada casa, obtém-se uma sequência que cresce muito rapidamente à medida que se avança pelas casas do tabuleiro, formando uma sequência que, até a 10ª casa, tem os seguintes valores numéricos:

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...)$$

Isso quer dizer que a soma de todos os grãos dá um número que ultrapassa a casa dos quinquilhões:

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ grãos}$$

Esse número é quase impronunciável: **18.446.744.073.709.551.615** grãos de trigo.

A sequência (1, 2, 4, 8, 16, ...) tem uma regularidade: cada termo a partir do 1º é igual ao anterior multiplicado por um valor constante, que no caso é 2. Qualquer sequência com essa característica é chamada de **progressão geométrica (PG)**, e, tal como visto no estudo das progressões aritméticas, as PGs também têm uma fórmula do termo geral.

As PGs aparecem em uma variedade de situações do dia a dia, por exemplo, para descrever o rendimento de uma aplicação financeira a juros fixos ou para determinar a desvalorização de determinado bem.

Elas também são utilizadas por geógrafos e biólogos na previsão e estimativa de populações (de pessoas ou bactérias) que crescem ou decrescem a uma taxa fixa.

Fórmula do termo geral da PG

Para deduzir a fórmula do termo geral de uma PG, acompanhe o estudo desta sequência: $(3, 6, 12, 24, 48, ..., a_n)$.

Observe sua regularidade: cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado por 2.

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 \cdot \mathbf{2} = 6$

$a_3 = 6 \cdot \mathbf{2} = 12$

$a_4 = 12 \cdot \mathbf{2} = 24$

$a_5 = 24 \cdot \mathbf{2} = 48$

Nessa sequência, a constante 2, usada para multiplicar um termo a fim de obter o seguinte, é chamada de razão da PG. Para evitar confusão com a razão utilizada nas progressões aritméticas, os matemáticos empregam a letra **q** (de quociente) para indicá-la, pois, dividindo um termo qualquer pelo anterior, obtém-se sempre um valor constante: a razão da PG.

Verifique:

$a_2 \div a_1 = 6 \div 3 = 2$

$a_3 \div a_2 = 12 \div 6 = 2$

$a_4 \div a_3 = 24 \div 12 = 2$

$a_5 \div a_4 = 48 \div 24 = 2$

Para saber o valor do 6º termo, basta calcular $a_6 = a_5 \cdot 2$, e, como $a_5 = 48$, então $a_6 = 48 \cdot 2 = 96$.

Agora observe a estrutura do 5º termo da PG. Lembre-se de que a razão q = 2.

$$(3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \ldots \quad \ldots \quad a_n)$$

$$\underbrace{\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2}_{\cdot 2^4} \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \ldots \quad \cdot 2$$

$a_5 = 48$

$a_5 = 24 \cdot 2 = a_4 \cdot 2$

$a_5 = 12 \cdot 2 \cdot 2 = a_3 \cdot 2^2$

$a_5 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_2 \cdot 2^3$

$a_5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^4$

Portanto, $a_6 = a_1 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

Com base na percepção dessa regularidade, pode-se determinar o valor do 10º termo conhecendo o 1º e a razão:

$a_{10} = a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^9$

$a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1.536$

Agora, pode-se generalizar e expressar.

Fórmula do termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Observe sua utilização na resolução dos seguintes problemas.

- Como determinar o 8º termo da PG (2, 6, 18, ..., a_n)?

São conhecidos o primeiro termo ($a_1 = 2$); a razão, que é o quociente entre um termo e seu antecessor ($q = a_2 \div a_1 = a_3 \div a_2 = ... = 3$); e o valor de **n** ($n = 8$).

Substituindo na fórmula do termo geral, tem-se:

$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1}$

$a_8 = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2.187 = 4.374$

A PG é (2, 6, 18, 54, 162, 486, 1.458, 4.374, ..., a_n).

- Como determinar o 1º termo de uma PG de razão $q = 5$ em que o 4º termo $a_4 = 750$?

São conhecidos a razão $q = 5$, $n = 4$ e $a_4 = 750$.

Substituindo na fórmula do termo geral, obtém-se:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$750 = a_1 \cdot 5^3 = a_1 \cdot 125 \Rightarrow a_1 = 750 \div 125 = 6$

A PG é (6, 30, 150, 750, ..., a_n).

- Qual é a razão de uma PG em que o 1º termo é 5 e o 6º termo é 5.120?

São conhecidos $a_1 = 5$, $a_6 = 5.120$ e o número de termos $n = 6$.

Substituindo na fórmula, obtém-se:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$5.120 = 5 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 5.120 \div 5 = 1.024$

Fatorando 1.024, obtém-se: $1.024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$.

$q^5 = 4^5 \Rightarrow q = 4$

A PG é (5, 20, 80, 320, 1.280, 5.120, ..., a_n).

ATIVIDADE 1 Progressões geométricas

1 Se a_1, a_2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a_5, a_6, a_7, a_8 formam, nessa ordem, uma PG, então os valores de a_1 e a_8 são, respectivamente:

a) $\frac{1}{8}$ e 16

b) $\frac{1}{16}$ e 8

c) $\frac{1}{4}$ e 4

d) $\frac{1}{16}$ e 2

e) $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{8}$

2 Sabendo que o 3º termo de uma PG é 1 e o 5º é 9, então o 1º termo é:

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{3}$

d) 1

e) 0

3 Numa PG de termos positivos, o 1º termo é igual à razão, e o 2º termo é 3. O 8º termo da progressão é:

a) 81

b) 3^7

c) $27\sqrt{3}$

d) $\sqrt{273}$

e) 333

4 O número de bactérias em um experimento duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias, ao fim de 10 horas o número de bactérias será:

a) 2^4

b) 2^7

c) 2^{10}

d) 2^{13}

e) 2^{15}

5 As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em PG de razão 2. Então, a soma desses ângulos é:

a) 72°

b) 90°

c) 180°

d) 270°

e) 360°

DICA!
Resolver esse exercício o ajudará na resolução do exercício 6.

6 As medidas dos ângulos de um triângulo estão em PG de razão 2. Então, o triângulo:

a) tem um ângulo de 60°.

b) é retângulo.

c) é acutângulo.

d) é obtusângulo.

e) é isósceles.

7 A soma dos **n** primeiros termos da sequência (1, −1, 1, −1, ...) é:

a) 0

b) 0 quando **n** é par; 1 quando **n** é ímpar.

c) 1

d) n

e) −n

8 Em determinada progressão geométrica, a razão é maior que 1 e o 1º termo é menor que 0 (zero). Pode-se dizer que essa PG é:

a) decrescente.

b) crescente.

c) constante.

d) oscilante.

PARA SABER MAIS

Progressão geométrica, Aquiles e a tartaruga

O infinito sempre intrigou os pensadores de todas as épocas.

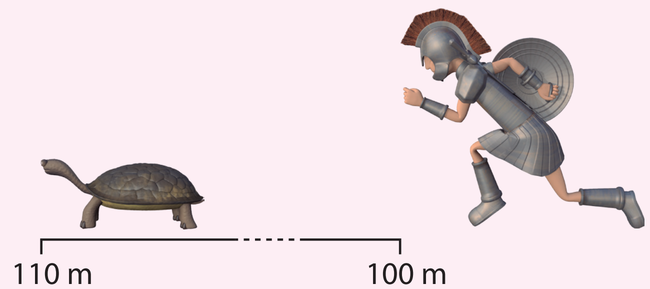
A confusão causada pelo conceito de infinito deve-se a muitos fatores. Pode-se pensar: em um conjunto com um número infinito de elementos; nos infinitos pontos de um segmento de reta de 1 cm; nas infinitas possibilidades de representar um número racional; nas infinitas casas decimais de um número irracional como π ou $\sqrt{2}$; no tempo infinito e no tamanho do Universo, que, para alguns, é infinito.

Qualquer que fosse a noção de infinito dos pensadores da Antiguidade, eles se depararam com dilemas de natureza filosófica.

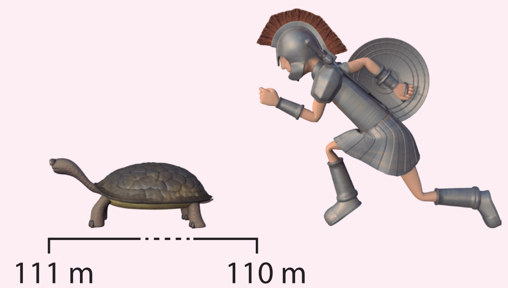
Início da corrida

Um dos mais interessantes problemas que levaram os filósofos gregos a arrancar os pelos de suas barbas foi proposto no século V a.C. pelo filósofo Zenão de Eleia (aprox. 490-430 a.C.).

Zenão formulou uma proposição que continha uma contradição aparente, relatando uma corrida fictícia entre Aquiles, o lendário atleta e guerreiro grego, e uma tartaruga. O curioso nessa história é que, apesar de ser mais veloz que a tartaruga, Aquiles jamais conseguia ultrapassá-la quando ela partia à sua frente.



Após 10 segundos



Após mais 1 segundo

Suponha que, no início da corrida, a tartaruga partiu com uma vantagem de 100 m à frente de Aquiles, e que as velocidades dos concorrentes eram 10 m/s (Aquiles) e 1 m/s (tartaruga). Passados 10 segundos, Aquiles atingiu o ponto de onde a tartaruga partiu, mas, durante esse tempo, a tartaruga avançou 10 m. Para atingir esse segundo ponto, Aquiles demorou 1 segundo, mas, nesse segundo, a tartaruga conseguiu avançar mais 1 m. Aquiles já estava ficando impaciente, pois, para atingir esse último ponto, precisava de 0,1 segundo, quando então a tartaruga teria avançado mais 0,1 m (10 cm), e assim sucessivamente.

Em cada etapa percorrida, a distância entre eles foi diminuindo de acordo com o fator 0,1. Esse processo se manteve até o infinito.

Para resolver essa questão, os matemáticos imaginaram uma sequência do tipo PG decrescente, cuja razão era $q = \frac{1}{10}$, em que $a_1 = 100$ correspondia à distância percorrida pela tartaruga no primeiro intervalo.

Posições de Aquiles e da tartaruga	
Aquiles	**Tartaruga**
0 m	100 m
100 m	110 m
110 m	111 m
111 m	111,1 m

← Partida

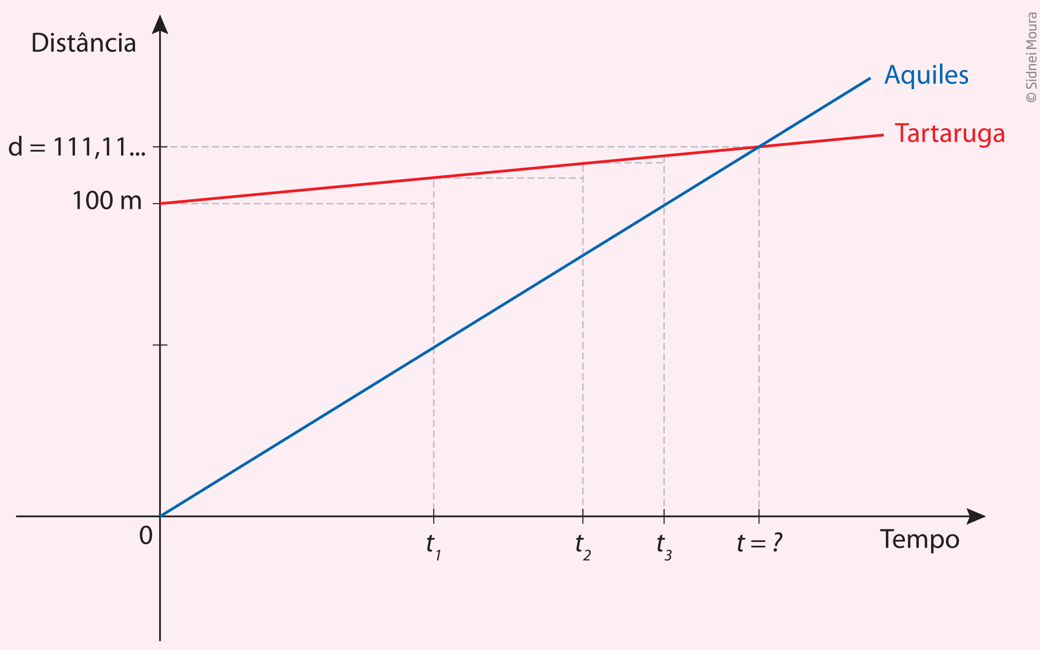
Lembre-se de que a tartaruga partiu 100 m à frente de Aquiles, e que Aquiles é 10 vezes mais rápido, pois suas velocidades são 10 m/s (Aquiles) e 1 m/s (tartaruga).

Para alcançar a tartaruga, Aquiles deveria percorrer a distância S:

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 111{,}11\ldots$$

Observe que as parcelas dessa soma formam uma PG.

Ainda que o raciocínio possa levar a crer que Aquiles nunca ultrapassou a tartaruga, o gráfico sugere que isso ocorrerá em algum momento.



Trata-se de um paradoxo, ou seja, um raciocínio que envolve uma contradição e que ora parece verdadeira, ora parece falsa.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Progressões geométricas

1 Alternativa correta: **b**.

$a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{2}$

$q = a_4 \div a_3 = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot 2^2 = 4a_1$

$4a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{16}$

Calcule a_8:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = \frac{1}{16} \cdot 2^7 = \frac{1}{2^4} \cdot 2^7 = 2^3 = 8$

2 Alternativa correta: **b**.

$a_3 = 1$, $a_5 = 9$

$a_5 = a_3 \cdot q^2$

$9 = 1 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

Tanto 3 como -3 podem ser considerados razão da PG. Se $q = 3$, a sequência será $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, ...\right)$. Se $q = -3$, a sequência será: $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9\right)$. Neste segundo caso ($q = -3$), chamado de PG oscilante, os sinais dos termos se alternam, ora o sinal é positivo, ora é negativo. Logo, se $a_3 = 1$, então $a_2 = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = \frac{1}{9}$.

3 Alternativa correta: **a**.

$a_2 = a_1 \cdot q$; como $a_2 = 3$, logo:

$3 = q^2$, $q = \sqrt{3}$, por se tratar de uma PG de termos positivos, descarta-se $q = -\sqrt{3}$.

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^7} = (\sqrt{3})^8 = 3^4 = 81$

4 Alternativa correta: **d**. É como se fosse uma PG em que $a_1 = 8$ e $q = 2$.

Considerando que a_1 corresponde ao instante 0 (zero), ao final de 10 horas o número de bactérias corresponderá ao valor de a_{11} (há 10 intervalos entre 1 e 11):

$a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1}$

$a_{11} = 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$

5 Alternativa correta: **c**. Essa é uma questão que tem a chamada "pegadinha", pois, não importa quais sejam os ângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180°.

Por outro lado, a PG que satisfaz essas relações angulares é: (x, 2x, 4x). Como x + 2x + 4x = 180°, e como $180 \div 7 \cong 25{,}71$, a medida do ângulo menor está entre 25° e 26°, ou seja, não se tem um valor exato, e sim aproximado. Se $x = 25$, então a PG é (25, 50, 100); se $x = 26$, a PG é (26, 52, 104).

$25° + 50° + 100° = 175° < 180°$ e $26° + 52° + 104° = 182° > 180°$.

Isso ocorre porque você não está trabalhando com valores exatos, e sim com aproximações.

6 Alternativa correta: **d**. De acordo com o exercício anterior, o maior ângulo desse triângulo é um valor entre 100° e 104°, ou seja, maiores que 90°, portanto esse triângulo tem um ângulo obtuso. Trata-se de um triângulo obtusângulo.

7 Alternativa correta: **b**. Dividindo um termo qualquer por seu antecessor, descobre-se que a PG tem razão $q = -1$; os termos têm sinais alternados, o que os matemáticos chamam de PG oscilante (quando $q < 0$ e $a_1 \neq 0$).

Somando os seis primeiros termos, tem-se:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

Somando os sete primeiros termos, tem-se:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

Ou seja, se o número de termos é par, a soma é 0; se o número de termos é ímpar, a soma é 1.

8 Alternativa correta: **a**. Como a razão é um número positivo e o 1º termo é negativo, o 2º termo será negativo; assim, todos os termos serão negativos. O valor em módulo dos termos aumenta, mas, por causa do sinal negativo, à medida que **n** cresce, decresce o valor de $\mathbf{a_n}$, ou seja, a PG é decrescente.

Veja no caso em que $a_1 = -2$ e razão $r = 3$ $(-2, -6, -18, ...)$.

DICA!

Quando for resolver exercícios desse tipo, faça o teste com números e decida a alternativa correta.

Registro de dúvidas e comentários

UNIDADE 3

EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MATEMÁTICA

TEMAS

1. Função exponencial
2. Equações exponenciais
3. Logaritmos
4. Propriedades operatórias dos logaritmos

Introdução

Aplicações financeiras, juros compostos, depreciação de bens, crescimento ou decrescimento populacional são exemplos de situações que envolvem funções com propriedades especiais. Nesta Unidade, você estudará as funções que descrevem essas situações.

TEMA 1 Função exponencial

Neste tema, você estudará a função exponencial, que tem uma característica importante: o fato de a variável encontrar-se no expoente.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já conhece as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Conhece também a potenciação e a radiciação. Essas operações são importantes para resolver problemas práticos. Mas será que elas podem resolver problemas mais complexos, em que as variáveis crescem mais depressa, como no caso das potências?

Função exponencial

Observe as quatro sequências a seguir e como elas crescem.

n	0	1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10
2n	0	2	**4**	6	**8**	10	12	14	**16**	18	20
n^2	0	1	**4**	9	**16**	25	36	49	64	81	100
2^n	1	2	**4**	**8**	**16**	32	64	128	256	512	1.024

A primeira linha do quadro representa a sequência dos números **naturais**; a segunda, a sequência dos **múltiplos de 2**; a terceira é a sequência dos **quadrados perfeitos**; e a quarta, a das **potências de 2**.

Observe a velocidade do crescimento de cada sequência usando como referência as colunas do quadro da página anterior.

A sequência dos números naturais é a mais lenta, pois, nas demais sequências, veja a posição do 4, do 8 e do 16 nas quatro linhas: a sequência dos quadrados perfeitos parece crescer mais rapidamente que a sequência das potências de 2 até a quarta coluna, mas a partir da quinta fica claro que as potências de 2 crescem bem mais rápido que todas as outras.

Entender o comportamento relacionado ao crescimento de funções é o principal objetivo desta Unidade. Para isso, você estudará algumas ideias e propriedades das **potências**.

Tome como exemplo uma potência de 2, para em seguida generalizá-la, usando letras:

$2^3 = 8$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\mathbf{a^n = P}$ → esta é uma expressão algébrica em que **a** é a base, **n**, o expoente, e **P**, a potência.

Ao se fixar a base e variar o expoente, tem-se uma função do tipo $f(x) = a^x$, conhecida como **função exponencial**.

Veja como é o comportamento desse tipo de função no caso em que a base **a** é igual a **2**:

$f(x) = 2^x$, se: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2^1 = 2$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 2^4 = 16$

...

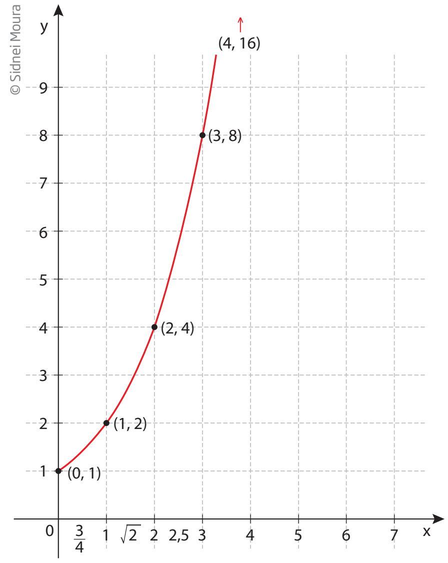
$x = n \Rightarrow f(n) = 2^n$

Você sabe as propriedades das potências de expoente **0** ou **1**? Veja.

