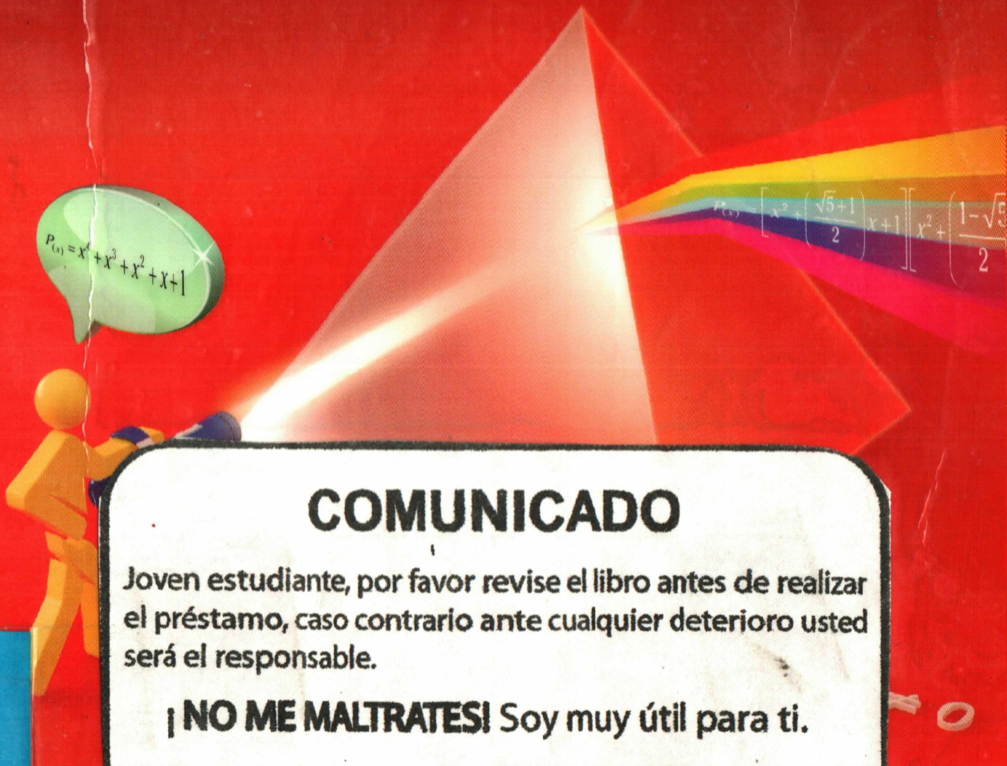
PROBLEMAS RESUELTOS DE ÁLGEBRA

TOMO I



Lumbreras Editores

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

PROBLEMAS RESUELTOS DE ÁLGEBRA

TOMO I

Lumbreras
Editores

Presentación

La Asociación Fondo de Investigadores y Editores (AFINED), promotora de Lumbreras Editores, tiene el agrado de presentar el texto **Problemas resueltos de Álgebra. Tomo I**, libro que forma parte de una nueva serie de publicaciones que aportan al desarrollo dinámico de los contenidos educativos que brindamos a la sociedad, sobre todo en un contexto en el que la enseñanza de las ciencias y las humanidades ha ido perdiendo su valor analítico-crítico.

La serie de Problemas resueltos es el complemento ideal para los libros de la Colección Lumbreras, trabajo desarrollado por Lumbreras Editores en conjunto con las planas de profesores del **Instituto de Ciencias y Humanidades** –promotor de las academias ADUNI y César Vallejo–, quienes se han dedicado durante generaciones a formar estudiantes con criterio realista y capacidad analítica, además de impartir conocimientos objetivos y de rigor científico a través de las publicaciones de Lumbreras Editores con una sólida presencia en los diversos lugares del Perú, cumpliendo así una tarea vital en el acercamiento de material bibliográfico de calidad a miles de estudiantes y profesores en todo el país. De esta manera, reafirmamos nuestro compromiso firme de aportar en el desarrollo de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

Problemas resueltos de Álgebra. Tomo I, presenta el desarrollo didáctico de cada uno de los problemas propuestos del libro **Álgebra. Tomo I** y ofrece un acercamiento dinámico a todos los contenidos necesarios para obtener dominio del curso. Este libro es también un recorrido a través de lineamientos metodológicos que anhelan construir puentes sólidos entre el estudiante y el aprendizaje de esta materia.

La búsqueda por aportar publicaciones más didácticas y novedosas ha hecho posible este libro y la serie de Problemas resueltos que le seguirán en el campo de las ciencias; también revela nuestro

Prólogo

Este libro ha sido elaborado a partir de los problemas propuestos de la publicación de **Álgebra. Tomo I** de la Colección Lumbreras. El propósito es transmitir información clara y entendible al estudiante que le permita desarrollar habilidades para afrontar la resolución e interpretación de los problemas. Asimismo, como autores, nuestro compromiso se orienta en reforzar los conocimientos teóricos y prácticos a partir de los más de 800 ejercicios que contiene publicación.

Problemas resueltos de Álgebra. Tomo I, es fruto de la experiencia alcanzada en el ejercicio de la enseñanza de muchos años en la materia, está pensado para cubrir las necesidades temáticas de nuestro sistema educativo, especialmente para la preparación preuniversitaria. En esta etapa, el estudiante debe reforzar sus conocimientos básicos de los temas del álgebra. Nuestra propuesta está debidamente dosificada de menor a mayor grado de dificultad, con el fin de brindar los conocimientos precisos que permitan abordar los ejercicios con una mayor amplitud y un mayor entendimiento de las aplicaciones en los demás cursos de matemática donde el álgebra es la herramienta básica.

De allí que se manifieste que el álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. Ademas, a lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del cual en la actualidad somos herederos.

Finalmente, el esfuerzo realizado en esta publicación tiene como objetivo convertirla en un material de consulta indispensable para estudiantes preuniversitarios, universitarios y profesores del curso de Álgebra.

Los autores

ÍNDICE

	Página
Capítulo 1: Nociones preliminares	
Test	13
Problemas resueltos	17
Capítulo 2: Leyes de exponentes	
Test	35
Problemas resueltos	39
Capítulo 3: Polinomios	
Test	67
Problemas resueltos	71
Capítulo 4: Multiplicación algebraica	
Test	97
Problemas resueltos	101
Capítulo 5: División algebraica de polinomios	
Test	131
Problemas resueltos	136
Capítulo 6: Divisibilidad de polinomios y cocientes notables	
Test	167
Problemas resueltos	172

Test y Problemas resueltos

CAPÍTULO 1

NOCIONES PRELIMINARES

Test

PROBLEMA N.° 1

Simplifique la expresión.