Dado a^x:

- se $x = 0$, tem-se $\mathbf{a^0 = 1}$, pois todo número elevado a 0 é igual a 1, para $a \neq 0$.
- se $x = 1$, tem-se $\mathbf{a^1 = a}$, pois todo número elevado a 1 resulta nele mesmo.

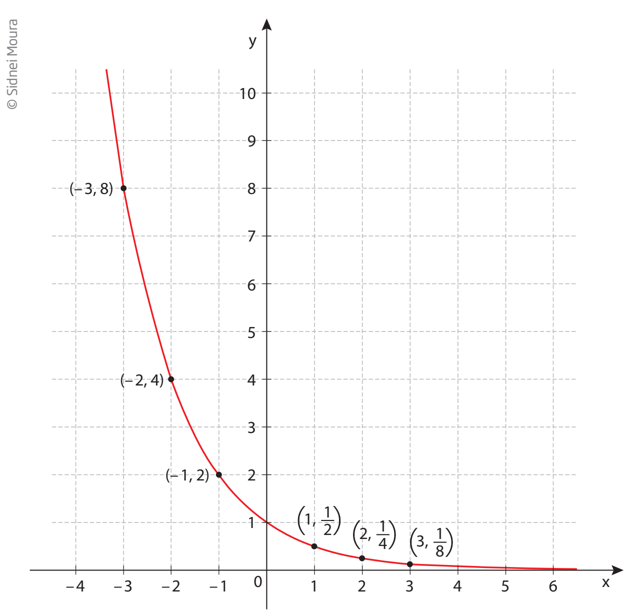
Chamando y = f(x) é possível esboçar o gráfico da função, que tem o seguinte aspecto:



Embora não se tenha calculado o valor de **y** para valores não inteiros como $\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$ ou 2,5, o gráfico sugere que a função é crescente: o valor da potência aumenta à medida que aumenta o valor do expoente.

Lembre-se do que ocorre quando o expoente é um número inteiro negativo. No caso do exemplo $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ pode-se calcular:

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$



IMPORTANTE!

Quanto maior o valor de **x**, menor será o valor de **y**, mas **y** nunca será zero.

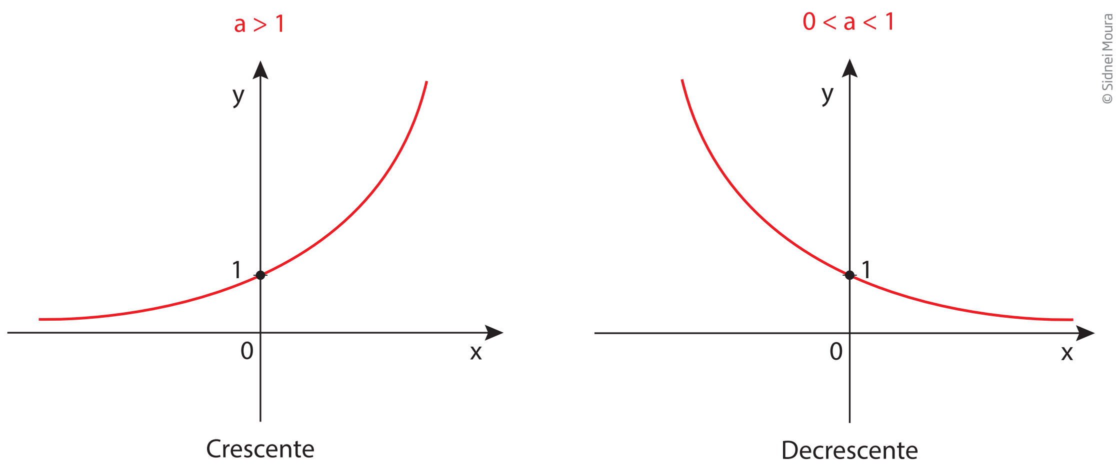
$$2^{-1.000} = \frac{1}{2^{1.000}} > 0$$

Ou seja, o gráfico nunca intercepta o eixo das abscissas.

A aparência do gráfico para **x** assumindo valores reais (negativos, positivos e nulo) é como se vê acima.

Gráfico da função exponencial

Dada uma função exponencial do tipo $y = a^x$, se a base $a > 1$, a função exponencial é crescente; se $0 < a < 1$, a função é decrescente:



PENSE SOBRE...

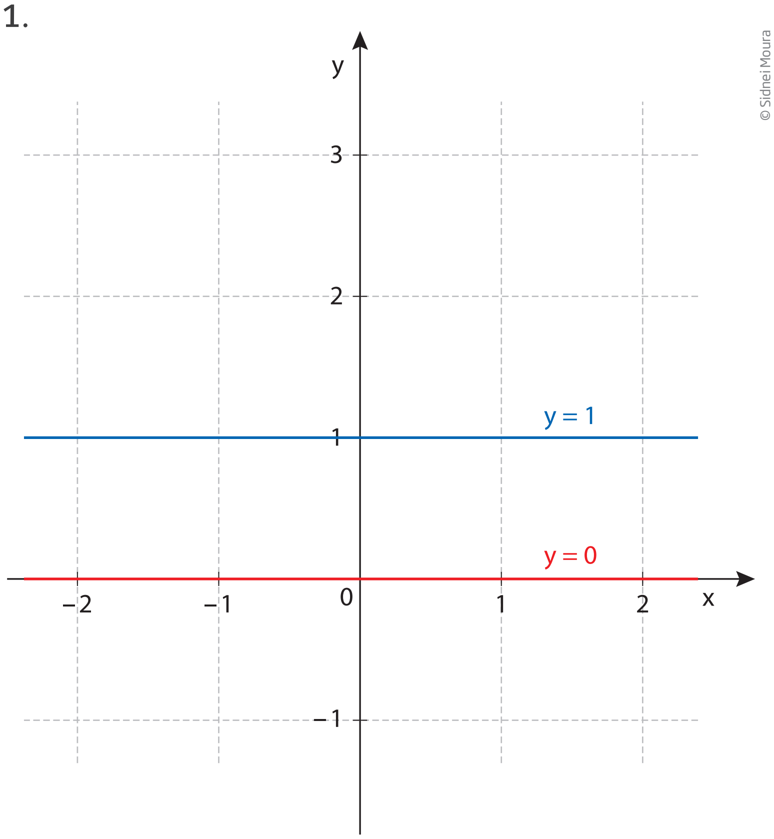
O que acontece quando $a = 0$ ou $a = 1$?

Para responder a essa questão, é necessário rever algumas propriedades das potências quando as bases são **0** e **1**.

Dada a função $y = a^x$,

- se $a = 0$, tem-se $\mathbf{y = 0^x = 0}$, pois 0 elevado a qualquer expoente é sempre **0**.
- se $a = 1$, tem-se $\mathbf{y = 1^x = 1}$, pois 1 elevado a qualquer expoente é sempre **1**.

Nos dois casos, a função não é crescente nem decrescente, e sim constante. Seus gráficos são representados por uma reta paralela ao eixo das abscissas, no caso de $y = 1$, ou coincidente com esse eixo, no caso de $y = 0$.



ATIVIDADE 1 Funções exponenciais

1 Indique qual é a expressão algébrica da função exponencial do gráfico a seguir:

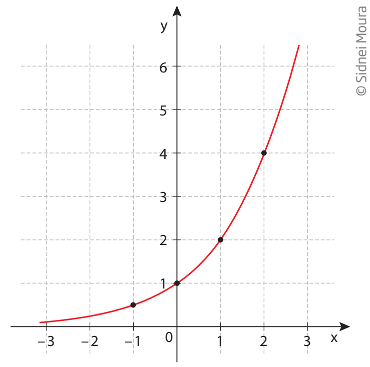
a) $y = 5^x$

b) $y = 4^x$

c) $y = 3^x$

d) $y = 2^x$

e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



2 Indique qual é a expressão algébrica da função exponencial do gráfico a seguir:

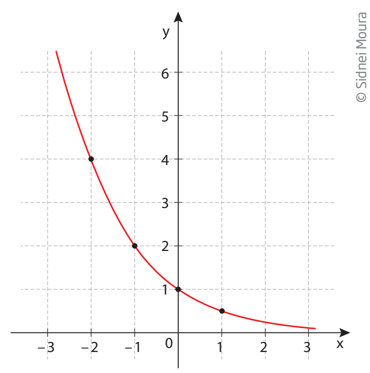
a) $y = 4^x$

b) $y = 2^x$

c) $y = 1^x$

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



3 Os gráficos de três funções exponenciais do tipo $y = a^x$ estão representados no mesmo sistema cartesiano. Indique qual das afirmações está correta.

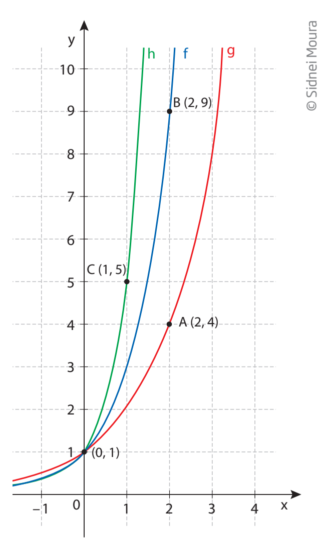
a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$

b) $g(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = 2^x$ e $h(x) = 3^x$

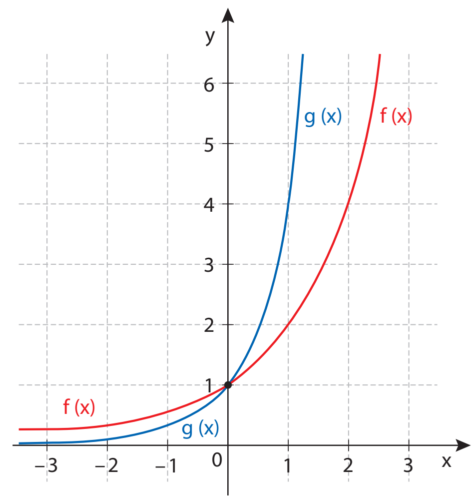
d) $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 3^x$

e) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 5^x$



4 Sejam as funções exponenciais $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$.

Assinale a alternativa correta:



a) $f(1) > g(1)$

b) $g(2) < f(2)$

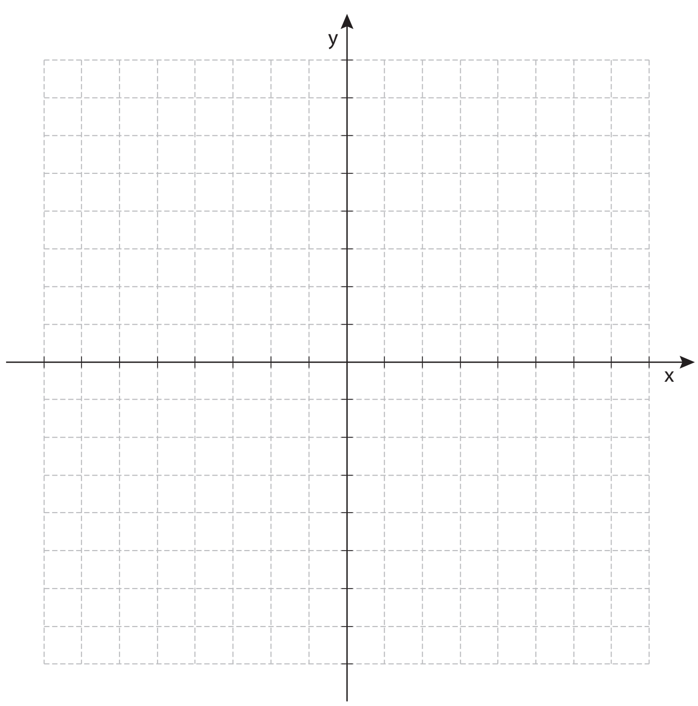
c) $f(0) = g(0)$

d) $f(-1) < g(-1)$

e) $g(-2) > f(-2)$

5 Seja a função $y = 3^x$.

a) Esboce o gráfico dessa função.

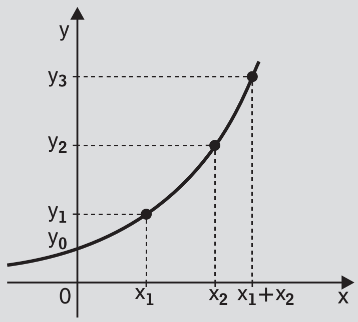


b) Calcule o valor numérico de **y** para $x = 4$.

c) Determine qual é o valor de **x** quando $y = 243$.

DESAFIO

A figura abaixo é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$ no plano cartesiano. Com base nesse gráfico, é **correto** afirmar que:



a) $y_0 = y_2 - y_1$

b) $y_1 = y_3 - y_2$

c) $y_1 = y_3 + y_0$

d) $y_2 = y_1 \cdot y_0$

e) $y_3 = y_1 \cdot y_2$

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), 2003. Disponível em: <http://www.cneconline.com.br/cneconline/exames-educacionais/vestibular/provas/mg/ufjf/2003/1a-e-2a-fase/ufjf-2003-prova-completa-1a-fase-c-gabarito.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Funções exponenciais

1 Alternativa correta: **d**. O gráfico sugere que se trata de uma função $y = f(x)$ crescente e do tipo $f(x) = a^x$, com $f(1) = 2 = 2^1$ e $f(2) = 4 = 2^2$. Trata-se da função $f(x) = 2^x$.

2 Alternativa correta: **d**. O gráfico sugere que se trata de uma função $y = f(x)$ decrescente e do tipo $f(x) = a^x$, com $f(-1) = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e $f(-2) = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Trata-se da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3 Alternativa correta: **b**.

No gráfico da função **h**, tem-se $h(1) = 5 \Rightarrow h(x) = 5^x$.

No gráfico da função **f**, tem-se $f(2) = 9 = 3^2 \Rightarrow f(x) = 3^x$.

No gráfico da função **g**, tem-se $g(2) = 4 = 2^2 \Rightarrow g(x) = 2^x$.

Logo, $g(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$.

4 Alternativa correta: **c**.

a) Incorreta, pois $f(1) = 2$ e $g(1) = 4$.

b) Incorreta, pois $g(2) > 5$ e $f(2) = 4$.

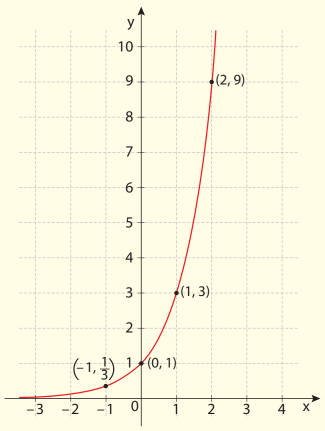
c) Correta, pois $a^0 = b^0 = 1 \Rightarrow f(0) = g(0)$.

d) Incorreta, pois $f(-1) = \frac{1}{2}$ e $g(-1) = \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

e) Incorreta, pois no gráfico pode-se ver que $g(-2)$ está abaixo de $f(-2)$. Portanto, $g(-2) < f(-2)$.

5

a) Veja no gráfico ao lado, $y = 3^x$



b) $y = 3^4 = 81$

c) Se $y = 243 \Rightarrow 243 = 3^x$; fatorando 243, obtém-se $243 = 3^5$, ou seja, $x = 5$.

Desafio

Alternativa correta: **e**.

Pelo gráfico, identifica-se que $y_1 = 2^{x_1}$, $y_2 = 2^{x_2}$ e $y_3 = 2^{x_1 + x_2}$.

Como $y_3 = 2^{x_1 + x_2}$, pela propriedade da multiplicação de potência de mesma base, tem-se:

$y_1 \cdot y_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = y_3$, então $y_3 = y_1 \cdot y_2$.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Muitos problemas do dia a dia de profissionais ou cientistas, para serem resolvidos, têm que ser equacionados e recaem em uma equação cuja incógnita é um expoente. Uma equação desse tipo é chamada **equação exponencial**. É esse assunto que você estudará neste tema.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Em muitas situações do cotidiano, você já se deparou com a necessidade de encontrar um valor desconhecido, por exemplo, para conferir o troco após uma compra ou saber se o dinheiro que tem é suficiente para comprar algo.

Reflita: Se você sabe quanto uma pessoa pagou por 5 peças iguais de um produto, pode descobrir quanto custou cada uma delas?

Equação exponencial

Antes de estudar os métodos de solução de uma equação exponencial, veja alguns exemplos de situações em que as variáveis crescem ou decrescem de acordo com uma lei exponencial.

Exemplo 1. Alguns bens de uso pessoal, como automóvel e computador, perdem valor em função do tempo de uso, do consequente desgaste ou mesmo porque se tornam obsoletos. Para determinar o valor de um veículo que foi comprado por R$ 30.000,00, utiliza-se a fórmula $\mathbf{V(t) = 30.000 \cdot 2^{-0,25t}}$, em que a variável **V** (valor do veículo) depende de **t**, que indica o tempo em anos. Depois de quanto tempo o valor desse veículo será de R$ 15.000,00?

Para responder a essa questão, os economistas têm que resolver a equação:

$15.000 = 30.000 \cdot 2^{-0,25t} \Rightarrow \dfrac{15.000}{30.000} = 2^{-0,25t}$, então: $2^{-0,25t} = \dfrac{1}{2}$, chegando ao resultado: 4 anos. Veja como encontrar a solução:

$2^{-0,25t} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{-0,25t} = 2^{-1}$; como as bases são iguais, observam-se os expoentes:

$$-0,25 \cdot t = -1 \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,25} \Rightarrow t = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow t = -1 \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) \Rightarrow t = 4$$

Resposta: 4 anos.

Exemplo 2. O rendimento da maioria das aplicações financeiras, bem como os juros compostos cobrados pelos bancos, utilizam modelos de funções exponenciais. A fórmula que dá o rendimento de uma aplicação na poupança a i% de juros tem como montante $M(t) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$. No caso de os juros serem de 0,5% ao mês, tem-se $M(t) = C \cdot (1{,}005)^t$, em que **M(t)** é o montante acumulado ao final de um período de **t** meses. De acordo com esse modelo, uma aplicação de R$ 1.000,00 rende R$ 61,68 ao final de 1 ano. Para saber após quanto tempo essa aplicação obterá o rendimento de R$ 200,00, é preciso resolver a equação exponencial $1.200 = 1.000 \cdot (1{,}005)^t$, que resultará em 3 anos.

Exemplo 3. A população de determinada cidade cresce 5% ao ano. No último censo, a população era de 12.345 habitantes. A fórmula que possibilita estimar o tamanho da população ano a ano é $P = 12.345 \cdot 1{,}05^t$. Para saber em quantos anos a população dobrará, é preciso resolver a equação exponencial $1{,}05^t = 2$. Ao resolver essa equação, pode-se concluir que a população dobra de tamanho em aproximadamente 14 anos.

Resolução de equações exponenciais

Para resolver uma equação exponencial, é preciso conhecer e aplicar bem as regras e as propriedades das potências, assim como, dependendo do valor da base, utilizar tabelas e calculadoras científicas. Nos exercícios deste tema, serão explorados exemplos que, para serem resolvidos, basta conhecer potências. Observe a seguir:

Exemplo 1. $2^{x+3} = 32$

A primeira dica é expressar os dois membros da equação na mesma base. Fatorando 32, obtém-se 2^5, e a equação fica:

$$2^{x+3} = 2^5$$

Como nos dois membros as bases são iguais a 2, igualam-se os expoentes:

$x + 3 = 5$ e, portanto, $x = 2$.

Verificação: $2^{2+3} = 2^5 = 32$.

Exemplo 2. $9^{2x} = 81$

Nesse caso, as bases são diferentes, mas veja que tanto 9 como 81 são potências de 3, portanto, é preciso fatorar e reescrever a equação:

$$9 = 3^2 \text{ e } 81 = 3^4$$

Substituindo na equação original, tem-se: $(3^2)^{2x} = 3^4$. Aplicando a regra de potência de potência:

$3^{2 \cdot 2x} = 3^4 \Rightarrow 3^{4x} = 3^4$

Como as bases são iguais a 3, igualam-se os expoentes:

$4x = 4 \Rightarrow x = 1$

Verificação: $9^{2 \cdot 1} = 9^2 = 81$.

ATIVIDADE 1 Equações exponenciais

1 Resolva as equações exponenciais:

a) $10^x = 1.000.000$

b) $2^x = 64$

c) $3^x = 27$

d) $3^x = 729$

e) $5^x = 125$

2 Resolva as equações exponenciais:

a) $2^{x+1} = 32$

b) $3^{x+2} = 729$

c) $2^{2x} = 256$

d) $3^{x-2} = 243$

e) $5^{3x} = 125$

3 Resolva as equações exponenciais:

a) $27^x = 9$

b) $16^x = 128$

c) $25^x = 625$

d) $9^x = \frac{1}{3}$

e) $8^x = \frac{1}{4}$

4 Resolva as equações exponenciais:

a) $2^{x+3} = 1$

b) $3^{2x+1} = 3$

5 Resolva as equações exponenciais:

a) $2^{x(x+1)} = 1$

b) $3^{x^2-1} = 3$

c) $7^{x^2-5x+7} = 7$

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Equações exponenciais

1 Fatorando as potências do segundo membro das equações e igualando os expoentes, tem-se:

a) $1.000.000 = 10^6 \Rightarrow 10^x = 10^6 \Rightarrow x = 6$

b) $64 = 2^6 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

c) $27 = 3^3 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

d) $729 = 3^6 \Rightarrow 3^x = 3^6 \Rightarrow x = 6$

e) $125 = 5^3 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

2 Fatorando as potências do segundo membro, igualando os expoentes e resolvendo as equações de 1º grau, tem-se:

a) $2^{x+1} = 32 = 2^5 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^5 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$

b) $3^{x+2} = 729 = 3^6 \Rightarrow 3^{x+2} = 3^6 \Rightarrow x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4$

c) $2^{2x} = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

d) $3^{x-2} = 243 = 3^5 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^5 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$

e) $5^{3x} = 125 = 5^3 \Rightarrow 5^{3x} = 5^3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

3

a) $27^x = 9 \Rightarrow (3^3)^x = 3^2 \Rightarrow 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $16^x = 128 \Rightarrow (2^4)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{4x} = 2^7 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

c) $25^x = 625 \Rightarrow (5^2)^x = 5^4 \Rightarrow 5^{2x} = 5^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

d) $9^x = \frac{1}{3} \Rightarrow (3^2)^x = 3^{-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

e) $8^x = \frac{1}{4} \Rightarrow (2^3)^x = 2^{-2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-2} \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

4

a) Lembrando que a definição de potência com expoente 0 (zero) é: $a^0 = 1$, para $a \neq 0$, é possível substituir o 1 por uma potência de expoente 0 (zero) pela base que convém, no caso 2^0.

$2^{x+3} = 1 = 2^0 \Rightarrow 2^{x+3} = 2^0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

b) Lembrando a definição de potência com expoente 1: $a^1 = a$, é possível escrever $3 = 3^1$.

$3^{2x+1} = 3 \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^1 \Rightarrow 2x + 1 = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

5

a) $2^{x(x+1)} = 1 \Rightarrow 2^{x(x+1)} = 2^0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

b) $3^{x^2-1} = 3 = 3^1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

c) $7^{x^2-5x+7} = 7 \Rightarrow 7^{x^2-5x+7} = 7^1 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Resolvendo a equação de 2º grau, encontram-se as raízes 2 e 3, ou seja, $7^{x^2-5x+7} = 1$ se $x = 2$ ou se $x = 3$.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Neste tema, você conhecerá os logaritmos, que são de grande ajuda na resolução de equações com expoentes desconhecidos.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

A maioria das pessoas conhece e utiliza nas atividades cotidianas as quatro operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Mas como fazer para resolver uma multiplicação ou uma divisão de um número muito grande?

ASSISTA!

Matemática – Volume 2

Logaritmo tem história

Esse vídeo apresenta a história do logaritmo desde seu surgimento. Relembra o método usado por Arquimedes para efetuar alguns cálculos mais complexos por meio de progressões aritmética e geométrica (PA e PG) e explica que várias análises relacionaram a tabela que ele usava à exponenciação e à logaritmação.

Introdução ao conceito de logaritmo

As operações aritméticas têm relação entre si, por exemplo: a subtração é a operação inversa da adição, e a divisão, a operação inversa da multiplicação.

Para entender melhor o que é uma **operação inversa**, pense nas seguintes questões:

- Qual é o número que deve ser somado a 27 para se obter 52?

$$27 + n = 52$$

É possível resolver essa equação por meio de uma subtração:

$$n = 52 - 27 \Rightarrow n = 25$$

- Qual é o número que, multiplicado por 32, é igual a 512?

$$32 \cdot m = 512$$

Para encontrar o valor de **m**, é preciso dividir 512 por 32:

$$m = 512 \div 32 = 16$$

Em muitas situações científicas, são definidas operações mais complexas a partir das operações básicas mais simples. Um exemplo é a multiplicação, que pode ser definida como uma adição de parcelas iguais. De modo semelhante, define-se a **potenciação** como uma multiplicação de fatores iguais, o que muitos chamam de "a quinta operação".

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \geq 2}$$

A potenciação apresenta uma particularidade, pois é uma operação que tem duas operações inversas: **radiciação** e **logaritmação**. Veja por quê.

Você sabe que $7^2 = 49$. Com base nessa igualdade, pode-se pensar em três tipos de equação:

Caso 1. A base e o expoente são conhecidos; o resultado é desconhecido.

$7^2 = x \rightarrow$ Para encontrar o valor de **x**, efetua-se uma potenciação.

Caso 2. O expoente e o resultado são conhecidos; a base é desconhecida.

$x^2 = 49 \rightarrow$ Para encontrar o valor de **x**, resolve-se a equação de 2º grau, o que, nesse caso, implica achar $\sqrt{49}$, ou seja, efetua-se uma radiciação.

Caso 3. A base e o resultado são conhecidos; o expoente é desconhecido.

$7^x = 49 \rightarrow$ Para encontrar o valor de **x**, resolve-se a equação exponencial, uma vez que a incógnita é um expoente. A essa operação se dá o nome de logaritmação, e diz-se que o logaritmo de 49 na base 7 é 2, porque 7 elevado ao quadrado é igual a 49.

$$\log_7 49 = 2 \Leftrightarrow 7^2 = 49$$

Veja mais exemplos:

Exemplo 1. $5^x = 125$

Como $5^3 = 125$, isto implica que $5^x = 5^3$ e $x = 3$.

Pode-se afirmar que o logaritmo de 125 na base 5 é igual a 3, porque 5 elevado a 3 é igual a 125.

Em linguagem matemática: $\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$.

Exemplo 2. Qual é o logaritmo de 81 na base 3?

Em linguagem matemática: $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81$.

Fatorando 81, obtém-se $3^4 = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

Logaritmo – definição formal

Você já resolveu alguns exercícios sobre logaritmos. Agora veja uma definição formal.

Dados os números reais **b** (positivo e diferente de 1), **N** (positivo) e **x**, que satisfaçam a relação $b^x = N$, diz-se que **x é o logaritmo de N na base b**.

Em linguagem matemática, expressa-se essa definição da seguinte forma:

Sejam $1 \neq b > 0$, e $N > 0$ com $b, N \in \mathbb{R}$.

"O logaritmo de **N** na base **b** é o número **x** que se deve elevar à base **b** para se obter **N**."

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

ATIVIDADE 1 Logaritmos

1 Determine o valor dos expoentes:

a) $3^x = 81$

b) $2^x = 128$

c) $3^x = 243$

d) $5^x = 625$

LEMBRE!

Para escrever um número em forma de potência pode-se fazer sua decomposição em fatores primos.

16	2
8	2
4	2
2	2
1	2^4

e) $2^x = 512$

f) $7^x = 343$

2 Calcule os logaritmos:

a) $\log_2 128$

b) $\log_3 81$

c) $\log_5 625$

d) $\log_4 64$

e) $\log_{10} 1.000$

3 Ache o valor de **a**:

a) $\log_a 64 = 2$

b) $\log_a 81 = 4$

c) $\log_a 125 = 3$

d) $\log_a 64 = 3$

e) $\log_a 64 = 6$

f) $\log_a 81 = 2$

4 Resolva as equações:

a) $\log_3 x = 5$

b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_{10} x = 6$

d) $\log_3 x = 3$

e) $\log_2 x = 0$

f) $\log_2 x = 1$

5 Calcule os logaritmos:

OBSERVAÇÃO!

O log com logaritmando fracionário resulta em uma base inteira com expoente negativo.

Exemplo:

$\log_2 \frac{1}{8} = x \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

a) $\log_3 \frac{1}{9}$

b) $\log_2 \frac{1}{32}$

c) $\log_3 \frac{1}{81}$

d) $\log_{10} \frac{1}{100.000}$

6 Calcule o valor de **x** nas equações a seguir:

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_3 x = -1$

c) $\log_5 x = 3$

d) $\log_{10} x = -2$

e) $\log_7 x = 1$

DESAFIO

Seja $n = 8^{2\log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de **n** é:

a) 5^2
b) 8^3
c) 2^5
d) 5^3

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2003. Disponível em: <http://web.cpv.ufmg.br/Arquivos/2003/ProvasUFMG/1ETAPA/Matem%e1tica%20-%20Caderno%201%20-%201%aa%20Etapa%20-%202003.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Logaritmos

1 O objetivo desse exercício foi o de relembrar alguns cálculos e “dar ritmo” para resolver os exercícios seguintes.

a) $3^x = 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$

b) $2^x = 128 = 2^7 \Rightarrow x = 7$

c) $3^x = 243 = 3^5 \Rightarrow x = 5$

d) $5^x = 625 = 5^4 \Rightarrow x = 4$

e) $2^x = 512 = 2^9 \Rightarrow x = 9$

f) $7^x = 343 = 7^3 \Rightarrow x = 3$

2

a) $\log_2 128 = x$, aplicando a definição, tem-se $2^x = 128$. O número 128 pode ser decomposto como 2^7, então $2^x = 2^7$, logo $x = 7$.

b) $\log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$

c) $\log_5 625 = x \Rightarrow 5^x = 625 = 5^4 \Rightarrow x = 4$

d) $\log_4 64 = x \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 3$

e) $\log_{10} 1.000 = x \Rightarrow 10^x = 1.000 = 10^3 \Rightarrow x = 3$

3

a) $\log_a 64 = 2 \Rightarrow a^2 = 64 = 8^2 \Rightarrow a = 8$

b) $\log_a 81 = 4 \Rightarrow a^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow a = 3$

c) $\log_a 125 = 3 \Rightarrow a^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow a = 5$

d) $\log_a 64 = 3 \Rightarrow a^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow a = 4$

e) $\log_a 64 = 6 \Rightarrow a^6 = 64 = 2^6 \Rightarrow a = 2$

f) $\log_a 81 = 2 \Rightarrow a^2 = 81 = 9^2 \Rightarrow a = 9$

4

a) $\log_3 x = 5 \Rightarrow 3^5 = x \Rightarrow x = 243 \Rightarrow \log_3 243 = 5$

b) $\log_5 x = 3 \Rightarrow 5^3 = x \Rightarrow x = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$

c) $\log_{10} x = 6 \Rightarrow 10^6 = x \Rightarrow x = 1.000.000 \Rightarrow \log_{10} 1.000.000 = 6$

d) $\log_3 x = 3 \Rightarrow 3^3 = x \Rightarrow x = 27 \Rightarrow \log_3 27 = 3$

e) $\log_2 x = 0 \Rightarrow 2^0 = x \Rightarrow 2^0 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \log_2 1 = 0$

f) $\log_2 x = 1 \Rightarrow 2^1 = x \Rightarrow 2^1 = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \log_2 2 = 1$

5

a) $\log_3 \frac{1}{9} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = (3^{-1})^2 = 3^{-2} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

b) $\log_2 \frac{1}{32} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (2^{-1})^5 = 2^{-5} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$

c) $\log_3 \frac{1}{81} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = (3^{-1})^4 = 3^{-4} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$

d) $\log_{10} \frac{1}{100.000} = x \Rightarrow 10^x = \frac{1}{100.000} = \left(\frac{1}{10}\right)^5 = (10^{-1})^5 = 10^{-5} \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{100.000} = -5$

6

a) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$

b) $\log_3 x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $\log_5 x = 3 \Rightarrow 5^3 = x \Rightarrow x = 125$

d) $\log_{10} x = -2 \Rightarrow 10^{-2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{100} = 0{,}01$

e) $\log_7 x = 1 \Rightarrow 7^1 = x \Rightarrow x = 7$

Desafio

Alternativa correta: **d**.

$2\log_2 15 - \log_2 45 = \log_2 15^2 - \log_2 45 = \log_2 225 - \log_2 45 = \log_2 \frac{225}{45} = \log_2 5$. Então:

$n = 8^{\log_2 5} \Rightarrow n = 2^{3\log_2 5} \Rightarrow n = 2^{\log_2 5^3}$

Lembrando que, na definição de logaritmo, tem-se:

$\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$, a igualdade $n = 2^{\log_2 5^3}$ pode ser escrita como $\log_2 n = \log_2 5^3$, assim em ambos os termos se tem o $\log_2$ de onde conclui-se que $n = 5^3$.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Neste tema, você verá como facilitar cálculos trabalhosos usando regras e estratégias para resolver equações exponenciais e também a operação logarítmica que aprendeu no tema anterior.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já tem noção de fenômenos em que o crescimento ou decrescimento segue uma lei exponencial e também de algumas regras e estratégias que auxiliam a resolução de equações exponenciais. Então, pense: O que é mais simples: multiplicar dois números de dois algarismos ou somar dois números de um algarismo cada?

Faça um teste calculando $32 \cdot 64$ e $5 + 6$.

Efetuar $5 + 6 = 11$ é bem mais simples e rápido do que calcular $32 \cdot 64 = 2.048$. Você não concorda?

ASSISTA!

Matemática – Volume 2

Para que serve o logaritmo?

Esse vídeo mostra o uso do logaritmo no cotidiano. Apresenta situações e profissionais que fazem uso dele, mostrando que, apesar de atualmente não se perceber sua utilização por causa das facilidades dos programas de computador e das calculadoras, o logaritmo está presente em muitos cálculos.

Propriedades dos logaritmos

Agora analise a tabela a seguir, localizando nela os números que aparecem nas operações que você realizou na seção *O que você já sabe?*.

n	1	2	3	4	**5**	**6**	7	8	9	10	**11**	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024	2.048	4.096

Observe que $32 = 2^5$ e $64 = 2^6$.

Aplicando as propriedades das potências, e usando os dados da tabela, tem-se:

$32 \cdot 64 = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11} = 2.048$

O que se fez foi encontrar o resultado de uma multiplicação consultando uma tabela de potências de 2 e efetuando uma adição.

Fatos como esse levaram os matemáticos a construir tabelas com os valores de logaritmos, a fim de simplificar operações e assim reduzir o tempo gasto em cálculos, sobretudo em cálculos complexos, que seriam úteis para astrônomos, engenheiros e bancários no século XVII.

Com base nos logaritmos, é possível transformar:

- multiplicação em adição;
- divisão em subtração;
- exponenciação em multiplicação;
- radiciação em divisão.

Para isso, basta aplicar as propriedades das operações logarítmicas, que se constituíram na principal ferramenta para facilitar cálculos complexos.

P1: Logaritmo de um produto

Daqui em diante, considere sempre que $0 < b \neq 1$ e $M, N > 0$.

$$\log_b (M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$$

O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos dos fatores.

Veja, nos exemplos a seguir, como se aplica essa propriedade.

- $\log_2 (64 \cdot 128) = \log_2 64 + \log_2 128$

  $\log_2 64 = 6$ porque $2^6 = 64$ e $\log_2 128 = \mathbf{7}$, então é possível concluir que

  $\log_2 (64 \cdot 128) = 6 + 7 = 13$
- $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = \mathbf{7}$
- $\log_{10} (100 \cdot 1.000) = \log_{10} 100 + \log_{10} 1.000 = 2 + 3 = \mathbf{5}$
- $\log_{10} (1{,}618 \cdot 3{,}14) = \log_{10} 1{,}618 + \log_{10} 3{,}14$ (para saber o valor numérico exato, costuma-se utilizar uma calculadora científica)

Até 1980, era comum encontrar em livrarias uma tabela de logaritmos na base 10, o que permitia fazer cálculos trabalhosos, como $1{,}618 \cdot 3{,}14$, consultando a tabela de logaritmos e usando a propriedade que transforma multiplicações em adições. Hoje, com a popularização das calculadoras, isso não é mais necessário, mas a propriedade que está sendo tratada aqui é utilizada em teorias de Matemática, Física e Química.

- $\log_{10} 7 \cdot 11 \cdot 13$

Mesmo não sabendo o valor dos logaritmos de 7, 11 e 13 na base 10, pode-se afirmar que o resultado é a soma dos logaritmos:

$$\log_{10} 7 + \log_{10} 11 + \log_{10} 13$$

PARA SABER MAIS

Demonstração da propriedade do logaritmo do produto

$\log_b M = x \quad \Rightarrow \quad b^x = M$ (i)

$\log_b N = y \quad \Rightarrow \quad b^y = N$ (ii)

$\log_b (M \cdot N) = z \quad \Rightarrow \quad b^z = M \cdot N$ (iii)

Substituindo (i) e (ii) em (iii), e aplicando a regra do produto de potências de mesma base:

$b^z = b^x \cdot b^y$

$b^z = b^{x+y}$

$z = x + y$, isto é,

$\log_b (M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$

P2: Logaritmo de um quociente

$$\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$$

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o do divisor.

Veja os exemplos:

- $\log_2 \left(\frac{32}{64}\right) = \log_2 32 - \log_2 64$
- $\log_3 (27 \div 81) = \log_3 27 - \log_3 81$
- $\log_{10} \left(\frac{100}{1.000}\right) = \log_{10} 100 - \log_{10} 1.000$
- $\log_7 \frac{343}{49} = \log_7 343 - \log_7 49$
- $\log_{10} \frac{100}{4} = \log_{10} 100 - \log_{10} 4$

P3: Logaritmo de uma potência

$$\log_b N^k = k \cdot \log_b N$$

Exemplo 1.

Determinar $\log_5 25^6$.

Nesse caso, não é necessário saber o valor de 25^6, que, além de ser um número muito grande (maior que 200 milhões), demanda um cálculo muito trabalhoso. Usando a propriedade do logaritmo da potência, tem-se:

$\log_5 25^6 = 6 \cdot \log_5 25$, mas, como $\log_5 25 = 2$, o cálculo fica simplificado:

$\log_5 25^6 = 6 \cdot \log_5 25 = 6 \cdot 2 = 12$

12 é o número que se deve elevar a 5 para se obter $25^6 = 244.140.625$.

Exemplo 2.

Calcular $\log_2 \sqrt{32}$.

Nesse caso, é preciso recordar uma das propriedades das potências:

> A raiz quadrada de um número pode ser expressa por meio de uma potência em que o expoente é uma fração: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$.

Do mesmo modo, a raiz cúbica de um número pode ser expressa por meio de uma potência em que o expoente é $\frac{1}{3}$, ou seja, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Veja os exemplos:

$49^{\frac{1}{2}} = 7$, porque $\sqrt{49} = 7$

$125^{\frac{1}{3}}$, porque $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, ou seja, $\sqrt[3]{125} = 5$

Voltando ao cálculo de $\log_2 \sqrt{32}$, sabendo que $\sqrt{32} = 32^{\frac{1}{2}}$, tem-se que

$\log_2 \sqrt{32} = \log_2 32^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 32 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

Mudança de base e logaritmos decimais

Na maioria das aplicações práticas, o logaritmo que precisa ser calculado envolve números racionais na forma decimal ou fracionária e números irracionais cujas aproximações podem ter muitas casas decimais, como o número $\pi = 3{,}1415...$ ou a constante $e = 2{,}718...$, muito utilizados em problemas científicos. Para efetuar esses cálculos, usa-se uma técnica conhecida como mudança de base.

• Escolhe-se uma nova base conhecida ou de fácil cálculo (por exemplo, base 10) com a calculadora.

• Escolhendo a nova base, iguala-se o logaritmo a ser calculado pela razão entre os dois logaritmos (numerador e denominador) com a nova base escolhida.

• Conhecendo o valor desses dois logaritmos, é só dividi-los e obter o logaritmo procurado.