$3(4-5)-5(5+2-8)-(5-6)+19$

-1 -1 -1

A) 19 B) 23 C) 20
D) 22 E) 18

Resolución

Simplificamos

$$3\underbrace{(4-5)}-5\underbrace{(5+2-8)}-\underbrace{(5-6)}+19$$

$$3(-1)-5(-1)-(-1)+19$$

$$-3+\underbrace{5+1+19}_{25}$$

$\therefore\ -3+25=22$

Clave D

PROBLEMA N.° 2

Calcule el valor simplificado de

$\underbrace{(5+5+...+5)}_{38\text{ veces}}-\underbrace{(3+3+...+3)}_{51\text{ veces}}$.

A) 73 B) 28 C) 37
D) 46 E) 36

Resolución

Calculamos

$$\underbrace{(5+5+...+5)}_{38\text{ veces}}-\underbrace{(3+3+...+3)}_{51\text{ veces}}$$

Recuerda

$$\underbrace{(a+a+...+a)}_{n\text{ veces}}=na$$

Luego se tiene: $5\times38-3\times51$

$\therefore\ 190-153=37$

Clave C

PROBLEMA N.° 3

El cociente en una división es 7. Calcule el divisor, si la diferencia entre el dividendo y el residuo es 42.

A) 2 B) 3 C) 1
D) 5 E) 6

Resolución

De los datos: $q=7$, $D-r=42$. Se pide d(divisor).
Usamos el algoritmo de Euclides: $D=dq+r$

$\rightarrow D-r=dq \rightarrow 42=d\cdot7$

$\therefore\ d=6$

Clave E

Resolución

Simplificamos

$$\frac{(-1)(-1)(-5)+2(-1)(-5)}{(24\div 3)\div(-4)+(24\div 4)\div 2}$$

Recuerda

$(-)(-)=(+)$

$(+)(-)=(-)$

$$=\frac{-5+10}{8+(-4)+6\div 2}$$

$$=\frac{5}{(-2)+3}=\frac{5}{1}=5$$

Clave B

PROBLEMA N.° 8

Calcule el valor de $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{6}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{4}}$.

A) -1 B) 3 C) 4

D) 2 E) -2

Resolución

Efectuamos

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{6}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{4}}=\frac{\frac{3\cdot 1-2}{6}}{\frac{5\cdot 4-7\cdot 3}{12}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{12}}$$

$$=-\frac{12}{6}=-2$$

Clave E

PROBLEMA N.° 9

Efectúe

$$\left(\frac{20}{3}\div\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\div\frac{21}{2}\right)\div\frac{2}{9}.$$

A) 1 B) 2 C) 1/2

D) 3 E) 4

Resolución

Efectuamos

$$\left(\frac{20}{3}\div\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\div\frac{21}{2}\right)\div\frac{2}{9}$$

Recuerda

$$\left(\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{a\cdot n}{b\cdot m}$$

Luego se tendrá

$$\left(\frac{\cancel{20}\times\cancel{6}}{\cancel{3}\times\cancel{5}}\right)\left(\frac{\cancel{7}\times\cancel{2}}{\cancel{8}\times\cancel{21}}\right)\cdot\frac{9}{2}$$

$$(\cancel{4}\cdot\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{4}\times\cancel{3}}\right)\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{2}}=3$$

Clave D

PROBLEMA N.° 10

Despeje x de la siguiente ecuación

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)+\left(\frac{x+3}{3}\right)+\left(\frac{x-6}{6}\right)-3=10.$$

A) 13 B) 14 C) -8

D) 2 E) 5

Problemas resueltos

PROBLEMA N.° 1

Halle la suma de

a. $3a+2b-c$; $2a+3b+c$

b. $a+b-c$; $2a+2b-3c$; $-3a-b+3c$

Resolución

Ordenamos términos semejantes verticalmente y sumamos por columnas

a. $$\left.\begin{array}{r} 3a+2b-c \\ 2a+3b+c \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{5a+5b+0}$$

Por lo tanto, se obtiene $5a+5b$.

b. $$\left.\begin{array}{r} a+\ \ b-\ \ c \\ 2a+2b-3c \\ -3a-\ \ b+3c \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{0a+2b-\ \ c}$$

Por lo tanto, se obtiene $2b-c$.

PROBLEMA N.° 2

Halle la suma de

a. $x+y+z$; $2x-3y+z$; $-4x+5y-2z$

b. x^2-5x+8; $-x^2+10x-30$; $-6x^2+5x-50$

Resolución

Ordenamos términos semejantes verticalmente y sumamos algebraicamente columna por columna.

a. $$\left.\begin{array}{r} x+y+z \\ 2x-3y+z \\ -4x+5y-2z \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{-x+3y+0}$$

Por lo tanto, se obtiene $-x+3y$.

b. $$\left.\begin{array}{r} x^2-5x+8 \\ -x^2+10x-30 \\ -6x^2+5x-50 \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{-6x^2+10x-72}$$

Por lo tanto, se obtiene $-6x^2+10x-72$.

PROBLEMA N.° 3

Halle la suma de

a. x^3y-xy^3+5; $x^4-x^2y^2+5x^3y-6$; $-6xy^3+x^2y^2+2$

b. $(x^2+y^2-3xy)-(-y^2+3x^2-4xy)$

Resolución

Ordenamos términos semejantes verticalmente y sumamos de columna a columna; debemos recordar que solo términos semejantes se pueden reducir mediante la adición o sustracción.

a. $$\left.\begin{array}{rrrrr} & x^3y & & -xy^3 & +5 \\ x^4 & +5x^3y & -x^2y^2 & & -6 \\ & & +x^2y^2 & -6xy^3 & +2 \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{x^4+6x^3y+0x^2y^2-7xy^3+1}$$

Por lo tanto, se obtiene $x^4+6x^3y-7xy^3+1$.

Reduciendo términos semejantes

$$-[x-\{-\cancel{x}-y+\cancel{x}-y+z+x+\cancel{y}-\cancel{y}\}]$$

$$-[x-\{-2y+z+x\}]=-[\cancel{x}+2y-z-\cancel{x}]$$

$$=-2y+z$$

Finalmente, se obtiene $-2y+z$.

PROBLEMA N.° 6

Reduzca

a. $2x-\overline{x-2y+\overline{(5x-2y)-\overline{x-y}}}$

b. $-[3m+\{-m-(n-\overline{m+4})\}+\{-(m+n)+(-2n+3)\}]$

Resolución

a. El ejercicio es equivalente a

$$2x-[x-2y+\{5x-2y-(x-y)\}]$$

$$2x-[\cancel{x}-2y+5x-2y-\cancel{x}+y]$$

$$2x-[5x-3y]=2x-5x+3y$$

$$=-3x+3y$$

Por lo tanto, se obtiene $-3x+3y$.

b. Es equivalente a

$$-[3m+\{-m-(n-(m+4))\}+\{-(m+n)+(-2m+3)\}]$$

Luego

$$-[3m-m-(n-m-4)+\{-m-n-2n+3\}]$$

Entonces

$$-[3m-\cancel{m}-n+\cancel{m}+4-m-n-2n+3]$$

$$-[2m-4n+7]=-2m+4n-7$$

Por lo tanto, se obtiene $-2m+4n-7$.

PROBLEMA N.° 7

Halle el producto de multiplicar

a. $(a^{x-1}-b^{n-1})\cdot(a-b)$

b. $(3a^{x-1}+a^x-2a^{x-2})\cdot(a^x-a^{x-1}+a^{x-2})$

Resolución

Recuerda

Propiedad distributiva

$$(m+n)(p+q)=mp+mq+np+nq$$

a. $(a^{x-1}-b^{n-1})\cdot(a-b)$

Utilizamos la propiedad de exponentes

$$\underbrace{a^{x-1}\cdot a}-a^{x-1}\cdot b-b^{n-1}\cdot a+\underbrace{b^{n-1}\cdot b}$$

$$a^x\ -a^{x-1}\cdot b-b^{n-1}\cdot a+\ b^n$$

Resolución

a.

> **Recuerda**
>
> $(m+n)(m-n)=m^2-n^2$
>
> $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$
>
> $(m-n)^2=m^2-2mn+n^2$

Agrupamos convenientemente

$$[2x+(3y-4z)][2x-(3y-4z)]$$
$$=(2x)^2-(3y-4z)^2=4x^2-(9y^2-24yz+16z^2)$$
$$=4x^2-9y^2+24yx-16z^2$$

b.

> **Recuerda**
>
> $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$$\underbrace{(x+1)(x-2)}_{(x^2-x-2)}\underbrace{(4x-1)(3x+5)}_{\underbrace{(12x^2+20x-3x-5)}_{(12x^2+17x-5)}}+11\underbrace{(x-3)(x+7)}_{+11(x^2+4x-21)}$$

Entonces

$$=x^2(12x^2+17x-5)-x(12x^2+17x-5)-2(12x^2+17x-5)+11(x^2+4x-21)$$

$$=12x^4+\underline{17x^3}-\underline{5x^2}-\underline{12x^3}-\underline{17x^2}+\underline{5x}-\underline{24x^2}-\underline{34x}+10+\underline{11x^2}+\underline{44x}-231$$

Reducimos los términos semejantes

$$=12x^4+5x^3-35x^2+15x-221$$

PROBLEMA N.° 10

Efectúe

a. $(3x-1)^2-3(2x+3)^2-2x(-x-5)+(x-1)^2$

b. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)-x(x-3)+2x(x+5)$

Resolución

> **Recuerda**
>
> $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

a. $9x^2-6x+1-3(4x^2+12x+9)+2x^2+10x+x^2-2x+1$

$$=\underline{9x^2}-\underline{6x}+1-\underline{12x^2}-\underline{36x}-27+\underline{2x^2}+\underline{10x}+\underline{x^2}-\underline{2x}+1$$

$$=0x^2-34x-25=-34x-25$$

Luego

$$\frac{\frac{3}{4}-x}{3}-\frac{(2x+4)\cdot 2}{\frac{3}{2}}-x-\frac{13}{3} \rightarrow \frac{3-4x}{12}-\frac{4x+8}{3}-x-\frac{13}{3}$$

Utilizamos el MCM

$$\frac{3-4x-4(4x+8)-12x-4\cdot 13}{12}=\frac{3-4x-16x-32-12x-52}{12}=\frac{-32x-81}{12}$$

b. Eliminamos los signos de colección progresivamente

$$=2x-4[5x-11y+3x]-3[5y-6x+128]$$

$$=2x-4[8x-11y]-3[5y-6x+128]$$

$$=\underline{2x}-\underline{32x}+44y-15y+\underline{18x}-384=-12x+29y-384$$

PROBLEMA N.° 13

Simplifique

$$\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0,5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0,75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$$

Resolución

Eliminamos los signos de colección progresivamente

$$=\frac{1}{4}[c-4b+4c-2b]-\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-\left(\frac{3}{4}\right)\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}[5c-6b]-\frac{3}{2}\left\{\frac{b}{2}-\frac{c}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)\left[2c-\frac{3}{4}b+\frac{3c}{5}\right]\right\}=\frac{1}{4}[5c-6b]-\frac{3}{2}\left\{\frac{b}{\underline{2}}-\frac{c}{6}-\frac{4c}{3}+\frac{b}{\underline{2}}-\frac{2}{5}c\right\}$$

$$=\frac{1}{4}[5c-6b]-\frac{3}{2}\left\{b-\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)c\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)[5c-6b]-\left(\frac{3}{2}\right)\left\{b-\frac{19c}{10}\right\}$$

$$=\frac{5c}{4}-\frac{3b}{2}-\frac{3b}{2}+\frac{57c}{20}$$

PROBLEMA N.° 15

Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{a^2-9}{5a^3b^3}\div\left[\dfrac{a+3}{10a^4}\cdot\dfrac{2a-6}{ab^4}\right]$

b. $\dfrac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$

Resolución

a. $\dfrac{a^2-9}{5a^3b^3}\div\left[\dfrac{2(a+3)(a-3)}{10a^5b^4}\right]$

$$=\frac{\cancel{a^2-9}}{\cancel{5}a^3b^3}\cdot\frac{\cancel{10}a^5b^4}{\cancel{2}\,\cancel{(a+3)(a-3)}}$$

$$=\frac{a^5b^4}{a^3b^3}=a^2b$$

b. Factorizamos

Numerador (por aspa simple)

$$(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2$$

$$\begin{array}{ll} (x-y)^2 & -2xy \\ (x-y)^2 & xy \end{array}$$

$$=\left[(x-y)^2-2xy\right]\left[(x-y)^2+xy\right]$$

$$=\left(x^2-4xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$$

Denominador (por agrupación de términos)

$$(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2=\underline{x^4}-xy^3-x^3y+\underline{y^4}+\underline{2x^2y^2}$$

$$=\left(x^2+y^2\right)^2-xy\left(x^2+y^2\right)\ =\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$$

Luego, la fracción queda como sigue

$$\frac{(x^2-4xy+y^2)\cancel{(x^2-xy+y^2)}}{(x^2+y^2)\cancel{(x^2+y^2-xy)}}=\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$$

PROBLEMA N.° 16

Simplifique

a. $$\dfrac{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2+5ab}{3ab}}{\dfrac{(a-b)^2+(b-a)^2+4ab}{a^2+b^2}}$$

b. $$\left[\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}\right]\left\{\frac{x^2-c^2}{x^2-b^2}\right\}$$

Resolución

a. Simplificamos numerador y denominador separadamente

Numerador

$$\frac{\overbrace{(a+b)^2-(a-b)^2}+5ab}{3ab}=\frac{4ab+5ab}{3ab}=\frac{9ab}{3\cancel{ab}}=3$$

Denominador

$$\frac{(a-b)^2+(b-a)^2+4ab}{a^2+b^2}=\frac{2(a-b)^2+4ab}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2a^2+2b^2-\cancel{4ab}+\cancel{4ab}}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{a^2+b^2}}=2$$

Luego, lo pedido es $\dfrac{3}{2}$.