• A técnica é bem simples, basta efetuar uma divisão de logaritmos, como se segue:

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$$

• Ou seja, o que era base (a) em $\log_a N$ torna-se logaritmando no denominador da igualdade, com uma nova base **c**.

Veja alguns exemplos:

• $\log_4 16$ e $\log_4 32$

Pode-se calcular esse logaritmo usando o que se sabe sobre potências de 2:

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$$

Você pode pensar, no entanto, que aqui a regra não é necessária, porque $4^2 = 16$.

Você tem razão, mas esse é apenas um exemplo para mostrar como a regra de mudança de base funciona bem e pode ser utilizada para calcular, por exemplo:

$$\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Isso quer dizer que, se se elevar 4 à potência 2,5, o resultado será 32.

$$\begin{array}{ccccc} 16 & < & \boxed{32} & < & 64 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 4^2 & < & \boxed{4^{2,5}} & < & 4^3 \end{array}$$

• $\log_{16} 64$

$$\log_{16} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

- $\log_2 5 = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 2}$

- $\log_3 8 = \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3}$

- $\log_7 13 = \dfrac{\log 13}{\log 7}$

Em geral, a mudança de base usa os logaritmos de base 10, que podem ser facilmente obtidos por meio de tabelas ou calculadoras científicas. Os logaritmos na base 10 tornaram-se tão importantes que os matemáticos optaram por omitir a base quando o logaritmo é decimal. Assim, log N é o mesmo que $\log_{10} N$.

Considere as potências de 10:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & < & 10 & < & 100 & < & 1.000 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 10^0 & & 10^1 & & 10^2 & & 10^3 \end{array}$$

Sabendo que:

$1 < 2 < 10$, pode-se afirmar que $0 < \log 2 < 1 \Rightarrow \log 2 \cong 0{,}301$

$10 < 50 < 100 \Rightarrow 1 < \log 50 < 2 \Rightarrow \log 50 \cong 1{,}689$

$100 < 300 < 1.000 \Rightarrow 2 < \log 300 < 3 \Rightarrow \log 300 \cong 2{,}477$

PARA SABER MAIS

Estimativas de logaritmos, mudança de base e calculadoras

É simples determinar o logaritmo de um número quando este número é uma potência da base do logaritmo, tal como vários exemplos explorados ao longo desta Unidade. Mas o que dizer sobre $\log_2 5$?

A primeira coisa a se fazer é estimar seu valor encontrando um intervalo adequado. Nesse caso, sabendo que $4 < 5 < 8$, pode-se concluir que $\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$; como $\log_2 4 = 2$ e $\log_2 8 = 3$, pode-se afirmar que:

$$2 < \log_2 5 < 3$$

Mas, se for necessária uma aproximação melhor, é preciso utilizar outros recursos. Cálculos com logaritmos podem ser facilmente realizados com o auxílio de **calculadoras financeiras** ou **científicas**, cujas teclas de **log** fornecem valores na base 10 e cuja tecla **ln** fornece logaritmos na base 2,718... também chamados logaritmos naturais ou neperianos, muito úteis no estudo de fenômenos exponenciais. Os cálculos se tornam mais fáceis quando se sabe aplicar as regras de mudança de base e as propriedades dos logaritmos.

© Daniel Beneventi

Usando uma calculadora como essa e a regra de mudança de base, pode-se encontrar $\log_2 5$ com a precisão que se deseja.

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \cong \frac{0{,}69897}{0{,}30103} \cong 2{,}32$$

ATIVIDADE 1 Propriedade dos logaritmos

1 Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, use as propriedades das operações dos logaritmos para achar o valor de:

a) $\log 4$

b) $\log 6$

c) $\log 8$

d) $\log 9$

e) $\log 12$

2 Use a propriedade do logaritmo do quociente para calcular $\log 5$.

LEMBRE!
$5 = 10 \div 2$.

3 Use as propriedades dos logaritmos e os valores da tabela para calcular os seguintes logaritmos:

$\log 2 = 0{,}301$
$\log 3 = 0{,}477$
$\log 7 = 0{,}845$
$\log 11 = 1{,}041$
$\log 13 = 1{,}114$

a) $\log 14$

b) $\log 18$

c) $\log 21$

d) $\log 22$

e) $\log 26$

4 Use a propriedade da potência de logaritmos já conhecida para calcular:

a) $\log 16$

b) $\log 25$

c) $\log 27$

d) $\log 32$

e) $\log 81$

5 Determine os logaritmos decimais de:

a) 30

b) 1.001

DICA!
Decomponha os números 30 e 1.001 em fatores primos.

6 Use os valores dos logaritmos decimais, a regra de mudança de base e uma calculadora simples para mostrar por que $\log_2 3 \cong 1{,}585$.

7 Sabendo que $\log M = x$, $\log N = y$ e $\log P = z$, determine os logaritmos de:

a) $A = M \cdot N$

b) $B = M^2$

c) $C = N \div P$

d) $D = \dfrac{M \cdot N}{P}$

e) $E = \sqrt{N}$

PENSE SOBRE...

Aplicações de exponenciais e logaritmos

Logaritmos e exponenciais têm uma vasta aplicação nas Ciências Naturais, na Economia, na Demografia e em muitas outras ciências.

Os rótulos de produtos líquidos, em geral, trazem a informação sobre o grau do pH, que indica se a solução é mais ácida, neutra ou alcalina. Essa informação é uma escala logarítmica que varia de 0 a 14. O pH = 7 indica que a solução é neutra; o vinagre, por exemplo, que tem pH = 3 (menor que 7), é ácido; e o cloro, que tem pH = 12,5 (maior que 7), é alcalino.

A escala Richter, que indica a intensidade de terremotos, também é logarítmica. Um terremoto de grau 7 na escala Richter é forte e dez vezes mais potente que um terremoto moderado de grau 6, pois a escala Ritcher é baseada nos logaritmos de base 10.

Outra medida que se faz em uma escala logarítmica é a da intensidade dos sons, cuja unidade é o bel (B) e seu submúltiplo, o decibel (a décima parte de 1 bel).

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Propriedade dos logaritmos

1 Usando as propriedades das operações, obtêm-se as seguintes respostas aproximadas:

a) $4 = 2 \cdot 2$. Aplicando a propriedade do produto de logaritmos, tem-se:

$\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot (0{,}301) = 0{,}602$

Isso quer dizer que $10^{0{,}602} \cong 4$.

b) $6 = 2 \cdot 3$. Aplicando a propriedade do produto de logaritmos, tem-se:

$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

Isso quer dizer que $10^{0{,}778} \cong 6$.

c) $8 = 2^3$. Aplicando a propriedade da potência de logaritmos, tem-se:

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$

Isso quer dizer que $10^{0{,}903} \cong 8$.

d) $9 = 3^2$. Aplicando-se a propriedade da potência de logaritmos, tem-se:

$\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot \log 3 = 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954$

Isso quer dizer que $10^{0{,}954} \cong 9$.

Atenção: 0,954 é quase 1 e $10^1 = 10$.

e) Fatorando 12, obtém-se $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$\log 12 = \log 2 + \log 2 + \log 3 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}079$

2 Usando a propriedade do logaritmo do quociente e o fato de que $5 = 10 \div 2$, tem-se que

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$.

3

a) $\log 14 = \log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 = 0{,}301 + 0{,}845 = 1{,}146$

b) $\log 18 = \log(2 \cdot 3 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 + \log 3 = 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}255$

c) $\log 21 = \log(3 \cdot 7) = \log 3 + \log 7 = 0{,}477 + 0{,}845 = 1{,}322$

d) $\log 22 = \log(2 \cdot 11) = \log 2 + \log 11 = 0{,}301 + 1{,}041 = 1{,}342$

e) $\log 26 = \log(2 \cdot 13) = \log 2 + \log 13 = 0{,}301 + 1{,}114 = 1{,}415$

4 Usando a propriedade da potência de logaritmos já conhecida, obtém-se:

a) $16 = 2^4$ (mas 16 também é igual a 4^2).

$\log 16 = \log 2^4 = 4 \cdot \log 2 = 4 \cdot 0{,}301 = 1{,}204$

$1{,}204 = 2 \cdot \log 4$; como $\log 4$ é 0,602 (já calculado no exercício 1) $\Rightarrow 2 \cdot 0{,}602 = 1{,}204$

b) $25 = 5^2$

$\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5$ (já calculado no exercício 2) $= 2 \cdot 0{,}699 = 1{,}398$

c) $27 = 3^3$

$\log 27 = \log 3^3 = 3 \cdot \log 3 = 3 \cdot 0{,}477 = 1{,}431$

d) $32 = 2^5$

$\log 32 = \log 2^5 = 5 \cdot \log 2 = 5 \cdot 0{,}301 = 1{,}505$

e) $81 = 3^4$

$\log 81 = \log 3^4 = 4 \cdot \log 3 = 4 \cdot 0{,}477 = 1{,}908$

5 Decompondo os números em fatores primos, tem-se:

a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\log 30 = \log(2 \cdot 3 \cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5 = 0{,}301 + 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}477$

b) $1.001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

log 1.001 deve ser levemente maior que 3, pois $\log 1.000 = 3$.

$\log 1.001 = \log(7 \cdot 11 \cdot 13) = \log 7 + \log 11 + \log 13 = 0{,}845 + 1{,}041 + 1{,}114 = 3$

Obteve-se 3, porque os valores dos logaritmos de 7, 11 e 13 utilizados são aproximações arredondadas. Usando uma calculadora científica, obtém-se o seguinte valor: $\log 1.001 \cong 3{,}0004$.

6 Usando os valores dos logaritmos decimais e a regra de mudança de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \frac{0{,}477}{0{,}301} \cong 1{,}585$$

HORA DA CHECAGEM

7

a) $A = M \cdot N$

$\log A = \log M + \log N = x + y$

b) $B = M^2$

$\log B = 2 \cdot \log M = 2x$

c) $C = N \div P$

$\log C = \log N - \log P = y - z$

d) $D = \dfrac{M \cdot N}{P}$

$\log D = \log M + \log N - \log P = x + y - z$

e) $E = \sqrt{N}$

$\log E = \dfrac{1}{2} \log N = \dfrac{1}{2} y$

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

MATRIZES

TEMAS

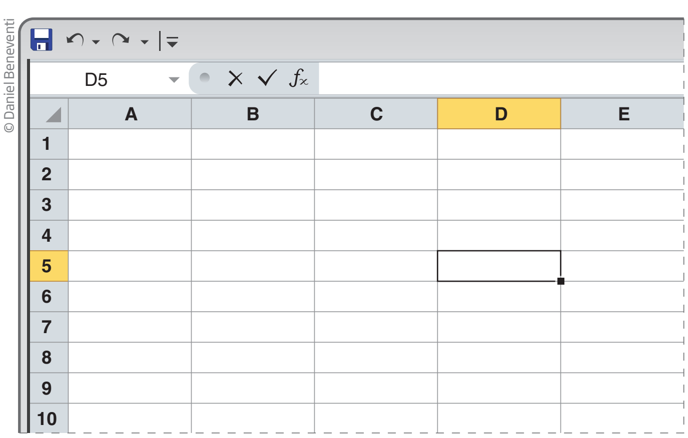
Introdução

Há diversas situações do dia a dia, principalmente em atividades profissionais, nas quais é preciso organizar dados por meio de tabelas ou quadros. As tabelas você já deve conhecer bem, pois apareceram desde quando estudou as tabuadas. Além disso, elas estão presentes diariamente em jornais e em vários outros lugares, como postos de pagamento de pedágio nas estradas.

A organização de dados em tabelas numéricas interessou aos matemáticos, que desenvolveram teorias para resolver problemas que envolvem muitas variáveis. Isso ocorre hoje em dia, por exemplo, nas empresas, que têm de controlar todos os itens que compõem o custo de determinada mercadoria, ou a folha de pagamento, que tem centenas de trabalhadores, entre outros.

Contadores, economistas, engenheiros e muitos outros profissionais utilizam planilhas eletrônicas de computadores, conhecidas como planilhas de cálculo, organizadas em linhas e colunas.

Nesta Unidade, você vai estudar a Matemática que está presente em tabelas e planilhas de cálculos formadas por números, chamadas matrizes.



Neste tema, você iniciará o estudo de matrizes, relacionando-as com várias tabelas numéricas.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Provavelmente você já viu algumas tabelas numéricas e sabe como interpretá--las e utilizá-las em situações do cotidiano. Pense em uma dessas tabelas. O que os números presentes nela queriam dizer?

Introdução às matrizes

Para compreender melhor a teoria matemática apresentada nesta Unidade, considere um gaveteiro com várias camadas organizadas em colunas:

5 linhas

6 colunas

Fotos: © Ismar Ingber/Pulsar Imagens

Observe que esse gaveteiro tem 5 camadas horizontais, as linhas, e 6 camadas verticais, as colunas. Diz-se que é um quadro do tipo 5 × 6 (lê-se: "5 por 6").

Na gaveta da 2ª linha de cima para baixo, que está na 5ª coluna da esquerda para a direita, há uma nota de R$ 100,00. Observe a estrutura desse gaveteiro para indicar o "endereço" da gaveta que contém a cédula de R$ 50,00.

Com base na descrição do endereço da cédula de R$ 100,00, pode-se dizer que a nota de R$ 50,00 está na 4ª linha de cima para baixo, e na 2ª coluna da esquerda para a direita.

Os matemáticos simplificaram a descrição de endereços como a desse gaveteiro criando um código que se baseia em duas informações: a linha e a coluna.

Para indicar a localização de uma gaveta, usa-se uma letra seguida de dois números, correspondentes à linha e à coluna:

- a nota de R$ 100,00 está no cruzamento da 2ª linha com a 5ª coluna; seu endereço pode ser representado pelo código a_{25};
- a nota de R$ 50,00 está na 4ª linha com a 2ª coluna; seu endereço pode ser representado pelo código a_{42}.

Observe que se estabeleceu uma ordem: o primeiro número do código (subscrito ao lado da letra minúscula) indica a linha, e o segundo número, a coluna.

Ao quadro retangular formado por linhas e colunas, como o gaveteiro do exemplo, os matemáticos chamaram **matriz**.

O conceito matemático de matriz é importante por suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, sobretudo como ferramenta para resolver problemas que recaem em um sistema de **equações lineares**, muito utilizadas em problemas na área de Engenharia ou de Economia.

A matriz a seguir tem 2 linhas e 3 colunas; diz-se que é uma matriz 2 × 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 2$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = -1$
$a_{21} = 7$	$a_{22} = 12$	$a_{23} = 5$

Confira que são os índices (os "numerozinhos" subscritos ao lado da letra) que indicam a posição (o endereço) de cada casa com seu respectivo valor numérico; por exemplo: $a_{23} = 5$ indica que o número que está na 2ª linha com a 3ª coluna é igual a 5.

Observe ainda que os elementos da matriz A (apresentada acima) são números inteiros, mas, dependendo da situação ou do uso, uma matriz também pode ser formada por números reais, como no exemplo da matriz B a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} & 3{,}14 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 100$	$b_{12} = 1$	$b_{13} = -1$
$b_{21} = \frac{1}{3}$	$b_{22} = \sqrt{2}$	$b_{23} = 3{,}14$

Uma matriz **A** pode ser entendida como um conjunto m × n de números reais, dispostos em **m** linhas e **n** colunas que formam o quadro a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mas não se assuste com essa quantidade de índices, linhas e colunas, pois, informalmente, pode-se dizer que "uma matriz é um quadro retangular, recheado de números ou expressões matemáticas".

ATIVIDADE 1 Leitura de matrizes

1 Na matriz A, indique os valores numéricos dos elementos:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 11 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

a) $a_{13} =$ ____________________

b) $a_{21} =$ ____________________

c) $a_{11} =$ ____________________

d) $a_{22} =$ ____________________

2 Determine os valores dos elementos da matriz B e escreva-a de modo simplificado:

$$B = \begin{bmatrix} 3^2 - 2^3 & 2 \cdot \sqrt{49} \\ \dfrac{\sqrt{36}}{3} & 2^3 - 2 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

a) $a_{11} =$ ____________________

b) $a_{12} =$ ____________________

c) $a_{21} =$ ____

d) $a_{22} =$ ____

PENSE SOBRE...

Você já viu ou explorou uma planilha de cálculo, dessas usadas para organizar as contas de uma empresa?

Algumas dessas planilhas têm quadros que apresentam centenas de colunas e linhas.

Imagine, por exemplo, uma matriz com 15 informações de cada um dos seus 120 funcionários. Essa matriz teria, no mínimo, 1.800 casas, também chamadas células ou celas.

Para trabalhar com essa quantidade de dados, os profissionais levariam muitas horas, talvez dias, dependendo da complexidade das informações, no caso de serem necessários cálculos de cada célula. Com a programação de computadores, hoje esses cálculos podem ser feitos em segundos.

A matemática das matrizes

Tal como se faz com números, é possível somar, subtrair e multiplicar matrizes, mas não é possível compará-las, como acontece com os números, ou seja, não é possível dizer que uma matriz é maior ou menor que outra, mas é possível dizer se duas matrizes são iguais.

Igualdade de matrizes

Para que duas matrizes sejam iguais, elas devem ter o mesmo número de linhas e de colunas e seus elementos de mesmo endereço também devem ser iguais.

Considere duas matrizes, A e B:

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & -7 & y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & w \\ 1 & z & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Se as matrizes A e B são iguais, os elementos que estão nas mesmas posições também são iguais:

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \sqrt{5} \qquad z = -7 \qquad w = 3$$

ATIVIDADE 2 Exercitando a leitura de matrizes

Determinada indústria tem quatro fábricas: F_1, F_2, F_3 e F_4. Em cada uma dessas fábricas são produzidos três produtos: P_1, P_2 e P_3.

A produção semanal dessa indústria pode ser representada por uma matriz B (do tipo 3 × 4), composta por números que indicam a quantidade de unidades de cada produto produzido em cada fábrica:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ B = & \begin{bmatrix} 56 & 36 & 38 & 10 \\ 34 & 45 & 42 & 8 \\ 28 & 27 & 21 & 38 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \\ \leftarrow P_3 \end{array} \end{array}$$

Pela disposição dos números na matriz, pode-se dizer quantos produtos do tipo P_2 são fabricados na fábrica F_3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ B = & \begin{bmatrix} 56 & 36 & 38 & 10 \\ 34 & 45 & 42 & 8 \\ 28 & 27 & 21 & 38 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \\ \leftarrow P_3 \end{array} \end{array}$$

1 Responda se as afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) ☐ Na fábrica F_2 são fabricados 36 produtos do tipo P_1.

b) ☐ Na fábrica F_4 são fabricados 10 produtos do tipo P_2.

c) ☐ Na fábrica F_3 são fabricados 38 produtos do tipo P_3.

d) ☐ Na fábrica F_1 são fabricados 34 produtos do tipo P_2.

e) ☐ Na fábrica F_2 são fabricados 27 produtos do tipo P_3.

f) ☐ Na fábrica F_3 são fabricados 45 produtos do tipo P_2.

2 Analise as seguintes afirmações:

I. O número de unidades do produto P_2 que as fábricas F_1 e F_4 produzem, juntas, é igual à quantidade produzida desses produtos pela fábrica F_3, sozinha.

II. Entre todas as fábricas, a que mais fabrica o produto P_3 é a fábrica F_1.

III. Na fábrica F_3, a quantidade de produtos P_2 produzida é o dobro do que é fabricado do produto P_3.

Assinale a alternativa que contém a análise CORRETA:

a) Apenas a afirmação III é verdadeira.

b) Todas as afirmações são verdadeiras.

c) Todas as afirmações são falsas.

d) Apenas a afirmação II é falsa.

DESAFIO

O *Aedes aegypti* é vetor transmissor da dengue. Uma pesquisa feita em São Luís – MA, de 2000 a 2002, mapeou os tipos de reservatórios onde esse mosquito era encontrado. A tabela abaixo mostra parte dos dados coletados nessa pesquisa.