PROBLEMA N.° 18

Simplifique

a. $$\frac{\left(\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{x}{x^3-8}\right)}{\frac{1}{x^2-2x}}$$

b. $$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{8}{a^8-1}$$

Resolución

a.

Recuerda

$$\frac{M}{\frac{1}{N}}=M\cdot N$$

Operamos con las fracciones

$$\left(\frac{\cancel{4+2x+x^2}}{\cancel{x^2}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x^2+2x+4)}}\right)\cdot\left(\cancel{x}\cancel{(x-2)}\right)=1$$

b. Aquí, el artificio es ir reduciendo a partir del último término tomando de dos en dos.

- $$\frac{4}{a^4+1}+\frac{8}{a^8-1}=\frac{4(a^4-1)+8}{a^8-1}$$

$$=\frac{4\cancel{(a^4+1)}}{\cancel{(a^4+1)}(a^4-1)}=\frac{4}{a^4-1}$$

- $$\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4-1}=\frac{2(a^2-1)+4}{a^4-1}$$

$$=\frac{2\cancel{(a^2+1)}}{\cancel{(a^2+1)}(a^2-1)}=\frac{2}{a^2-1}$$

Finalmente

$$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2-1}=\frac{a-1+2}{a^2-1}$$

$$=\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)}=\frac{1}{a-1}$$

PROBLEMA N.° 19

Simplifique

a. $$\frac{(a-1)\left(1+a-\sqrt[3]{a^2}\right)}{1+\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a^2}}$$

b. $$\frac{n}{p}+1-\left[1+\frac{\frac{m+n}{p}+1}{\frac{m+p}{n}+1}\right]+2$$

Resolución

a. Haciendo un cambio $a=x^3$ se tiene

$$\frac{(x^3-1)(1+x^3-x^2)}{1+x+x^3\cdot x^2}$$

$$=\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)}}{\cancel{x^5+x+1}}=x-1$$

Observación

$$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)=x^5-\cancel{x^4}+\underline{x^2}+\cancel{x^4}-\underline{x^3}+x+\underline{x^3}-\underline{x^2}+1$$

$$=x^5+x+1$$

Luego, lo pedido es $x-1=\sqrt[3]{a}-1$.

PROBLEMA N.° 22

Despeje x de las igualdades.

a. $t=\sqrt{\dfrac{k^2+n^2+m^2x}{a+x}}$

b. $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$

Resolución

a. Elevamos al cuadrado

$$t^2=\frac{k^2+n^2+m^2x}{a+x}$$

Entonces

$$at^2+\underline{x\cdot t^2}=k^2+n^2+\underline{m^2x}$$

$$\rightarrow\ x(t^2-m^2)=k^2+n^2-at^2$$

$$\therefore\ x=\frac{k^2+n^2-at^2}{t^2-m^2}$$

b. Transponemos los términos

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\sqrt{3}+\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}^2+1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow\ \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot4}=\left(\frac{3}{4}\right)^x$$

> **Recuerda**
>
> $$\frac{3}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x}$$

$$\rightarrow\ 3=2x$$

De bases iguales, exponentes iguales

$$\therefore\ x=\frac{3}{2}$$

PROBLEMA N.° 23

Despeje x de las igualdades.

a. $W=\dfrac{60vd}{60d+v(t-x)}$

b. $\dfrac{n}{m}[a(m-x)+bx]=b(n-x)+ax$

Resolución

a. De la igualdad

$$60Wd+Wv(t-x)=60vd$$

$$60Wd+Wvt-Wvx=60vd$$

$$60Wd+Wvt-60vd=Wvx$$

$$\therefore\ x=\frac{60Wd+Wvt-60vd}{Wv}$$

Entonces

$$\frac{V^2T^2+2VT\cdot\pi R}{\pi^2R^2}=\frac{47}{x}$$

Finalmente, despejando x

$$x=\frac{47\pi^2R^2}{V^2T^2+2VT\pi R}$$

PROBLEMA N.° 25

Despeje x de las igualdades.

a. $v=\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{r-x}{p-x}}}$

b. $\sqrt{\dfrac{x^2-4h^2}{x^2-4b^2}}=\dfrac{h}{b}$

Resolución

a. Elevamos al cuadrado y multiplicamos en aspa

$$v^2=\frac{a^2}{\dfrac{r-x}{p-x}} \rightarrow \frac{r-x}{p-x}=\frac{a^2}{v^2}$$

$$\rightarrow rv^2-xv^2=pa^2-xa^2$$

Agrupamos los términos dependientes de x

$$a^2x-v^2x=pa^2-rv^2$$

$$x(a^2-v^2)=pa^2-rv^2$$

$$\therefore\ x=\frac{pa^2-rv^2}{a^2-v^2}$$

b. Elevamos al cuadrado y multiplicamos en aspa

$$\frac{x^2-4h^2}{x^2-4b^2}=\frac{h^2}{b^2} \rightarrow x^2b^2-\cancel{4b^2h^2}$$

$$=x^2h^2-\cancel{4b^2h^2}$$

$$\rightarrow x^2b^2-x^2h^2=0 \rightarrow x^2(b^2-h^2)=0$$

Como $h\neq b \rightarrow h^2\neq b^2 \rightarrow b^2-h^2\neq 0$

Se concluye $x^2=0$

$\therefore\ x=0$

PROBLEMA N.° 26

Despeje x de las igualdades.

a. $\dfrac{3x+5y-z}{3x+5y+z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

b. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-b}$

Resolución

a. De la igualdad

$$\frac{3x+5y-z}{3x+5y+z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$6(3x+5y-z)=3x+5y+z$$

$$18x+30y-6z=3x+5y+z$$

Transponemos los términos y simplificamos

$$\rightarrow 15x=-25y+7z$$

$$\therefore\ x=\frac{7z-25y}{15}$$

PROBLEMA N.° 28

Despeje x de las igualdades.

a. $\sqrt[3]{a}x+\sqrt[3]{b}x=(a+b)(a-b)$

b. $(3x^4+a)^2-(3x^4-a)^2=48a^5b^4$;

$x;\ a;\ b\in\mathbb{R}^+$

Resolución

a. Factorizamos x, además

$$a+b=\sqrt[3]{a}^3+\sqrt[3]{b}^3$$

$$x\cancel{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}=\cancel{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(a-b)$$

$$\therefore\ x=(a-b)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Recuerda

$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$

b. $\underbrace{(3x^4+a)^2-(3x^4-a)^2}_{\text{Identidad de Legendre}}=48a^5b^4$

$$\rightarrow\ \cancel{4}\cdot 3x^4\cdot\cancel{a}=\cancel{48}a^{\cancel{5}}b^4$$

$$\rightarrow\ x^4=4a^4b^4$$

$$\therefore\ x=\sqrt{2}ab$$

Observación

$(m+n)^2-(m-n)^2=4mn$

PROBLEMA N.° 29

Despeje x en cada una de las igualdades.