Tipos de reservatórios	População de A. *aegypti*		
	2000	2001	2002
Pneu	895	1.658	974
Tambor/tanque/depósito de barro	6.855	46.444	32.787
Vaso de planta	456	3.191	1.399
Material de construção/peça de carro	271	436	276
Garrafa/lata/plástico	675	2.100	1.059
Poço/cisterna	44	428	275
Caixa-d'água	248	1.689	1.014
Recipiente natural, armadilha, piscina e outros	615	2.658	1.178
Total	10.059	58.604	38.962

Caderno de Saúde Pública, Rio de Janeiro, v. 20, n. 5, out. 2004. (Com adaptações.)

Se mantido o percentual de redução da população total de *A. aegypti* observada de 2001 para 2002, teria sido encontrado, em 2003, um número total de mosquitos

a) menor que 5.000.

b) maior que 5.000 e menor que 10.000.

c) maior que 10.000 e menor que 15.000.

d) maior que 15.000 e menor que 20.000.

e) maior que 20.000.

Enem 2007. Prova amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Leitura de matrizes

1 Esse é um exercício para identificar os elementos de uma matriz. Cada termo está no cruzamento de uma linha (indicada pelo primeiro número do endereço) com uma coluna (indicada pelo segundo número do endereço).

a) $a_{13} = 0$

b) $a_{21} = 11$

c) $a_{11} = -5$

d) $a_{22} = -3$

2 Para resolver esse exercício, basta calcular os valores numéricos de cada elemento, respeitando a ordem das operações: primeiro, potências e raízes; depois, multiplicações e divisões, na ordem em que aparecerem; e por fim adições e subtrações.

a) $a_{11} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

b) $a_{12} = 2 \cdot \sqrt{49} = 2 \cdot 7 = 14$

c) $a_{21} = \dfrac{\sqrt{36}}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

d) $a_{22} = 2^3 - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Atividade 2 - Exercitando a leitura de matrizes

1

a) V

b) F Pois, na fábrica F_4, são fabricados 8 produtos do tipo P_2.

c) F Pois, na fábrica F_3, são fabricados 21 produtos do tipo P_3.

HORA DA CHECAGEM

d) V

e) V

f) F Pois, na fábrica F_3, são fabricados 42 produtos do tipo P_2.

2 Alternativa correta: **d**. As afirmações I e III são verdadeiras e a afirmação II é falsa porque, entre todas as fábricas, a que mais fabrica o produto P_3 é a fábrica F_4.

Desafio

Alternativa correta: **e**. Se for mantido o percentual de redução da população de *Aedes aegypti* entre 2001 e 2002, então seja **x** o número de mosquitos de 2003. Logo:

$$\frac{38.962}{58.604} = \frac{x}{38.962} \Rightarrow x = \frac{38.962^2}{58.604} \cong 25.903 > 20.000$$

Registro de dúvidas e comentários

Uma vez que já sabe o que é uma matriz, neste tema você aprenderá a fazer operações explorando algumas situações práticas.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você sabe dizer qual é a posição do seu time de futebol em determinado campeonato? Quantos pontos ele tem? Quantos gols marcou? Quantos gols sofreu?

É provável que, para verificar todos esses dados, seja necessário recorrer à tabela do campeonato. Você já notou que ela é uma tabela numérica e que, a cada rodada, seus valores mudam, de acordo com o desempenho de seu time e o dos outros também?

ASSISTA!

Matemática – Volume 2

Matrizes no cotidiano

Esse vídeo apresenta as matrizes e as relaciona a tabelas utilizadas no cotidiano e a exemplos concretos. Além disso, mostra os tipos de matrizes, suas propriedades e como são interpretadas e resolvidas.

Cálculos com matrizes

Em tabelas de campeonato de futebol, para registrar as rodadas, são feitas várias operações, como somar ou subtrair os gols feitos e sofridos, além de multiplicar e somar os pontos, de acordo com vitória, empate ou derrota.

Além disso, há diversas outras situações práticas cujas atividades podem ser realizadas com o auxílio das matrizes: as atividades financeiras de um banco, por exemplo, ou o fluxo de caixa de um supermercado.

Agora que você percebeu a importância do cálculo com matrizes, verá como isto é feito!

Adição e subtração de matrizes

Para melhor compreender como somar e subtrair matrizes, analise a situação de uma oficina de veículos.

Essa oficina trabalha com automóveis e caminhões, e realiza serviços de funilaria, pintura e mecânica. O quadro a seguir indica quantos veículos de cada tipo estão em cada seção da oficina:

	Pintura	Funilaria	Mecânica
Automóveis	3	2	5
Caminhões	2	3	6

© Dmitry Kalinovsky/123RF

Se o gerente da oficina usar sempre a mesma disposição de quadro, não há a necessidade de escrever "automóveis", "caminhões", "pintura", "funilaria" e "mecânica"; basta dispor os números de veículos de cada seção em uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Suponha que a oficina desse exemplo tenha duas lojas: a *sede*, que fica em Avaré, e a *filial*, que fica em Bertioga.

A matriz A fornece o número de veículos que estão em Avaré, e a matriz B, o número de veículos que estão em Bertioga:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

VOCÊ SABIA?

Ao pesquisar a palavra **matriz** em um dicionário, você encontrará mais de 30 significados diferentes para ela.

Matriz como molde, utilizada em tipografias; matriz significando a sede de uma empresa ou de uma igreja; matriz como conceito matemático são alguns deles.

Em dicionários de Matemática, são definidos mais de 20 tipos de matrizes.

Para saber quantos veículos de cada tipo estão nas seções das duas oficinas, o gerente usa um programa de computador que soma as duas matrizes por meio de uma regra bem simples: a matriz C é o resultado da soma das matrizes A e B.

Os elementos da matriz C indicam a quantidade de automóveis ou de caminhões que estão nas seções de funilaria, pintura e mecânica das duas oficinas somadas.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3+5 & \boxed{2+2} & 5+0 \\ 2+2 & 3+1 & \boxed{6+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \boxed{4} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \boxed{8} \end{bmatrix}$$

Pela análise da matriz soma, pode-se saber que há 4 automóveis nas seções de funilaria e 8 caminhões nas seções de mecânica das duas oficinas.

Observe que a adição de matrizes foi possível porque as duas matrizes eram do mesmo tipo, ou seja, tinham o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

IMPORTANTE!

O número de linhas e colunas de uma matriz determina sua ordem. Matriz de mesma ordem ($m \times m$) possui o mesmo número de linha e de coluna. Assim, só se somam ou subtraem duas ou mais matrizes quando essas forem de mesma ordem, ou seja, mesmo número de linhas e de colunas.

ATIVIDADE 1 Somando e subtraindo matrizes

1 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, e a matriz $C = A + B$, responda V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações:

a) ☐ Todos os elementos da matriz C são positivos.

b) ☐ $a_{32} + b_{32} = 0$

c) ☐ $a_{22} + b_{22} > 0$

d) ☐ $a_{31} + b_{31} = 0$

e) ☐ $a_{21} + b_{21} < 0$

2 Considere as matrizes A, B, C, D, E, F e G:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}$$

Calcule e atribua V (verdadeiro) ou F (falso):

a) ☐ 2A + C = F

b) ☐ A + B = E

c) ☐ D – A = A

d) ☐ 2A = D

e) ☐ 2C + A = B

f) ☐ 2A + F = G

DICA!

Considere que o dobro da matriz A equivale à soma de duas matrizes iguais, ou seja, que 2A = A + A, e que 3A = A + A + A, e assim por diante.

3 É possível somar a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ com a matriz $N = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$? Explique.

Voltando às matrizes

Em linguagem matemática, diz-se que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo, tal que cada elemento de C é dado por:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Se **i** e **j** são as coordenadas de localização do elemento na linha e na coluna, respectivamente, ou seja, o elemento que está na primeira linha ($i = 1$) e na terceira coluna ($j = 3$) de uma matriz é o elemento $a_{ij} = a_{13}$.

No caso particular de duas matrizes A e B (ambas 2×3), a matriz C resultante da **soma** é:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Veja um exemplo numérico:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + (-7) & 12 + 1 & -5 + 3 \\ -3 + 4 & 0 + 9 & 2 + (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

A **subtração** de matrizes é feita do mesmo modo.

Sejam as matrizes A e B; então a matriz diferença $D = A - B$ é uma matriz $m \times n$, tal que cada elemento de D é dado por: $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Veja os exemplos com os valores numéricos de cada célula da matriz:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- A matriz **soma**:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 + 5 & 0 + 2 & 5 + 0 \\ 2 + 2 & 3 + 1 & 6 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- A matriz **diferença**:

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 3 - 5 & 0 - 2 & 5 - 0 \\ 2 - 2 & 3 - 1 & 6 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Em resumo:

Somam-se ou subtraem-se duas matrizes de **mesma ordem** (mesmo tipo) pela soma ou subtração de seus elementos correspondentes.

Formação de uma matriz de ordem $(m \times n)$

Os elementos de uma matriz podem ser definidos por meio de uma função, chamada lei de formação da matriz, que pode ser definida por meio de fórmulas determinadas pelo endereço, ou seja, pela posição da linha e da coluna.

Considere a matriz M, de ordem 2×3, isto é, que possui 2 linhas e 3 colunas. Seus elementos são determinados pela fórmula $m_{ij} = 2i^2 - 3j$.

Para calcular os elementos dessa matriz, é interessante visualizá-la na forma geral:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

Agora, observe o cálculo do valor numérico de seus elementos com base na sua fórmula:

$m_{11} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$

$m_{12} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$

$m_{13} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$

$m_{21} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$

$m_{22} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

$m_{23} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$

E, a seguir, veja como escrever os valores numéricos na matriz:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Então, considere a matriz N, de ordem 2×3, cujos elementos são determinados pela fórmula $n_{ij} = 3i - 2j$:

$n_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

$n_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$

$n_{13} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3$

$n_{21} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$

$n_{22} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$

$n_{23} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$

Dessa forma, tem-se a matriz N numérica seguinte:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADE 2 Operações com matrizes

1 Considere as matrizes M e N dadas anteriormente, e determine as matrizes pedidas:

a) A = M + N

b) B = N + M

c) C = M − N

d) D = N − M

2 Uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada matriz quadrada. Determine os elementos de cada matriz de acordo com as fórmulas.

a) A é do tipo 2×2, determinada pela fórmula $a_{ij} = i \cdot j$.

$$A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) B é do tipo 3×3, determinada pela fórmula $b_{ij} = i + j$.

$$B = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um número

Sejam uma matriz A e **k** um número real. A matriz E obtida pela multiplicação $E = k \cdot A$ é uma matriz do mesmo tipo, de tal modo que cada elemento de E é dado pela multiplicação de cada um dos elementos da matriz A pelo número **k**. Ou seja, o mesmo que somar a matriz A, **k** vezes.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $k = 4$.

A matriz $E = 4 \cdot A$ é:

$$E = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot \sqrt{5} \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 4 & 4\sqrt{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, para efetuar a multiplicação de uma matriz por um número, basta multiplicar cada um dos elementos da tabela por esse número.

ATIVIDADE 3 Multiplicação de uma matriz por um número

1 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) 2A

b) 3B

c) 2A + 3B

d) 3A – 2B

2 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule 3A + 2B.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é tão simples como no caso da adição e da subtração, por isso será explorada por meio de situações-problema.

Uma empresa possui duas confeitarias, D e E (Diamante e Esmeralda), que fabricam três tipos de bolo (1, 2 e 3). Na produção dos bolos são utilizados os seguintes ingredientes: farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. As vendas semanais médias de cada tipo de bolo estão indicadas nas células da tabela que cruza tipos de bolo × padarias, a matriz A, apresentada a seguir.

Matriz A

Confeitaria \ Bolo	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Diamante	50	30	25
Esmeralda	20	20	40

Para a fabricação desses bolos, os ingredientes usados são dados de acordo com a matriz B a seguir.

Matriz B

Bolo \ Ingredientes	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Tipo 1	500 g	200 g	500 mL	150 g	4
Tipo 2	400 g	100 g	300 mL	250 g	5
Tipo 3	450 g	150 g	600 mL	0	6

Para atender à demanda, é preciso saber a quantidade de cada uma das cinco matérias-primas (os ingredientes) para fornecer a cada uma das confeitarias. O número de ingredientes pode ser organizado e representado por meio de uma matriz C, 2 × 5, em que as linhas representam as duas confeitarias e as colunas correspondem aos cinco ingredientes usados na fabricação dos bolos.

Matriz C

Confeitaria \ Ingredientes	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
D	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
E	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Matematicamente, pode-se dizer que c_{ij} indica quanto a **i**-ésima confeitaria deve estocar do **j**-ésimo ingrediente a fim de executar as vendas previstas.

Sejam as matrizes **A** e **B**:

$\mathbf{A} = [a_{ij}] \qquad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3$

$\mathbf{B} = [b_{ij}] \qquad 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 5$

Pode-se ver que: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j}$

Assim, por exemplo, o número de ovos que a confeitaria D usará para produzir os três tipos de bolo está indicado na célula c_{15}.

Para obter esse valor, multiplicam-se os números da linha 1 da matriz A pelos números da coluna 5 da matriz B e somam-se esses produtos:

$c_{15} = a_{11} \cdot b_{15} + a_{12} \cdot b_{25} + a_{13} \cdot b_{35} = 50 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 25 \cdot 6 = 500$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \end{bmatrix}} \times \overset{B}{\begin{bmatrix} 500 & 200 & 500 & 150 & 4 \\ 400 & 100 & 300 & 250 & 5 \\ 450 & 150 & 600 & 0 & 6 \end{bmatrix}} = \overset{C}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 500 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}$$

Número de ovos usados pela confeitaria Diamante.

Acompanhe o cálculo dos demais elementos da matriz C.

Consumo de ingredientes na padaria Diamante

- Para obter o valor de c_{11}, multiplicam-se os números da primeira linha da matriz A pelos números da primeira coluna da matriz B e somam-se os produtos:

$c_{11} = 50 \cdot 500 + 30 \cdot 400 + 25 \cdot 450 = 25.000 + 12.000 + 11.250 = 48.250 = 48{,}25$ kg de farinha.

- Cálculo de c_{12}: multiplicam-se os números da primeira linha de A pelos números da segunda coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{12} = 50 \cdot 200 + 30 \cdot 100 + 25 \cdot 150 = 10.000 + 3.000 + 3.750 = 16.750$ g $= 16{,}75$ kg de açúcar.

- Cálculo de c_{13}: multiplica-se a primeira linha de A pela terceira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{13} = 50 \cdot 500 + 30 \cdot 300 + 25 \cdot 600 = 25.000 + 9.000 + 15.000 = 49.000$ mL $= 49$ L de leite.

- Cálculo de c_{14}: multiplica-se a primeira linha de A pela quarta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{14} = 50 \cdot 150 + 30 \cdot 250 + 25 \cdot 0 = 7.500 + 7.500 + 0 = 15.000$ g $= 15$ kg de manteiga.

Consumo de ingredientes na padaria Esmeralda

• Cálculo de c_{21}: multiplica-se a segunda linha de A pela primeira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{21} = 20 \cdot 500 + 20 \cdot 400 + 40 \cdot 450 = 10.000 + 8.000 + 18.000 = 36.000$ g = 36 kg de farinha.

• Cálculo de c_{22}: multiplica-se a segunda linha de A pela segunda coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{22} = 20 \cdot 200 + 20 \cdot 100 + 40 \cdot 150 = 4.000 + 2.000 + 6.000 = 12.000$ g = 12 kg de açúcar.

• Cálculo de c_{23}: multiplica-se a segunda linha de A pela terceira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{23} = 20 \cdot 500 + 20 \cdot 300 + 40 \cdot 600 = 10.000 + 6.000 + 24.000 = 40.000$ mL = 40 L de leite.

• Cálculo de c_{24}: multiplica-se a segunda linha de A pela quarta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{24} = 20 \cdot 150 + 20 \cdot 250 + 40 \cdot 0 = 3.000 + 5.000 + 0 = 8.000$ g = 8 kg de manteiga.

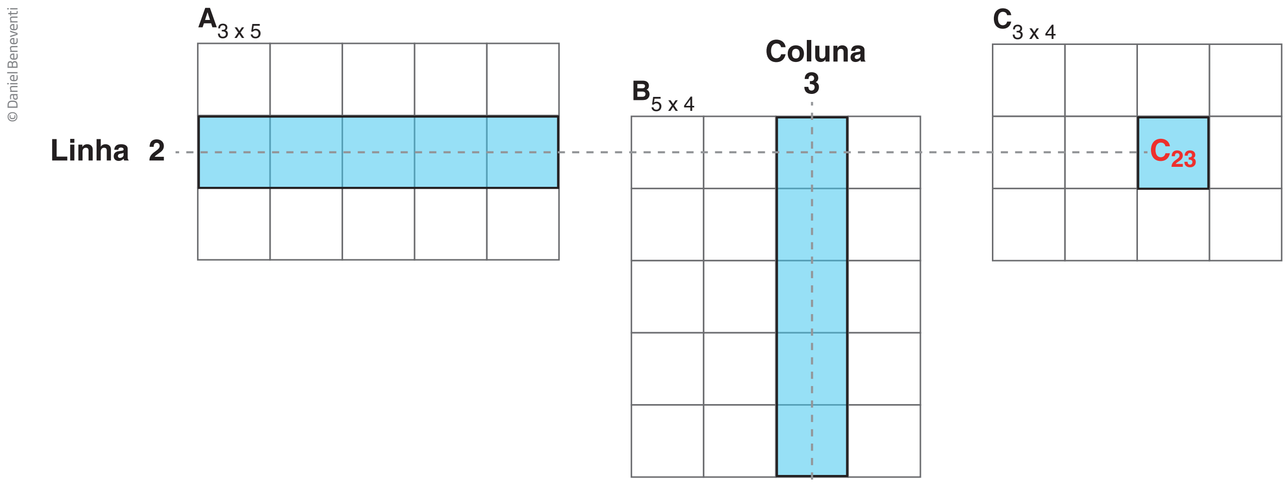
• Cálculo de c_{25}: multiplica-se a segunda linha de A pela quinta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{25} = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 40 \cdot 6 = 80 + 100 + 240 = 420$ ovos.

A matriz C completa fica assim:

$$C = \begin{bmatrix} 48.250 & 16.750 & 49.000 & 15.000 & 500 \\ 36.000 & 12.000 & 40.000 & 8.000 & 420 \end{bmatrix}$$

O esquema a seguir mostra como se obtém o valor da célula c_{23}, resultante da multiplicação das matrizes A · B.



Em resumo:

Para fazer o produto das matrizes A · B, o número de **colunas** da matriz A (que é a primeira) deve ser igual ao número de **linhas** da matriz B (que é a segunda). Assim, cada elemento c_{ij} do produto A · B é obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha **i** de A pelo correspondente elemento de uma coluna **j** de B.

Importante: muitas propriedades existentes nos estudos dos conjuntos dos números reais valem para as operações com as matrizes, por exemplo, a associativa na adição (A + B) + C = A + (B + C), e a comutativa na adição A + B = B + A, se A, B e C forem do mesmo tipo. Já a comutativa da multiplicação A · B = B · A não vale para a operação de multiplicação entre matrizes.

PENSE SOBRE...

Esses cálculos parecem muito trabalhosos e, de certo modo, são, mas hoje há programas de computadores que os fazem com rapidez. Basta inserir os valores nas matrizes A e B e o programa fornece a matriz C automaticamente.

ATIVIDADE 4 Multiplicação de matrizes

1 Imagine que o gerente da Oficina do Ferreira estabeleça uma tabela de preços (R$) pelos serviços realizados em cada setor, em função do tipo de veículo.

Valores (R$)

	Pintura (P)	Funilaria (F)	Mecânica (M)
Automóveis	120	80	150
Caminhões	200	300	250

Seja **M** a matriz correspondente:

$$M = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix}$$

Suponha que, em certo dia da semana, a oficina tenha 3 automóveis e 5 caminhões para fazer os três tipos de serviço: P, F e M. Pode-se então associar a matriz N:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes N · M = P dá os preços finais que cada seção deve arrecadar. Calcule-os.

$$P = N \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix} =$$

2 Suponha que um fabricante de bicicletas tenha uma encomenda de 3 bicicletas para adultos e 4 velocípedes. Para fabricá-los, necessita de material (peças) e serviços (mão de obra). Veja na tabela:

 © Radu Trifan/123RF	Armação	Rodas	Corrente	Tempo de montagem (h)	Tempo de embalagem (h)
Bicicleta	1	2	1	5	1
Velocípede	1	3	0	3	1

A matriz material/mão de obra é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

O fabricante tem de atender à encomenda das 3 bicicletas e dos 4 velocípedes. De quanto material vai precisar?

Matriz encomenda: $E = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

O total de material e mão de obra é dado pela matriz produto P = E · M:

E = matriz encomenda

M = matriz material/mão de obra

P = matriz produto

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

a) Calcule o valor dos elementos da matriz produto e responda: Quantas são as armações? E as correntes? E as rodas?

b) Para cada material/mão de obra, o fabricante tem um custo (R$), indicado na tabela:

Material/mão de obra	Custo
Armação	8
Rodas	5
Corrente	5
Montagem	10
Embalagem	3

Esta tabela pode ser representada por uma matriz custo: $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$

O produto da matriz P pela matriz C é a matriz T, de custo total.

Calcule o custo total.

$$T_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}$$

3 O sistema de avaliação da Escola do Bairro dá pesos diferentes para as provas, dependendo do bimestre. A matriz A fornece as notas tiradas pelo Juca, e a matriz B indica os pesos das provas em cada bimestre.

a) Complete a matriz K, que fornece o total de pontos acumulados durante o ano letivo.

matriz das notas × matriz dos pesos = matriz total de pontos

$A \cdot B = K$

$$\begin{array}{c} \\ M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1b & 2b & 3b & 4b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 10 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

b) A matriz D calcula a média final, que leva em conta os pesos de cada nota: Matemática (M), Língua Portuguesa (LP), Ciências (C), História (H) e Geografia (G). Determine as médias ponderadas de cada disciplina.

Matriz média ponderada das notas: $D = \frac{1}{10} \cdot K$

$$D = \frac{1}{10} \cdot K = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} \begin{array}{c} M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{array}$$

4 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Agora, calcule as matrizes:

a) $A + B$

b) $A + O$

c) $O + B$

d) $A - B$

e) $B - A$

f) $A \cdot B$

g) $A \cdot I$

h) $I \cdot B$

PARA SABER MAIS

Matrizes nos meios de comunicação

As matrizes estão presentes nos jornais diários, seja nos cadernos de economia, com suas dezenas de tabelas, seja nos cadernos de esportes.

Veja a relação entre multiplicação de matrizes e a classificação no Campeonato Brasileiro de Futebol.

Observe como se determina o total de pontos de um time em um campeonato que atribui os seguintes pesos para as partidas:

- **3** para **vitórias**;
- **1** para **empates**;
- **0** para **derrotas**.

A matriz C = A · B mostra o total de pontos ganhos.

$A_{8 \times 3}$ = matriz dos 8 primeiros colocados no Campeonato Brasileiro (série A).

$B_{3 \times 1}$ = matriz dos pontos por vitória, empate e derrota.

$C_{8 \times 1}$ = matriz do total de pontos ganhos.

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Corinthians}\\
\text{Grêmio}\\
\text{Santos}\\
\text{Internacional}\\
\text{Flamengo}\\
\text{Vasco}\\
\text{Cruzeiro}\\
\text{Bahia}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{V} & \text{E} & \text{D} \end{array}\\
\begin{bmatrix}
14 & 7 & 4\\
13 & 6 & 7\\
12 & 7 & 7\\
11 & 8 & 6\\
12 & 4 & 6\\
9 & 11 & 9\\
10 & 7 & 6\\
9 & 9 & 8
\end{bmatrix}
\end{array}
\times
\begin{bmatrix} 3\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
12 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\ldots\\ \ldots\\ 43\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots
\end{bmatrix}
$$

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Somando e subtraindo matrizes

1

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 5\\ 0 & 4\\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7\\ -1 & -4\\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 5-7\\ 0-1 & 4-4\\ -3+3 & 9-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\\ -1 & 0\\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) **F** Pois, na matriz soma, há zeros e números negativos.

b) **F** Pois $a_{32} + b_{32} = 9 + (-5) = 4 \neq 0$.

c) F Pois $a_{22} + b_{22} = 4 + (-4) = 0$.

d) V Pois $a_{31} + b_{31} = -3 + 3 = 0$.

e) V Pois $a_{21} + b_{21} = 0 + (-1) < 0$.

2

a) F

$$2A + C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 & 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 3 + 2 & 2 \cdot 4 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

b) V $A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-2) \\ 3 + (-3) & 4 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E$. Diz-se que as matrizes A e B são opostas.

c) V $D - A = \begin{bmatrix} 2 - 1 & 4 - 2 \\ 6 - 3 & 8 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

d) V $2A = D$

e) F $2C + A = B$

f) V $2A + F = G$

3 Não, porque a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, ou seja, as duas matrizes não são do mesmo tipo. Só é possível somar ou subtrair matrizes que tenham, respectivamente, o mesmo número de linhas e de colunas.

Atividade 2 - Operações com matrizes

1

a) $A = M + N$

$$A = \begin{bmatrix} -1 + 1 & -4 + (-1) & -7 + (-3) \\ 5 + 4 & 2 + 2 & -1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $B = N + M$

$$B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & -1 + (-4) & -3 + (-7) \\ 4 + 5 & 2 + 2 & 0 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $C = M - N$

$$C = \begin{bmatrix} -1 - 1 & -4 - (-1) & -7 - (-3) \\ 5 - 4 & 2 - 2 & -1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

HORA DA CHECAGEM

d) D = N – M

$$D = \begin{bmatrix} 1-(-1) & -1-(-4) & -3-(-7) \\ 4-5 & 2-2 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Atividade 3 - Multiplicação de uma matriz por um número

1 Calculando as somas e subtrações de matrizes, tem-se:

a) $2A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 4 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

b) $3B = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 21 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

d) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 15 \\ 6 & 9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 15 \\ 2 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

2 A matriz resultante é $3A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

HORA DA CHECAGEM

Atividade 4 – Multiplicação de matrizes

1

$$P = N \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 120 + 5 \cdot 200 & 3 \cdot 80 + 5 \cdot 300 & 3 \cdot 150 + 5 \cdot 250 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 360 + 1.000 & 240 + 1.500 & 450 + 1.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.360 & 1.740 & 1.700 \end{bmatrix}$$

A Oficina do Ferreira vai arrecadar R$ 1.360,00 no setor de pintura, R$ 1.740 no setor de funilaria, e R$ 1.700,00 no setor de mecânica de sua oficina.

2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 4 & 6 + 12 & 3 + 0 & 15 + 12 & 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 & 3 & 27 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Interpretação da matriz produto: pela leitura da tabela, pode-se dizer que a oficina vai precisar de 7 armações, 18 rodas e 3 correntes.

b) $$T = \begin{bmatrix} 7 & 18 & 3 & 27 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 8 + 18 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 27 \cdot 10 + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 56 + 90 + 15 + 270 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 452 \end{bmatrix}$$

O custo total é R$ 452,00.

3

a) Matriz das notas multiplicada pela matriz dos pesos resulta na matriz total de pontos em cada disciplina.

$A \cdot B = K$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1b & 2b & 3b & 4b \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 10 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 14 + 18 + 16 \\ 7 + 20 + 30 + 32 \\ 8 + 8 + 15 + 24 \\ 4 + 12 + 21 + 40 \\ 8 + 16 + 24 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 89 \\ 55 \\ 77 \\ 80 \end{bmatrix}$$

b)

$$D = \frac{1}{10} K = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 58 \\ 89 \\ 55 \\ 77 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 5{,}8 \\ 8{,}9 \\ 5{,}5 \\ 7{,}7 \\ 8{,}0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{matrix} \end{array}$$

O Juca teve média 5,8 em Matemática; 8,9 em Língua Portuguesa; 5,5 em Ciências; 7,7 em História; e 8,0 em Geografia.

4

a) A + B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 1+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) A + O

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) O + B

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+2 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) A – B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 1-2 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) B – A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 2-1 \\ 1-1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

f) A · B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

g) A · I

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

h) I · B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Registro de dúvidas e comentários

GEOMETRIA TRIDIMENSIONAL: ESTUDO DOS SÓLIDOS

TEMAS

1. Formas tridimensionais: prismas e pirâmides
2. Poliedros
3. Poliedros de Platão
4. Uma fórmula para todos os poliedros

Introdução

Desde os primeiros anos escolares, você tem estudado as formas geométricas, seus elementos, suas propriedades e suas relações, e percebeu que elas estão por toda parte: na natureza, na arquitetura e nos objetos ao redor. No espaço em que vivemos, a maior parte do que é considerado material é tridimensional, começando pelo próprio corpo.

Nesta Unidade, você estudará algumas formas geométricas tridimensionais.

TEMA 1 Formas tridimensionais: prismas e pirâmides

Neste tema, você estudará as formas no espaço tridimensional, e aprenderá a reconhecer as diferentes figuras, suas formas, dimensões e representações.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você sabe o que quer dizer a palavra **tridimensional**? A princípio, pode dizer: três dimensões. Mas o que são dimensões em Matemática? Dimensão significa uma grandeza a ser utilizada, representada pelas medidas de comprimento, largura e altura. Essas medidas você já estudou. Um objeto tridimensional apresenta comprimento, largura e altura. Agora interrompa o que está fazendo, olhe para seu lápis e reflita: Ele é um objeto tridimensional?

ASSISTA!

Matemática – Volume 2

O mundo em três dimensões

Num passeio pela cidade, o vídeo apresenta algumas figuras geométricas e objetos tridimensionais encontrados na natureza. Aproveita vários momentos para discutir as diferenças e as semelhanças entre figura plana e objeto tridimensional, detendo-se nas características e propriedades de várias delas.

Formas tridimensionais

As formas tridimensionais também são chamadas de sólidos e podem ser apreciadas na natureza, na arquitetura e nas artes plásticas.

Na natureza

Nos cristais e em algumas formações rochosas há formas geométricas curiosas, limitadas por faces planas retangulares ou triangulares, como os prismas, que serão estudados neste tema. Observe um exemplo na imagem a seguir.

© Martin Novak/123RF

Cristal em estado puro.

Também os favos de mel, das colmeias de abelhas, apresentam estruturas geométricas tridimensionais relacionadas com formas hexagonais que, quando justapostas, preenchem um espaço sem deixar vãos. Observe.

© lilkar/123RF

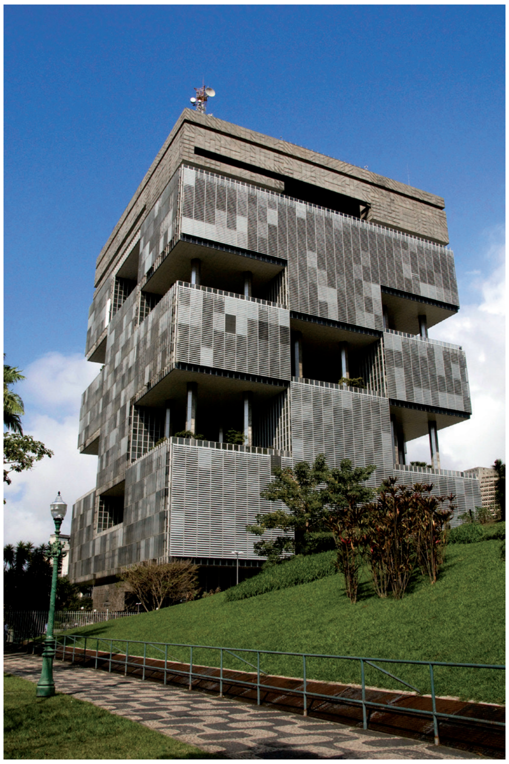
© Daniel Beneventi

Na arquitetura

As formas tridimensionais são a base de praticamente todas as construções arquitetônicas. Nas construções modernas, os arquitetos recorrem bastante à Geometria. Veja alguns exemplos de construção arquitetônica nas imagens a seguir.


© Ed Viggiani/Pulsar Imagens

Edifício do Museu de Arte de São Paulo (Masp), na cidade de São Paulo (SP).


© Paulo Fridman/Pulsar Imagens

Edifício da sede da Petrobras, na cidade do Rio de Janeiro (RJ).

Nas artes plásticas

Muitas são as obras de arte que têm representações de sólidos geométricos. Veja a gravura *Melancolia* (1514), do artista alemão Albrecht Dürer (1471-1528).

Observe na gravura de Dürer a representação de um cubo que foi truncado, ou seja, foi cortado na parte superior e na parte inferior do desenho.


© Universal History Archive/UIG/Getty images

Esculturas e instalações artísticas são objetos tridimensionais. Observe um exemplo na imagem a seguir.


© Douglas Cometti/Folhapress

Grande flor tropical, escultura em metal do austríaco Franz Weissmann, localizada na Praça Cívica do Memorial da América Latina, no bairro da Barra Funda, zona oeste de São Paulo (SP).

Prismas

Muitos dos objetos que são utilizados no dia a dia e a maioria das embalagens e caixas utilizadas no comércio e na indústria têm um formato especial chamado **prisma**. Uma simples caixa de cereais tem a forma de prisma. Veja os exemplos a seguir.

© lucadp /123RF


© design56/123RF

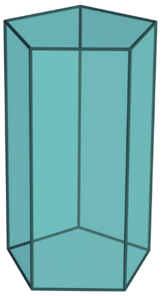
© Bogdan Ionescu/123RF

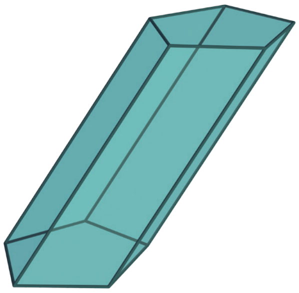
© My Vector Graphics Library/123RF

A maior parte dos prismas são **prismas retos**.

Mas há também prismas inclinados, chamados prismas oblíquos. Nesses casos, as faces laterais não são perpendiculares ao plano da base. Nos prismas retos, as faces laterais são perpendiculares à base.

Observe as imagens ao lado: no prisma reto, as faces laterais são retângulos; no prisma oblíquo, são paralelogramos.


Prisma reto.


Prisma oblíquo.

© Daniel Beneventi

Edifícios na cidade de Madrid, Espanha.

Veja algumas das principais características de um prisma:

- as bases de um prisma são polígonos;
- a base superior e a base inferior de um prisma qualquer são iguais;
- se a base é um polígono regular (aquele que tem todos os lados e todos os ângulos congruentes), diz-se que o prisma é regular;
- as faces laterais de um prisma reto são retangulares.

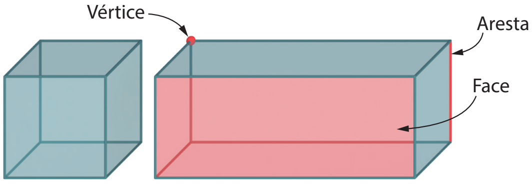
Um prisma qualquer, seja reto, seja oblíquo, tem sempre duas bases (inferior e superior) que são polígonos, e tem faces, vértices e arestas.

Paralelepípedo

Entre os prismas, o mais comum e utilizado na indústria de embalagens ou na construção de contêineres é o **paralelepípedo**, também conhecido como **bloco retangular**.

Um paralelepípedo, como uma caixa de creme dental, tem faces, vértices e arestas. Relembre cada um desses elementos.

• **Faces:** você pode pensar em um paralelepípedo como um cubo que foi esticado. Na verdade, o próprio cubo é um tipo particular de paralelepípedo em que todas as faces são quadrados.



© Daniel Beneventi

Como o cubo tem 6 faces, o paralelepípedo também tem 6 faces.

• **Vértices:** são as "pontas" do paralelepípedo. Com base na mesma ideia de compará-lo com o cubo, pode-se dizer que qualquer paralelepípedo tem 8 vértices, assim como o cubo: 4 na base inferior, e 4 na base superior.

• **Arestas:** são as quinas do paralelepípedo. São 4 na base inferior, 4 na base superior e 4 na vertical, em um total de 12 arestas.

Pirâmides

Pirâmides são formas tridimensionais muito conhecidas pelos arquitetos. Elas podem ser encontradas em construções antigas no Egito e na América Central (México e Guatemala). Essa forma continua atraindo o gosto de arquitetos e engenheiros no mundo contemporâneo.

© Carolyn Brown/Photo Researchers/Latinstock

Miquerinos, Quéfren e Quéops (a Grande Pirâmide) formam as Pirâmides de Gizé, no Cairo, Egito.

© ferwulf/123RF

Pirâmide de vidro no Museu do Louvre, Paris, França.

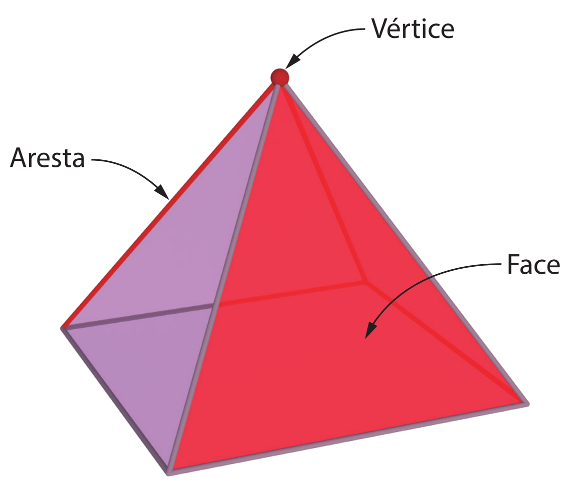
As características geométricas de uma pirâmide são:

- a base é um polígono;
- as faces laterais são triangulares.

É fácil determinar o número de faces, vértices e arestas de uma pirâmide. Veja um exemplo em que a base da pirâmide é um quadrado:

- **faces**: a base e as 4 faces laterais triangulares, em um total de 5 faces;
- **vértices**: os 4 do quadrado da base mais o vértice do topo, em um total de 5 vértices;
- **arestas**: 4 da base quadrada mais 4 que saem de cada vértice da base, ligando-se ao vértice superior, em um total de 8 arestas.

© Daniel Beneventi



ATIVIDADE 1 Prismas e pirâmides

1 Um prisma cuja base é um hexágono tem:

a) Quantas faces? ______

b) Quantos vértices? ______

c) Quantas arestas? ______

2 Uma pirâmide cuja base é um polígono de 6 lados tem:

a) Quantas faces? ______

b) Quantos vértices? ______

c) Quantas arestas? ______

3 Imagine uma pirâmide cuja base é um polígono de 12 lados, também conhecido por dodecágono. Quantos vértices tem essa pirâmide?

---

4 Se uma pirâmide tem 9 vértices, quantos lados tem a base dessa pirâmide?

---

5 Joana trabalha como decoradora de lojas. Ela vai construir uma pirâmide de base quadrada usando palitos de 8 cm e bolinhas de isopor para fazer as junções das arestas.

a) Quantos palitos ela vai usar?

---

b) E de quantas bolinhas de isopor ela precisará?

---

6 Pedro trabalha como montador de estandes. Ele precisa construir um espaço na forma de prisma de base hexagonal com 3 m de altura. Para isso, ele vai cortar placas de compensado na forma de hexágonos regulares e retângulos, e usar fitas adesivas grossas para produzir o estande na forma de prisma.

a) Que tipo de prisma ele vai construir: reto ou oblíquo?

---

b) Quantos hexágonos ele terá que construir?

---

c) Quantos retângulos são necessários para construir as faces laterais?

---

d) Se o lado do hexágono tiver 80 cm, quais são as medidas dos retângulos das faces laterais?

---

e) Quantas faces no total tem esse prisma?

---

f) Quantos vértices?

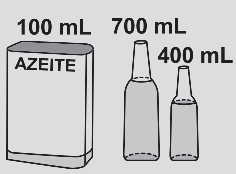
---

g) Quantas arestas?

DESAFIO

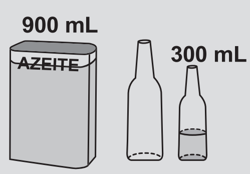
A diversidade de formas geométricas espaciais criadas pelo homem, ao mesmo tempo em que traz benefícios, causa dificuldades em algumas situações. Suponha, por exemplo, que um cozinheiro precise utilizar exatamente 100 mL de azeite de uma lata que contenha 1.200 mL e queira guardar o restante do azeite em duas garrafas, com capacidade para 500 mL e 800 mL cada, deixando cheia a garrafa maior. Considere que ele não disponha de instrumento de medida e decida resolver o problema utilizando apenas a lata e as duas garrafas. As etapas do procedimento utilizado por ele estão ilustradas nas figuras a seguir, tendo sido omitida a 5ª etapa.