a. $(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-$

$-(x^2-x-13)^2+2x=50$

b. $x^2+2y^2+2z^2=2xy+2xz;\ \{x;\ y;\ z\}\subset\mathbb{R}$

Resolución

a. Multiplicamos adecuadamente

$$(x-3)(x+2)(x-5)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$$

$$(x^2-x-6)(x^2-x-20)-(x^2-x-13)^2+2x=50$$

Hagamos un cambio de variable

$$x^2-x=t$$

$$(t-6)(t-20)-(t-13)^2+2x=50$$

$$\cancel{t^2}-26t+120-\cancel{t^2}+26t-169+2x=50$$

$$2x-49=50$$

$$\therefore\ x=\frac{99}{2}$$

b. Por propiedad

Si $a^2+b^2+c^2=0/a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$
$\rightarrow\ a=b=c=0$

Multiplicamos por 2

$$2x^2+4y^2+4z^2-4xy-4xz=0$$

CAPÍTULO 2

LEYES DE EXPONENTES

Test

PROBLEMA N.° 1

¿Cuál es el equivalente reducido de $\dfrac{15^2\cdot 81^3}{9\cdot 27^4}$?

A) 9 B) 25 C) 27
D) 15 E) 75

Resolución

Llevamos la fracción a base común y simplificamos

$$\frac{15^2\cdot 81^3}{9\cdot 27^4}=\frac{\cancel{3^2}\cdot 5^2\cdot (\cancel{3^4})^{\cancel{3}}}{\cancel{3^2}\cdot (\cancel{3^3})^{\cancel{4}}}$$

Luego
$=5^2=25$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Indique el equivalente reducido de

$$\frac{\overbrace{5\cdot 5\ldots 5}^{10\text{ factores}}}{\underbrace{5+5+\ldots+5}_{5^7\text{ sumandos}}}.$$

A) 25 B) 50 C) 15
D) 3 E) 5

Resolución

Simplificamos

$$\frac{\overbrace{5\cdot 5\ldots 5}^{10\text{ factores}}}{\underbrace{5+5+\ldots+5}_{5^7\text{ sumandos}}}$$

Recuerda

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ veces}}=a^n$$

$$\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{m\text{ veces}}=b^m$$

Luego se tiene

$$=\frac{5^{10}}{5\cdot 5^7}=\frac{5^{10}}{5^8}=5^2=25$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Calcule la suma de las cifras del resultado de efectuar

$$36^4\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^4-33^2\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^2.$$

A) 8 B) 6 C) 9
D) 4 E) 5

PROBLEMA N.° 7

¿Cuál es el valor de x que verifica la igualdad

$2^{\frac{x^2+1}{72}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$?

A) ±4 B) -2 C) 4

D) -4 E) ±2

Resolución

Usamos las propiedades de radicación

$$2^{\frac{x^2+1}{72}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$$

$$=\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[9]{2}=2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow 2^{\frac{x^2+1}{72}}=2^{\frac{17}{72}}$$

$$\rightarrow \frac{x^2+1}{72}=\frac{17}{72} \rightarrow x^2=16$$

$$\rightarrow x=4 \vee x=-4$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Halle el valor simplificado de

$$\sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left[3-\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\right]^{-1}}.$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Simplificamos

$$\sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left[3-\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\right]^{-1}}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{25}+\frac{4}{25}\right)^{-1}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^{-1}}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{25}}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

$$=\sqrt[3]{5+3}=\sqrt[3]{8}=2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

La siguiente expresión

$\dfrac{\sqrt{27\sqrt[4]{9\sqrt[3]{81}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{3^{-5}}}}}$ es equivalente a

A) 1 B) 3 C) $\sqrt{3}$

D) 9 E) $\sqrt[3]{9}$

Resolución

Simplificamos $\dfrac{\sqrt{27\sqrt[4]{9\cdot\sqrt[3]{81}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[\cancel{10}\,2]{3^{-5}}}}}$

Recuerda

$$\sqrt[n]{x^a\sqrt[m]{x^b}}=\sqrt[n\cdot m]{x^{am+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{3^3\cdot\sqrt[4]{3^2\cdot\sqrt[3]{3^4}}}}{\sqrt[12]{3^{-1}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{(3\cdot4+2)\cdot3+4}}}{\sqrt[12]{3^{-1}}}$$

$$=\frac{\sqrt[24]{3^{46}}}{\sqrt[24]{3^{-2}}}=\sqrt[\cancel{24}]{3^{\cancel{48}}}=3^2=9$$

Clave **D**

Problemas resueltos

NIVEL I

PROBLEMA N.° 1

Reduzca la expresión

$$\frac{2^{n+4}}{2^{n+3}}+\frac{5^{n+3}}{5^{n+1}}-\frac{3^{2-x}}{3^{1-x}}.$$

A) 21
B) 4
C) 24
D) 10
E) 30

Resolución

Sea

$$M=\frac{2^{n+4}}{2^{n+3}}+\frac{5^{n+3}}{5^{n+1}}-\frac{3^{2-x}}{3^{1-x}}$$

Simplificamos

$$M=\frac{\cancel{2^{n}}\cdot 2^{4}}{\cancel{2^{n}}\cdot 2^{3}}+\frac{\cancel{5^{n}}\cdot 5^{3}}{\cancel{5^{n}}\cdot 5^{1}}-\frac{3^{2}\cdot \cancel{3^{-x}}}{3^{1}\cdot \cancel{3^{-x}}}$$

$$M=2^{4-3}+5^{3-1}-3^{2-1}$$

Entonces

$$M=2+5^{2}-3$$

$\therefore\ M=24$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

Indique cuál es el equivalente reducido de

$$\frac{\overbrace{3^4+3^4+3^4+\ldots+3^4}^{3^2\text{ veces}}}{\underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{3^2\text{ veces}}}.$$

A) 9 B) 27 C) 6
D) 3 E) 5

Resolución

Observación

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ veces}}=na$$

Sea $S=\dfrac{\overbrace{3^4+3^4+3^4+\ldots+3^4}^{3^2\text{ veces}}}{\underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{3^2\text{ veces}}}$

Como $\overbrace{3^4+3^4+3^4+\ldots+3^4}^{3^2\text{ veces}}=3^4\times 3^2$

y $\underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{3^2\text{ veces}}=3\times 3^2$

entonces

$$S=\frac{3^4\times\cancel{3^2}}{3\times\cancel{3^2}}\ \rightarrow\ S=\frac{3^4}{3}$$

$\therefore\ S=3^3=27$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Calcule el valor de E.

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$$

A) 1/2 B) 2 C) 1
D) 4 E) 3/4

Resolución

Sea

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$$

Entonces

$$E=\sqrt{\frac{3}{12}}+\sqrt[5]{\frac{2}{64}}$$

Recuerda

$$\frac{\sqrt[m]{y}}{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[m]{\frac{x}{y}}$$

$$E=\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

$$\rightarrow\ E=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \rightarrow\ E=1$$

Clave C

PROBLEMA N.° 7

Indique cuál es el exponente de x^2 luego de reducir la expresión

$$\frac{x\left[x^3(x^2)^{-2}\right]^{-1}}{(2x^2)^3\cdot x^{-2}};\ x\neq 0$$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 3

Resolución

Reducimos la expresión

$$\frac{x\left[x^3\cdot x^{-4}\right]^{-1}}{2^3\cdot x^6\cdot x^{-2}}$$

$$=\frac{x\cdot x^{-3}\cdot \cancel{x^4}}{8\cdot \cancel{x^4}}=\frac{x^{-2}}{8}$$

Entonces

$$=\frac{1}{8}(x^2)^{-1}$$

Por lo tanto, el exponente de x^2 es −1.

Clave B

PROBLEMA N.° 8

Si $2^x=3$, calcule el valor de M.

$$M=\frac{2^{x+3}+4^{x+1}}{8^x+3}$$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 2 E) 10

Resolución

Sea

$$M=\frac{2^{x+3}+4^{x+1}}{8^x+3}$$

$$M=\frac{2^x\cdot 2^3+4^x\cdot 4}{(2^3)^x+3}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{2^x\cdot 8+(2^x)^2\cdot 4}{(2^x)^3+3}$$

Luego

$$x^{\frac{\cancel{50}}{\cancel{64}}}=x^{\frac{a}{b}} \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\overset{25}{\cancel{50}}}{\underset{32}{\cancel{64}}}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{25}{32}$$

Como 25 y 32 son PESI, entonces $a=25$ y $b=32$; por lo tanto, $b-a=7$.

Clave **B**

$$=\sqrt[3]{\frac{4^3\times\cancel{(4\times 36)}\times 10^{-16}}{\cancel{144}\times 10^8}}$$

$$=\sqrt[3]{4^3\times 10^{-24}}=4\times 10^{-8}\leftarrow m$$

Luego

$m=-8$

$\therefore \quad m^2+1=65$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 11

Si al reducir la expresión

$$\sqrt[3]{\frac{(0{,}004)^4\cdot(0{,}0036)}{(120\,000)^2}}$$

se obtuvo como resultado $4\cdot 10^m$, ¿cuál es el valor de m^2+1?

A) 65 B) 17 C) 37

D) 26 E) $\frac{34}{9}$

Resolución

Tenemos

$$\sqrt[3]{\frac{(0{,}004)^4\cdot(0{,}0036)}{(120\,000)^2}}$$

Usando equivalentes

$$=\sqrt[3]{\frac{(4\times 10^{-3})^4\cdot(36\times 10^{-4})}{(12\times 10^4)^2}}$$

Entonces

$$=\sqrt[3]{\frac{4^4\times 10^{-12}\times 36\times 10^{-4}}{(12)^2\times 10^8}}$$

PROBLEMA N.° 12

Calcule el equivalente reducido de

$$\left(\frac{\sqrt[n]{x\sqrt[n+1]{x^n}}}{\sqrt[n+1]{x\sqrt[n]{x^{n+1}}}}\right)^{n^3}.$$

A) x B) x^n C) x^{n^3}

D) 1 E) x^{n^2}

Resolución

Simplifiquemos el numerador y el denominador

- Numerador

$$\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n+1]{x^n}}=\sqrt[n(n+1)]{x^{n+1}\cdot x^n};\ n\in\mathbb{Z}^+$$

- Denominador

$$\sqrt[n+1]{x\cdot\sqrt[n]{x^{n+1}}}=\sqrt[(n+1)n]{x^n\cdot x^{n+1}};\ n\in\mathbb{Z}^+$$

Se observa que tanto el numerador como el denominador son iguales; luego, la expresión dada es igual a $1^{n^3}=1$, pues $n\in\mathbb{Z}^+$.

Clave **D**

Resolución

Para que $\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^{y-3}=1$, debe cumplirse lo siguiente:

- El denominador $(x-4)$ no puede ser cero, entonces $x-4\neq 0 \rightarrow x\neq 4$.
- El numerador $(x-2)$ no puede ser cero, entonces $x-2\neq 0 \rightarrow x\neq 2$.
- El exponente $(y-3)$ debe ser cero, entonces $y-3=0 \rightarrow y=3$.

Luego, la suma de todos los valores que no puede tomar x es $4+2=6$.

Por lo tanto

$$\frac{\text{suma de no valores de } x}{\text{valor de } y}=\frac{6}{3}=2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Calcule el valor simplificado de E.

$$E=\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$
D) 1 E) 2^2

Resolución

Tenemos

$$\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{2}}$$

Recuerda

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{k}}$$

Luego

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

Efectúe y simplifique.

$$(5^6)^{6^{-1}}+\left(6^{7^4}\right)^{7^{-4}}+5^7+(-5)^7+3^{4^{5^{0^6}}}$$

A) 10 B) 15 C) 28
D) 92 E) 115

Resolución

La expresión dada es equivalente a

$$5^{6\cdot 6^{-1}}+6^{7^4\cdot 7^{-4}}+\cancel{5^7}-\cancel{5^7}+3^{4^{5^0}}$$

$$=5^{6^0}+6^{7^0}+3^{4^1}$$

$$=5^1+6^1+3^4$$

$$=5+6+81$$

$$=92$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

Definimos el operador (*) como sigue: $a*b=b^{a-1}$. Indique el equivalente reducido de

$$\frac{(a+1)*(ab+a)}{(a+1)*(b+1)}.$$

A) a B) b C) a^b
D) b^a E) a^a

NIVEL II

PROBLEMA N.° 21

Si $a^{2a^6}=3$; $a>0$, calcule el valor de $\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$
C) 1
D) 3 E) $\sqrt[3]{3}$

Resolución

De $\left(a^{2a^6}\right)^3=3^3$ obtenemos

$$a^{6a^6}=3^3 \;\rightarrow\; \left(a^6\right)^{a^6}=3^3$$

$$\rightarrow\; a^6=3 \;\rightarrow\; a^3=\sqrt{3}$$

Luego

$$\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}=\left(a^{a^3}\right)^{\sqrt{3}}=\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=a^3=\sqrt{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Sea n un número impar tal que

$A=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\ldots\cdot\sqrt[3]{4}}}}$; de n radicales

$B=\sqrt[3]{16\div\sqrt[3]{16\div\sqrt[3]{16+\ldots+\sqrt[3]{16}}}}$, de n radicales

calcule $A\cdot B$.