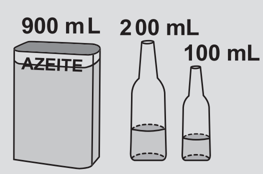
Qual das situações ilustradas a seguir corresponde à 5ª etapa do procedimento?

a)


b)


c)


d)


e)


Enem 2007. Prova Amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 – Prismas e pirâmides

1

a) Para determinar o número de faces de um prisma, basta somar 2 ao número de lados do polígono da base, uma vez que cada um desses lados é parte de uma face lateral. (O 2 que é somado corresponde às duas bases). Como nesse caso a base é um hexágono, então F = 6 + 2 = 8 faces

b) O número de vértices de um prisma é a soma dos vértices do polígono da base inferior com os vértices do polígono da base superior. Se o prisma é um hexágono, então V = 6 + 6 = 12 vértices

c) As arestas são os lados das bases, somados com as arestas laterais. Portanto, tem-se:
A = 6 + 6 + 6 = 18 arestas

2

a) O número de faces da pirâmide é igual à soma das faces laterais, que é igual ao número de lados da base mais 1 (a base é uma face da pirâmide), ou seja: nesse caso, F = 6 + 1 = 7 faces

b) O polígono da base é um hexágono. O número de vértices de uma pirâmide é o número de vértices do polígono (que é o mesmo que o número de lados) da base somado ao vértice da pirâmide (a ponta superior). Nesse caso, tem-se: V = 6 + 1 = 7 vértices

c) O número de arestas de uma pirâmide é a soma das arestas da base (que coincidem com os lados do polígono da base) com as arestas laterais. Lembre que de cada vértice do polígono da base sai uma aresta lateral; logo, A = 6 + 6 = 12 arestas

3 Um polígono de 12 lados tem 12 vértices. Como a base possui 12 vértices, a pirâmide tem 12 + 1 = 13 vértices

4 A base dessa pirâmide tem 9 – 1 = 8 vértices. Portanto, ela tem 8 lados.

5

a) 8 palitos.

b) 5 bolinhas de isopor.

6

a) Ele vai construir um prisma reto, pois todas as faces laterais são retângulos.

b) Ele terá que construir 2 hexágonos: a base inferior e a base superior.

c) São necessários 6 retângulos: o mesmo número da quantidade de lados do polígono da base.

d) 80 cm × 300 cm.

e) O prisma tem 2 bases + 6 faces laterais = 8 faces

f) Todos os vértices do prisma também são vértices dos polígonos das bases, então, $2 \cdot 6 = 12$ vértices

g) De cada vértice do prisma saem **3** arestas (2 da base e 1 da face lateral), mas cada aresta sai de **2** vértices diferentes ao mesmo tempo. Então, se o prisma tem **12** vértices (6 de cada base), o total de arestas é $\frac{3 \cdot 12}{2} = 3 \cdot 6 = 18$

Desafio

Alternativa correta: **d**.

1ª etapa: no começo, está cheia a lata de 1.200 mL.

2ª etapa: depois, enche-se a garrafa de 800 mL.

HORA DA CHECAGEM

HORA DA CHECAGEM

3ª etapa: transfere-se 500 mL para a garrafa menor, sobrando 300 mL na garrafa maior.

4ª etapa: despeja-se o conteúdo da garrafa menor (500 mL) na lata novamente.

5ª etapa: os 300 mL restantes na garrafa maior são colocados na garrafa menor, e, assim, a garrafa de 800 mL fica vazia, a de 500 mL contém 300 mL, e a lata está quase cheia.

6ª etapa: por fim, despejam-se 800 mL da lata para a garrafa grande sobrando 100 mL na lata.

Registro de dúvidas e comentários

Neste tema você ampliará seu conhecimento sobre os sólidos geométricos.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

No tema anterior, você viu alguns tipos especiais de poliedros: os prismas e as pirâmides. Mas, em algum momento, enquanto estava desenvolvendo as atividades do Tema 1, você pode ter pensado: “Será que há nomes diferentes para os diversos sólidos geométricos que são encontrados na natureza e na produção humana?”. Na verdade sim, e o nome geral passa a ser poliedro.

Agora reflita: O que a bola de futebol tem a ver com poliedros?

Um objeto de muitas faces

Entre as formas tridimensionais vistas e usadas no dia a dia, merecem destaque os **poliedros**, que são **sólidos geométricos** delimitados por faces planas poligonais.

Desse ponto de vista, tanto um cubo, um paralelepípedo ou uma pirâmide são poliedros, pois eles são sólidos geométricos delimitados por faces planas quadradas, retangulares ou triangulares.

Mas o universo dos poliedros é bem mais amplo, como você verá a seguir.

O sufixo – *edro* vem do grego e significa “base de apoio”.

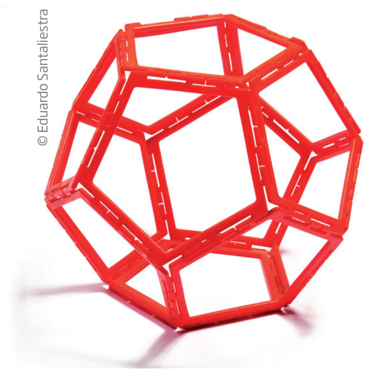
A forma de uma pedra preciosa lapidada é um poliedro cujas faces são polígonos.

Pedra preciosa: água-marinha.

Existem jogos e brinquedos com peças poligonais que permitem formar a superfície de um poliedro.

Poliedro formado por módulos (faces) poligonais de plástico.

Poliedro com faces formadas por pentágonos e hexágonos.



Estrutura de um poliedro em que se destacam arestas.

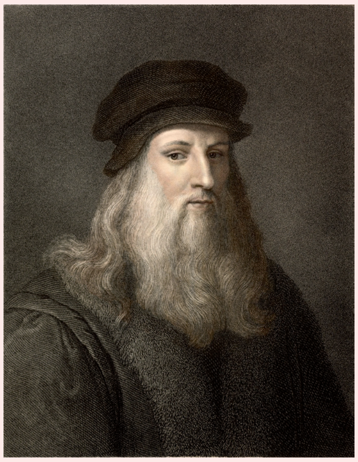
Qualquer figura geométrica tridimensional fechada e delimitada por faces planas pode ser considerada um poliedro, por exemplo, os prismas e as pirâmides.

As características geométricas de um poliedro são:

- é delimitado por faces planas que são polígonos;
- a intersecção de duas de suas faces determina uma aresta;
- a intersecção de suas arestas determina um vértice, que são os "bicos" do poliedro.

VOCÊ SABIA?

Leonardo da Vinci (1452-1519), o grande artista que pintou a *Mona Lisa*, um dos quadros mais famosos do mundo, estudou e desenhou poliedros para ilustrar livros de Geometria de sua época.



Leonardo da Vinci, pintor e cientista italiano. Ao lado, o livro *Sobre as proporções divinas*, cujo desenho da capa é atribuído a ele.

ATIVIDADE 1 Poliedros e o cotidiano

1 Quais dos objetos a seguir têm forma de poliedro?

a)

© picsfive/123RF

b)

© Lynne Carpenter/123RF

c)

© villorejo/Stock Photos / Keystone

d)

© xalaxn / 123RF

2 Imagine um cubo e complete com o número de:

a) faces ______________________________

b) arestas ______________________________

c) vértices ______________________________

> DICA!
> Se necessário, obtenha um dado e observe-o.

3 Pense em uma pirâmide como a de Quéops (a Grande Pirâmide), no Egito, que é um poliedro. Depois, responda às questões.

a) Descreva como são as faces de uma pirâmide.

____

____

b) Indique o número de faces, arestas e vértices.

____

____

4 Explore uma caixa, como as usadas para guardar sapatos ou uma embalagem de creme dental. Depois, responda:

a) Indique o número de faces, arestas e vértices dessa caixa.

____

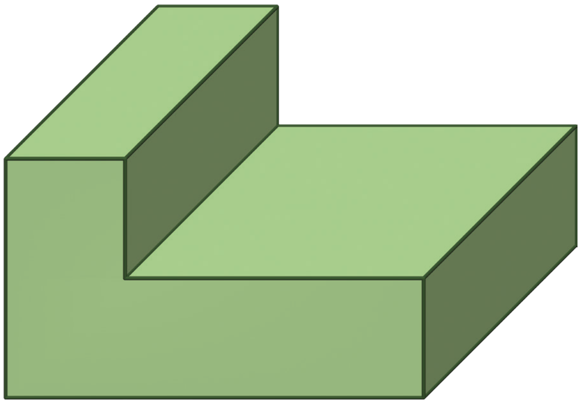
____

b) Descreva como são as faces da caixa.

____

____

5 Observe um sólido geométrico em forma de degrau:



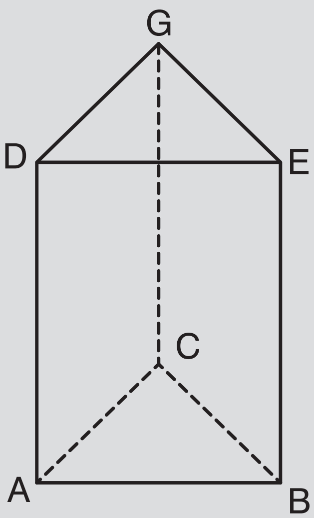
a) Quantas faces tem esse sólido?

b) Quantos vértices tem esse sólido?

c) Descreva como são as faces desse sólido.

DESAFIO

Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice



a) A

b) B

c) C

d) D

e) E

Fuvest 1997. Disponível em: <http://www.fuvest.br/vest1997/provas/prv1fm14.stm>. Acesso em: 26 set. 2014.

RETAS REVERSAS

São retas que não estão contidas num mesmo plano e, além disso, não têm ponto em comum.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 – Poliedros e o cotidiano

1 Alternativas corretas: **b**, **c** e **d**. A lata tem superfície lateral curva; para ser um poliedro, é preciso que todas as faces sejam planas.

2

a) 6 faces.

b) 12 arestas.

c) 8 vértices.

3

a) Nas pirâmides, as faces laterais são triangulares. As pirâmides egípcias têm 4 faces triangulares e 1 face quadrada (a base).

b) São 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

4

a) São 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

b) Todas as faces são retangulares.

5

a) As faces visíveis são 5. Acrescenta-se a outra face em L, que está atrás, paralela à visível, mais a base e, por fim, a "parede" de trás, então são $5 + 3 = 8$.

b) Todos os vértices também são vértices das duas faces em L: a da frente e a de trás; portanto, total: $2 \cdot 6 = 12$ vértices.

c) Há 2 faces em forma de L, que são hexágonos (têm 6 lados), e 6 faces (pisos e paredes) retangulares.

Desafio

Alternativa correta: **e**. Ela saiu de G. Percorreu GC. Está agora em C. Partiu de C e percorreu a diagonal CD. Está agora em D. Partiu de D e percorreu DE (DE é reversa com CG). Chegou, portanto, ao ponto E.

Registro de dúvidas e comentários

De todos os infinitos poliedros que se pode imaginar, cinco deles, especiais, encantaram cientistas e artistas: são os chamados poliedros de Platão, considerados os poliedros mais "perfeitos".

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

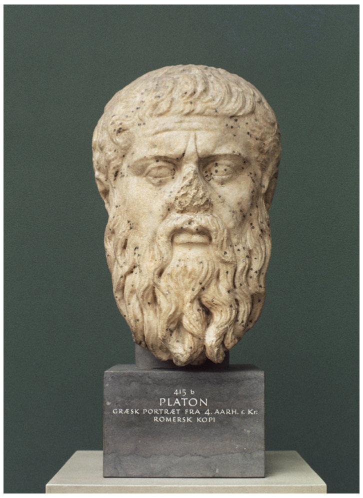
No que você vê à sua volta, consegue identificar figuras geométricas planas e tridimensionais? Que objetos lembram triângulos, quadrados, hexágonos? E quais lembram pirâmides e cubos?

Sólidos de Platão e sua contribuição para o desenvolvimento das ciências

Há mais de 2 mil anos, os matemáticos se interessam por poliedros que têm alguma regularidade especial, por exemplo, um poliedro em que as faces são todas do mesmo tipo.

Um poliedro cujas faces são todas iguais e formadas por polígonos regulares são **sólidos regulares**, também conhecidos como **poliedros de Platão** ou **sólidos platônicos**. Esses poliedros receberam essa denominação em homenagem a Platão, filósofo grego que viveu há cerca de 2.400 anos e provou que só existem cinco poliedros que apresentam essas características.

Os poliedros de Platão interessaram outros cientistas, como Johannes Kepler (1571-1630), um dos principais astrônomos da história, que usou esses poliedros para explicar a posição dos planetas no Sistema Solar.

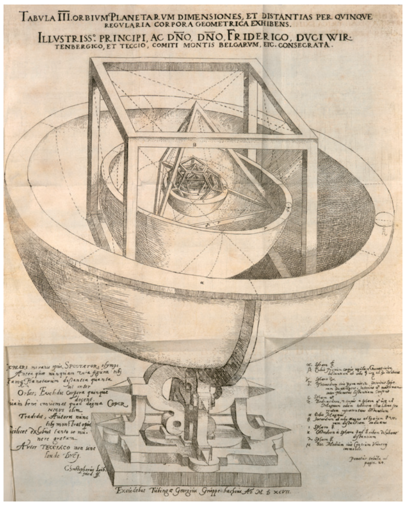


© De Agostini Picture Library/Easypix

Platão, filósofo grego que viveu no século IV a.C. em Atenas, Grécia.

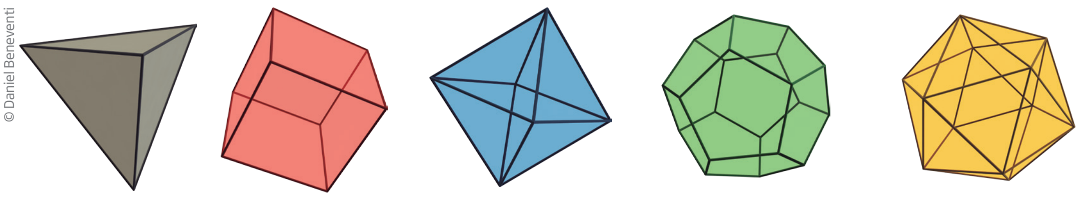
© Toni Schneiders/Interfoto/Latinstock

Johannes Kepler.


© Humanities and Social Sciences Library/Rare Books Division/New York Public Library/SPL/Latinstock

Sistema dos mundos: modelo formado com poliedros regulares que Kepler usou para explicar as distâncias no Universo.

Platão descobriu que só existem cinco sólidos geométricos em que todas as faces são formadas pelo mesmo tipo de polígono regular:



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

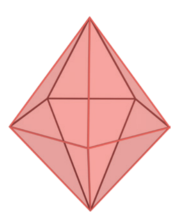
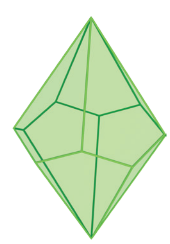
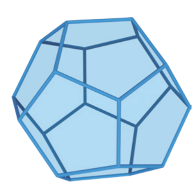
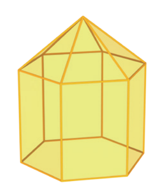
Os cinco poliedros de Platão

Veja na tabela a seguir as características geométricas dos poliedros de Platão.

Poliedro	Faces	Polígono das faces
Tetraedro	4	Triângulo equilátero
Cubo	6	Quadrado
Octaedro	8	Triângulo equilátero
Dodecaedro	12	Pentágono regular
Icosaedro	20	Triângulo equilátero

ATIVIDADE 1 Poliedros de Platão

1 Considere as formas tridimensionais a seguir.

A	B	C	D	E
				

a) Em quais das formas tridimensionais as faces são do mesmo tipo de polígono?

____

b) Em quais delas as faces são todas iguais? ______________________________

c) Descreva as faces de cada poliedro.

____

____

d) Qual dessas formas tem faces que são polígonos regulares?

____

2 Observe os poliedros de Platão e responda quantas arestas saem do mesmo vértice no:

a) tetraedro: ______

b) cubo: ______

c) octaedro: ______

d) dodecaedro: ______

e) icosaedro: ______

3 Quantos vértices tem:

a) O tetraedro: ______

b) O cubo: ______

c) O octaedro: ______

4 Quantas arestas tem:

a) O tetraedro: ______

b) O cubo: ______

c) O octaedro: ______

5 Um matemático observou que em um poliedro a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas mais 2. Confira a validade dessa proposição para o:

a) tetraedro

b) cubo

c) octaedro

Construção dos poliedros de Platão

Os poliedros podem ser construídos de vários modos, dependendo do tipo de material que se tem à disposição. A construção de poliedros interessa a vários profissionais, como arquitetos, desenhistas industriais, decoradores, fabricantes de embalagens, construtores de maquetes, montadores de móveis, entre outros.

Uma das técnicas utilizadas na construção de poliedros é a planificação, que pode ser feita usando-se cartolina, papel-cartão, folhas de compensado e outros materiais. Saber fazer ou reconhecer uma planificação exige habilidades de raciocínio e de visualização.

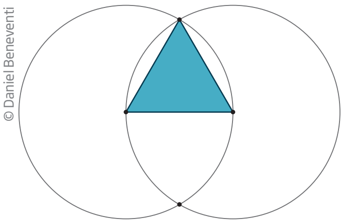
Planificações

Tetraedro

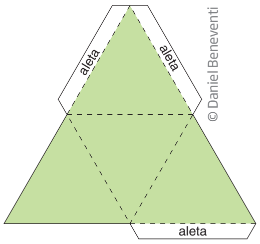
O tetraedro é um poliedro que tem a forma de uma pirâmide com base triangular. Se as faces de um tetraedro são triângulos equiláteros, diz-se que é um tetraedro regular. Esse é um dos poliedros de Platão.

A base para sua construção são os triângulos equiláteros.

Observe uma maneira de construir a planificação do tetraedro regular:

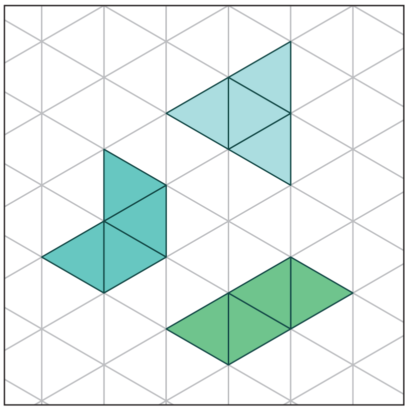


Esquema de construção do triângulo equilátero com régua e compasso.



Planificação do tetraedro a partir de 4 triângulos equiláteros.

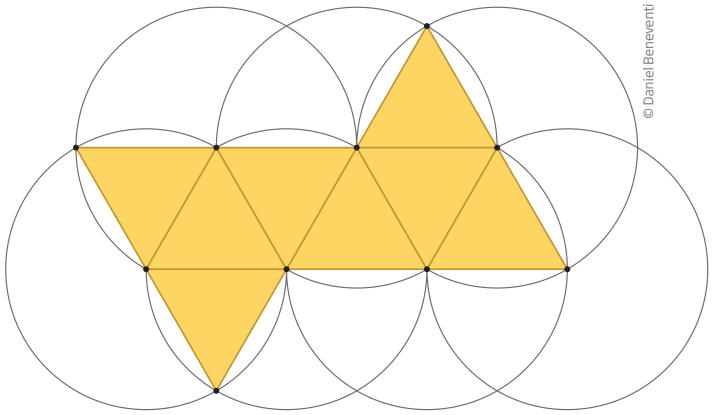
É comum acrescentar abas aos 4 triângulos equiláteros, as chamadas *aletas*, que servem para colar uma face na outra.



Três planificações de tetraedro regular.

Octaedro

O octaedro regular é um poliedro de Platão cujas faces são triângulos, e sua planificação é formada por 8 triângulos equiláteros.



Processo de construção das 8 faces planificadas do octaedro.

ASSISTA!

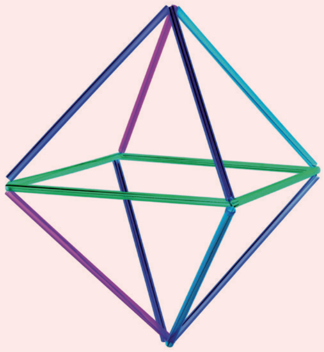
Matemática – Volume 2

Objetos tridimensionais

Esse vídeo destaca a importância dos poliedros não só na Matemática, mas também em várias outras ciências, como Arquitetura, Astronomia etc. Mostra a presença dessas formas na natureza e analisa detalhes e propriedades de alguns objetos tridimensionais, discutindo por que a planificação dessas figuras é um procedimento comum e útil nos dias de hoje.

VOCÊ SABIA?

É simples construir o “esqueleto” do octaedro com canudos e barbante passando por dentro dos canudos. Veja:



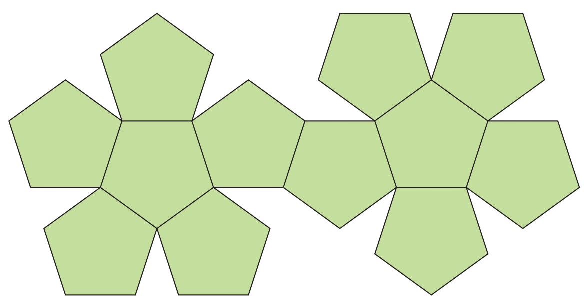
Estrutura do octaedro feita com canudos.

Dodecaedro

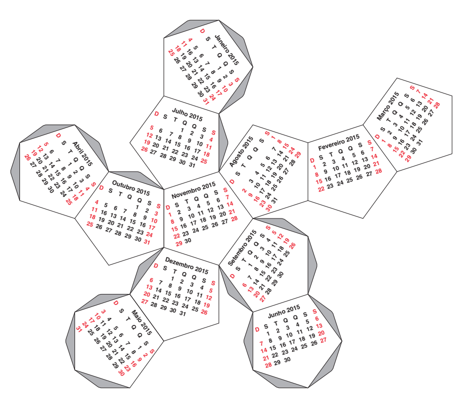
O dodecaedro regular é um poliedro limitado por 12 faces pentagonais regulares.

Répteis (1943), obra de M. C. Escher, na qual aparece um dodecaedro.

Há várias maneiras de se construir um dodecaedro regular por meio de planificação. Observe a seguir um exemplo de molde.

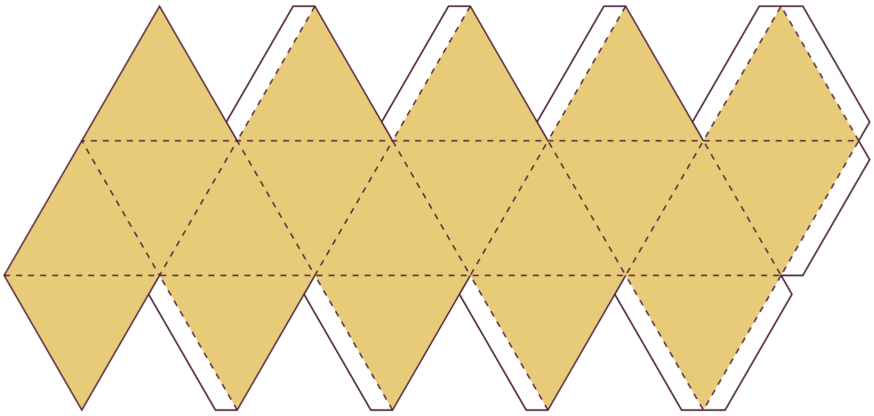


Por ter 12 faces, o dodecaedro é utilizado como suporte de calendários de mesa: os 12 meses do ano ficam, cada um, em uma face do poliedro.



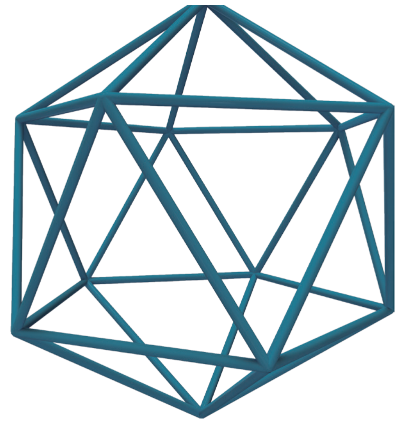
Icosaedro

O icosaedro regular é o poliedro de Platão mais complexo: tem 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. Com uma malha de triângulos equiláteros, é possível planificar o icosaedro.



© Daniel Beneventi

Planificação do icosaedro.



© Daniel Beneventi

Estrutura do icosaedro.

Cubo

O cubo é um paralelepípedo especial em que todas as arestas têm a mesma medida. Consequentemente, todas as faces são iguais e quadradas. É o poliedro de Platão mais conhecido, utilizável e presente em grande número de situações e objetos do cotidiano, assim como na Arquitetura, nas artes e na natureza.

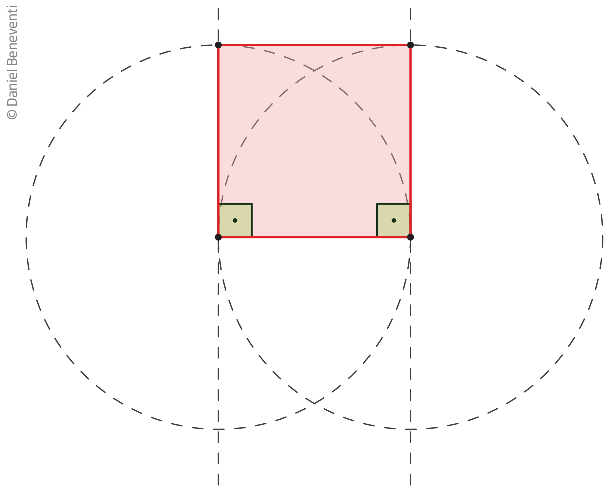
© Sebastiano Scattolin/Grand Tour/Corbis/Latinstock

Centro financeiro, La Défense, Paris, França.

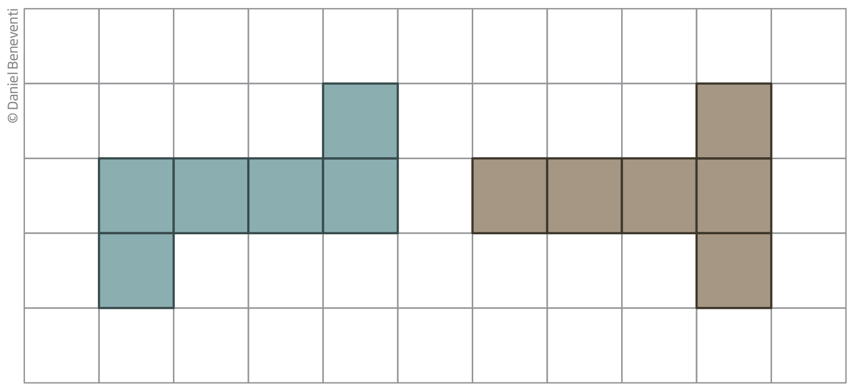
© David R. Frazier Photolibrary, Inc./Alamy/Glow Images

O *Atomium* é uma estrutura cúbica que fica em Bruxelas, capital da Bélgica.

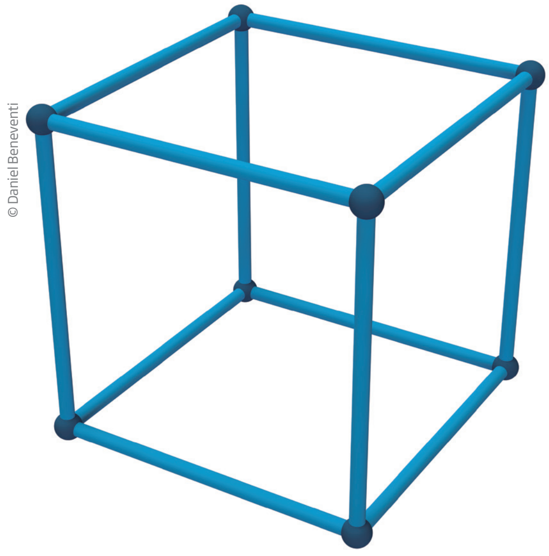
Há várias maneiras de representar a forma do cubo; a planificação é a maneira mais conhecida. Pode-se partir de uma malha quadriculada ou construir os quadrados com régua e compasso.



Existem 11 planificações diferentes do cubo. Por exemplo:

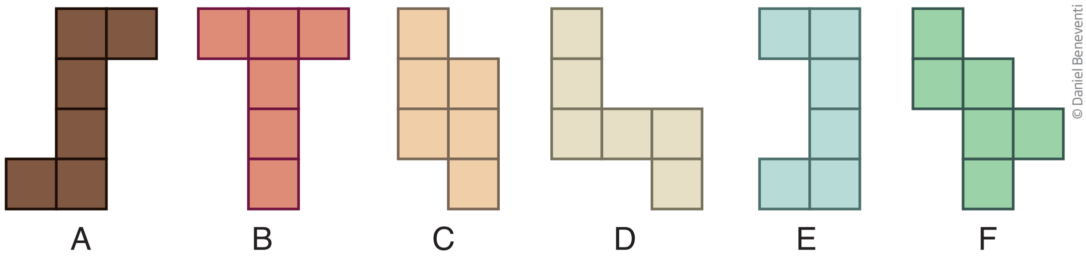


O cubo também pode ser representado por meio de canudos ou varetas e junções.



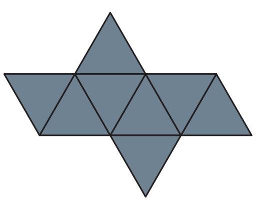
ATIVIDADE 2 Planificação

1 Determine quais destas figuras representam a planificação de um cubo:

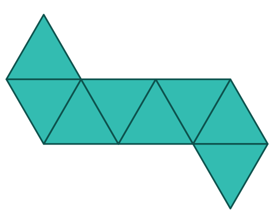


2 A seguir, há 9 figuras formadas com 8 triângulos equiláteros, ligados lado a lado; 7 delas são planificações de um octaedro regular. Descubra quais são as 2 figuras que não são planificações do octaedro.

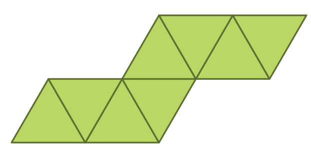
a)



d)

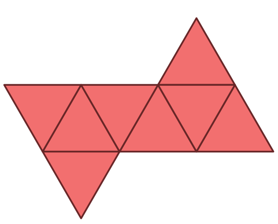


g)

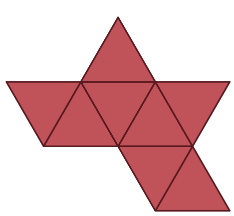


© Daniel Beneventi

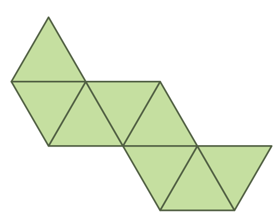
b)



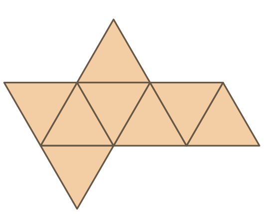
e)



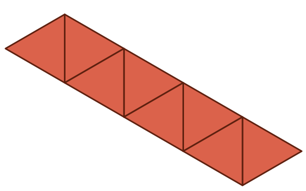
h)



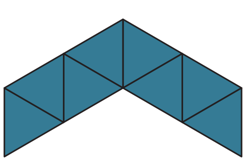
c)



f)



i)



HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 – Poliedros de Platão

1

a) As faces são do mesmo tipo de polígono nas formas A, B, C e D; no caso de A, embora as faces não sejam iguais, são do mesmo tipo: “retangular”.

b) As faces são todas iguais nas formas B, C e D.

c) A: todas as faces são retangulares; B: todas as faces são triângulos; C: todas as faces são quadriláteros convexos em forma de pipa; D: todas as faces são pentágonos regulares; E: as faces laterais são retangulares; as faces da “ponta” em forma de pirâmide são triângulos; e a base é um hexágono.

d) Apenas a figura D, cujas faces são pentágonos regulares.

2

a) 3 arestas.

b) 3 arestas.

c) 4 arestas.

d) 3 arestas.

e) 5 arestas.

3

a) 4 vértices.

b) 8 vértices.

c) 6 vértices.

4

a) 6 arestas.

b) 12 arestas.

c) 12 arestas.

5

a) Válida: $4 + 4 = 6 + 2$.

b) Válida: $6 + 4 = 8 + 2$.

c) Válida: $8 + 6 = 12 + 2$.

Atividade 2 – Planificação

1 São planificações de cubo as figuras A, B e F.

2 Não são planificações do octaedro as figuras dos itens **f** e **i**.

Registro de dúvidas e comentários

TEMA 4 Uma fórmula para todos os poliedros

Neste tema, você conhecerá a fórmula que um matemático suíço descobriu no século XVII, que podia ser aplicada para resolver problemas relacionados a poliedros.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você provavelmente se lembra do estudo de equações e de algumas fórmulas algébricas. Agora, vai usar esse conhecimento para explorar as relações geométricas.

Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) fez uma das grandes descobertas da Matemática e, em sua homenagem, ela recebeu o nome de **relação de Euler**.

A fórmula de Euler relaciona o número de faces, arestas e vértices de um poliedro, e é verdadeira para todos eles.

O que impressiona nessa fórmula é sua simplicidade.

Euler observou que a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas acrescido de 2.

$$F + V = A + 2$$

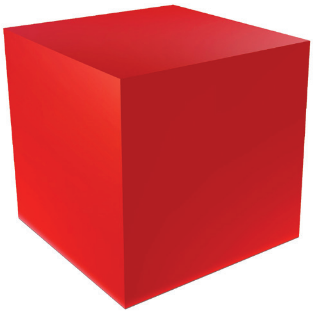
Verifique a fórmula em dois casos bem conhecidos.

VOCÊ SABIA?

A relação de Euler é uma das fórmulas mais apreciadas pelos geômetras. Devido à importância desse matemático, alguns países, como a Suíça, criaram selos e cédulas em sua homenagem.

Banco Nacional da Suíça

O cubo



© eriksvoboda/123RF

Um cubo é um caso particular de paralelepípedo em que todas as faces são quadrados. Ele tem 6 faces (4 nas laterais e 2 bases) e 8 vértices.

De acordo com a fórmula de Euler, é possível descobrir quantas são as arestas. Observe:

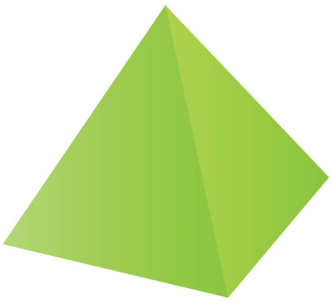
$F + V = A + 2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$6 + 8 = A + 2 \rightarrow$ resolvendo a equação: $14 = A + 2 \Rightarrow A = 14 - 2 = 12$.

De fato, um cubo qualquer tem 12 arestas (4 na base quadrada inferior, mais 4 nas laterais, e mais 4 na base quadrada superior).

A pirâmide de base quadrada



© arcady31/123RF

Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces (4 triângulos nas laterais e a base quadrada). O número de vértices também é 5 (4 na base quadrada e o vértice superior). Observe a aplicação da fórmula de Euler para calcular o número de arestas:

$F + V = A + 2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$5 + 5 = A + 2 \rightarrow$ resolvendo a equação: $10 = A + 2 \Rightarrow A = 10 - 2 = 8$.

Observe que uma pirâmide de base quadrada, como as pirâmides egípcias, tem 8 arestas (4 na base quadrada inferior e 4 nas laterais).

ATIVIDADE 1 Fórmula de Euler

1 Utilize a fórmula de Euler para determinar o número de arestas de um poliedro de 11 faces e 11 vértices.

---

2 Quantos vértices apresenta um poliedro que tem 10 faces e 20 arestas?

---

3 Determine o número de faces de um poliedro que tem 7 vértices e 15 arestas.

---

4 Determine o número de arestas do octaedro regular, que é um poliedro de Platão, sabendo que o número de vértices é igual a 6.

---

5 Sabendo que o dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais, determine o número de vértices e de arestas.

> DICA!
> Para saber o número de arestas, relacione o número de faces com o número de lados de cada face, lembrando que cada lado pertence a duas faces ao mesmo tempo.

---

6 As fórmulas a seguir relacionam o número **n** de lados da base ao número de vértices (V), faces (F) ou arestas (A), de um prisma ou de uma pirâmide. Indique a qual figura cada fórmula se refere.

a) $F = n + 1$ ____________________

b) $F = n + 2$ ____________________

c) $V = 2n$ ____________________

d) $V = n + 1$ ____________________

e) $A = 2n$ ____________________

f) $A = 3n$ ____________________

7 Escreva a fórmula que relaciona o número de lados da base de uma pirâmide ao número de faces, arestas e vértices:

DESAFIO

O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui

a) 33 vértices e 22 arestas.
b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas.
d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

Fuvest 1999. Disponível em: <http://www.fuvest.br/vest1999/provas/1fase/dia2/prv1f99t.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

PENSE SOBRE...

Observe a forma das coisas do cotidiano: o formato de edifícios, embalagens e objetos de uso diário. Muitas dessas formas são poliédricas, isso porque em muitos casos é mais fácil e econômico produzir formas com faces planas. Você poderá se dar conta disso ao desmontar uma embalagem, mesmo que ela não tenha a forma de um bloco retangular.

As descobertas realizadas por geômetras, desde Platão até os dias de hoje, têm sido intensamente utilizadas por diversos profissionais.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Fórmula de Euler

1 $F = 11$, $V = 11$; $F + V = A + 2 \Rightarrow 11 + 11 = A + 2 \Rightarrow A = 22 - 2 = 20$

2 $F = 10$, $A = 20$; $F + V = A + 2 \Rightarrow 10 + V = 20 + 2 \Rightarrow V = 22 - 10 = 12$

3 $V = 7$, $A = 15$; $F + V = A + 2 \Rightarrow F + 7 = 15 + 2 \Rightarrow F = 17 - 7 = 10$

4 O octaedro regular tem 8 faces triangulares. Sabendo que o número de vértices é 6 e substituindo na fórmula de Euler, obtém-se:

$F + V = A + 2 \Rightarrow 8 + 6 = A + 2 \Rightarrow A = 14 - 2 = 12$ arestas.

5 Se o dodecaedro tem 12 faces pentagonais e cada pentágono tem 5 lados, os lados dos pentágonos coincidem com as arestas do poliedro. Para calcular o número de arestas, basta multiplicar $12 \cdot 5 = 60$ e dividir por 2, uma vez que uma aresta pertence a duas faces do poliedro, ou seja, o número de arestas do dodecaedro é $60 \div 2 = 30$.

Usando a fórmula de Euler, tem-se: $F = 12$; $A = 30$; $F + V = A + 2 \Rightarrow 12 + V = 30 + 2 \Rightarrow V = 32 - 12 = 20$. O dodecaedro regular tem 20 vértices.

HORA DA CHECAGEM

6

a) $F = n + 1$ → pirâmide

b) $F = n + 2$ → prisma

c) $V = 2n$ → prisma

d) $V = n + 1$ → pirâmide

e) $A = 2n$ → pirâmide

f) $A = 3n$ → prisma

7 Em uma pirâmide, tem-se:

- número de faces será igual ao número de lados do polígono da base mais 1 ou $\mathbf{F = n + 1}$
- número de arestas é o dobro do número de lados do polígono da base ou $\mathbf{A = 2n}$
- número de vértices é igual ao número de lados do polígono da base mais 1 ou $\mathbf{V = n + 1}$

Desafio

Alternativa correta: **e**.

As 11 faces triangulares são faces laterais da pirâmide. Essas 11 faces, por serem laterais, determinam a base da pirâmide: um polígono de 11 lados e, consequentemente, 11 vértices.

Assim, o número de vértices é $12 = 11 + 1$ e o número de arestas é 22 (11 arestas da base e 11 arestas laterais).

Registro de dúvidas e comentários