A) 4 B) 2
C) 1
D) 1/2 E) 1/4

Resolución

Sean

$$A=\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{4\cdot\ldots\cdot\sqrt[3]{4}}}}\cdot\frac{\sqrt[3^n]{2}}{\sqrt[3^n]{2}}$$

$$\rightarrow\; A=\frac{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{4\cdot\ldots\cdot\sqrt[3]{4\cdot 2}}}}}{\sqrt[3^n]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3^n]{2}}$$

$$B=\sqrt[3]{16+\sqrt[3]{16+\sqrt[3]{16+\ldots+\sqrt[3]{8\cdot 2}}}}$$

$$B=\sqrt[3]{16\div\sqrt[3]{16\div\sqrt[3]{16+\ldots+\left(\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}\right)}}}$$

$$\rightarrow\; B=\sqrt[3]{16+\left(2+\sqrt[3^{n-1}]{2}\right)}=\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[3^{n-1}]{2}}=2\sqrt[3^n]{2}$$

Luego

$$AB=\frac{2}{\cancel{\sqrt[3^n]{2}}}\cdot 2\cancel{\sqrt[3^n]{2}}=4$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Indique qué número se obtiene luego de efectuar

$$\left[(256)^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}(1-\sqrt{8})}}\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{\frac{1}{2}}}}.$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{8}$
D) 2 E) 4

Resolución

Simplificamos cada miembro de la ecuación

- $x^{x^{\sqrt[4]{x}+0,25}} = x^{x^{\sqrt[4]{x}+\frac{1}{4}}} = x^{x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\sqrt[4]{x}}} = x^{\sqrt[4]{x}\cdot x^{\sqrt[4]{x}}}$

$$\rightarrow \quad x^{x^{\sqrt[4]{x}+0,25}} = \left(x^{\sqrt[4]{x}}\right)^{x^{\sqrt[4]{x}}}$$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{1-\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}^{1}}{\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}$$

Luego

$$x^{x^{\sqrt[4]{x}+0,25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{1-2\sqrt{2}}}$$

$$\left(x^{\sqrt[4]{x}}\right)^{x^{\sqrt[4]{x}}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}$$

$$x^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

$$x^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{\frac{2}{4}}}$$

$$x^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 4x = 1$$

$$\therefore \quad \sqrt[4x+3]{x^8} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^8} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Calcule la suma de los exponentes de x e y luego de reducir la expresión

$$\left[\sqrt[\frac{x-y}{2}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{(xy)^x}}}\right]^{-x} \cdot \left\{\sqrt[\frac{y-1}{4}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{xy}}}\right\}^{y} \cdot \sqrt[y]{xy}^{-2x},$$

en la que $x-y=2k \;\wedge\; y-1=4r$, con $\{k; r\} \subset \mathbb{N}$.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

Resolución

Sean

$$A = \left[\sqrt[\frac{x-y}{2}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{(xy)^x}}}\right]^{-x} \rightarrow A = \left[\sqrt[\frac{x-y}{2}]{\frac{\sqrt[y]{(xy)^x}}{\sqrt[y]{(xy)^y}}}\right]^{x}$$

$$A = \sqrt[x-y]{\sqrt[y]{(xy)^{x-y}}}^{\,2x} = \sqrt[y]{xy}^{2x}$$

$$B = \left\{\sqrt[\frac{y-1}{4}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{xy}}}\right\}^{y} \quad \rightarrow \quad B = \left\{\sqrt[y-1]{\frac{\sqrt[y]{xy}^{y}}{\sqrt[y]{xy}}}\right\}^{4y}$$

$$B = \sqrt[y-1]{\sqrt[y]{(xy)^{y-1}}}^{\,4y} = \sqrt[y]{xy}^{4y} = (xy)^4$$

$$C = \sqrt[y]{xy}^{-2x}$$

Luego

$$ABC = \sqrt[y]{xy}^{2x} \cdot (xy)^4 \cdot \sqrt[y]{xy}^{-2x}$$

$$ABC = \sqrt[y]{xy}^{2x-2x} \cdot x^4y^4 = \sqrt[y]{xy}^{0} \cdot x^4y^4$$

Resolución

Sea

$$M=\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x^4\cdot\sqrt[9]{x^{24}\cdot\sqrt[17]{x^{240}\ldots}}}}\ n \text{ radicales}$$

$$M=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3\cdot5}}\cdot x^{\frac{24}{3\cdot5\cdot9}}\cdot x^{\frac{240}{3\cdot5\cdot9\cdot17}}\ldots n \text{ factores}$$

$$M=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3\cdot5}}\cdot x^{\frac{8}{5\cdot9}}\cdot x^{\frac{16}{9\cdot17}}\ldots n \text{ factores}$$

Llamamos S al exponente de x.

Entonces $M=x^S$

con $S=\frac{1}{3}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{8}{5\cdot9}+\frac{16}{9\cdot17}+\ldots n$ sumandos

$$\rightarrow\ S=\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{8}{5\cdot9}+\frac{16}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^n}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}$$

$$S=2\left[\frac{1}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{8}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}\right]$$

Recuerda

$$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-k}$$

$$S=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right]$$

$$S=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}\right]=2\left[\frac{2^n+1-2}{2(2^n+1)}\right]$$

$$S=\frac{2^n-1}{2^n+1}$$

Por lo tanto, el exponente final de x es $\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

De la igualdad $x^{(x-1)^2}=2x+1$, calcule el valor de $x-\frac{1}{x}$.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 10

Resolución

En la igualdad

$x^{x^2-2x+1}=2x+1$, multiplicamos por x^{2x+1}

$$\rightarrow\ x^{x^2-2x+1}\cdot x^{2x+1}=(2x+1)\cdot x^{2x+1}$$

$$x^{x^2+2}=(2x+1)x^{(2x+1)}$$

$$\rightarrow\ x^2\cdot(x)^{x^2}=(2x+1)x^{(2x+1)}$$

Por comparación

$$x^2=2x+1\ \rightarrow\ x^2-1=2x$$

Dividimos por x

$$x-\frac{1}{x}=2.$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 30

Calcule aproximadamente A.

$$A=\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4\ldots}}}}$$

A) 2 B) $2\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 16 E) $\sqrt[4]{2^5}$

Luego

$$M=\frac{\sqrt[5]{5}^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{5}^{\frac{3\cdot3\cdot5}{5}}}{125}$$

$$M=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}^{9}}{125}=\frac{\sqrt{5}^{10}}{5^3}$$

$$\therefore\ M=\frac{5^5}{5^3}=5^2=25$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. $(-4)^{\frac{2}{4}}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$

II. $\sqrt{a^n}=\sqrt{a}^{\,n}\ \leftrightarrow\ a>0\vee(a=0\wedge n>0)$

III. $\left[\left(\frac{x-1}{4}\right)^{-1}\right]^{0}=1;\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

A) FVF
B) FVV
C) FFF
D) VFF
E) VVF

Resolución

Analicemos cada una de las proposiciones

I. **Falsa**

Pues $(-4)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{-4}^{\,2}$ no existe en $\mathbb{R}$.

II. **Verdadera**

Pues $\sqrt{a^n}=\sqrt{a}^{\,n}$ se cumple si

- $a>0$ y $n\in\mathbb{Z}$.
- $a=0$ y $n>0$.

III. **Falsa**

Pues si $x=1$, entonces $\left[\left(\frac{x-1}{4}\right)^{-1}\right]^{0}$ no existe en $\mathbb{R}$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Con respecto a la expresión

$$M=\frac{\left(\sqrt[x]{1\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\cdot\ldots\cdot x^x}\right)^2}{\underbrace{x^x+x^x+x^x+\ldots+x^x}_{x\text{ sumandos}}}$$

establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. Se reduce a 1 si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.
II. Se reduce a x si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.
III. Se reduce a x^{x+1} si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.

A) VFF
B) FVV
C) FFV
D) FVF
E) FFF

Resolución

Simplificamos la expresión

$$M=\frac{\sqrt[x]{x^{1+2+3+\ldots+x}}^{\,2}}{x\cdot x^x};\ x\in\mathbb{N}\ \wedge\ x\geq 2$$

Como

$$\forall\, x\in\mathbb{N}:1+2+3+\ldots+x=\frac{x(x+1)}{2}$$

Entonces

$$x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}$$

$$x=\left(\frac{1}{16}\right)^2=\left(4^{-2}\right)^2 \;\rightarrow\; x=4^{-4}$$

Luego $4^n=4^{-4} \;\rightarrow\; n=-4$

Clave A

PROBLEMA N.° 37

Si se sabe que $a^b=\left(\frac{1}{b}\right)^a=2$,

calcule el valor de

$$\left(\frac{a^{b^{1-a}}+b^{a^{1-b}}}{a^{b^{1+a}}+b^{a^{1+b}}}\right)^{1+a^b\cdot b^a}.$$

A) 2 B) 1/2
C) 4
D) 1/4 E) 8

Resolución

De la condición dada: $a^b=2 \;\wedge\; b^a=\frac{1}{2}$

entonces $a^{-b}=\frac{1}{2}$; $b^{-a}=2$; $a^b\cdot b^a=1$

Efectuamos

$$M=\left(\frac{a^{b^{1-a}}+b^{a^{1-b}}}{a^{b^{1+a}}+b^{a^{1+b}}}\right)^{1+a^b\cdot b^a}$$

$$M=\left(\frac{a^{b\cdot b^{-a}}+b^{a\cdot a^{-b}}}{a^{b\cdot b^a}+b^{a\cdot a^b}}\right)^2$$

Luego

$$M=\left(\frac{\left(a^b\right)^{b^{-a}}+\left(b^a\right)^{a^{-b}}}{\left(a^b\right)^{b^a}+\left(b^a\right)^{a^b}}\right)^2$$

$$M=\left(\frac{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=\left(\frac{4+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$M=\left(\frac{\frac{4\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}+1}{4}}\right)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \;\rightarrow\; M=\frac{16}{2}=8$$

Clave E

PROBLEMA N.° 38

Si $x^{\sqrt{x}}$ es equivalente a 4, calcule el valor de

$$\left[x^{\left(\frac{1}{2^{10}}\right)}\cdot x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}\right]^{\sqrt{x}}.$$

A) 3 B) 4 C) 2
D) $\sqrt[4]{2}$ E) $4^{\frac{1}{4}}$

Resolución

> **Recuerda**
>
> Por fórmula $x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}=x^{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\sqrt{x}}}$

Así $x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}=x^{\sqrt{x}\cdot x^{\sqrt{x}}}$

$$x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}=\left(x^{\sqrt{x}}\right)^{x^{\sqrt{x}}}=4^4$$

Resolución

Los términos de la sucesión son

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \rightarrow x_2 = \sqrt{2x_1}$$

$$x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \rightarrow x_3 = \sqrt{2x_2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$$

Entonces $x_{n+1}^2 = 2x_n \rightarrow \dfrac{x_{n+1}^2}{x_n} = 2$

Luego

$$\frac{x_4^2 \cdot x_{11}^2}{x_3 \cdot x_{10}} = \frac{x_4^2}{x_3} \cdot \frac{x_{11}^2}{x_{10}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 41

Se tiene la siguiente ecuación.

$$\sqrt{x^{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{a^{\sqrt{a}+1}}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las expresiones quedan bien definidas si $x \in \mathbb{R}$.
II. La igualdad se verifica si y solo si $a \in \mathbb{R}^+$; $x=a$.
III. Si x existe, entonces a existe.

A) FVV B) VFF
C) VVF
D) FFV E) FFF

Resolución

Veamos el valor de verdad de las proposiciones.

I. **Falsa**
Pues si $x \in \mathbb{R}^-$ (x negativo), $\sqrt{x}$ no existe en $\mathbb{R}$.

II. **Verdadera**
Si resolvemos la ecuación tenemos

$$\sqrt{x}^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{a}^{\sqrt{a}+1}; \; a \in \mathbb{R}^+$$

$$\leftrightarrow \; x > 0 \wedge \sqrt{x}^{\sqrt{x}+1} = \sqrt{a}^{\sqrt{a}+1}$$

$$\leftrightarrow \; x > 0 \wedge x=a$$

Luego $a \in \mathbb{R}^+ \; \wedge \; x=a$

III. **Verdadera**
Como $x=a$, la única forma de que x exista es que a exista.

Por lo tanto, el valor de verdad de las proposiciones es FVV.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 42

Reduzca la expresión $\dfrac{(x^5)^{x^{-x}} + x^{x+x^x}}{x(x^{x+4}+1)}$

si $x^x=5$.

A) 1 B) x
C) $x+1$
D) x^2 E) x^5

PROBLEMA N.° 44

Determine el valor de M.

$$M=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{5}{6}}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3/5
D) 4/3 E) 2/3

Resolución

Recuerda

Por fórmula

$$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt[3]{x\sqrt[4]{y}}=\sqrt[3]{ax\sqrt[4]{by}}$$

Luego

$$M=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}\sqrt[5]{\frac{\cancel{5}}{6}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{\frac{4}{6}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}$$

$\therefore\ M=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Calcule el valor de $a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^{a}-1}\right)}$, si $a^{-a}=\dfrac{1}{3}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

Resolución

De $a^{-a}=\dfrac{1}{3}$, obtenemos $a^{a}=3$

Luego

$$a^{\frac{a^{a+1}}{a^{a}-1}}=a^{\frac{a^{a}\cdot a}{3-1}}=a^{\frac{3a}{2}}=(a^{a})^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ a^{\frac{a^{a+1}}{a^{a}-1}}=\sqrt{3}^{3}=3\sqrt{3}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 46

Analice las proposiciones siguientes:

I. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{16}=4\ \wedge\ \sqrt[3]{8}=-2$.

II. $\sqrt{(-3)^2}=3\ \vee\ \sqrt{(-7)^2}=7$.

III. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{(-1)(-2)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-2}$.

Determine su valor de verdad.

A) FVF B) FFF
C) VVV
D) VVF E) FFV

Resolución

I. **Falsa**

Pues $\left(\sqrt{16}=4\ \wedge\ \sqrt[3]{8}=-2\right)\leftrightarrow(\mathrm{V}\ \wedge\ \mathrm{F})\equiv\mathrm{F}$

II. **Verdadera**

Pues $\left(\sqrt{(-3)^2}=3\ \vee\ \sqrt{(-7)^2}=7\right)$

$\leftrightarrow\ (\mathrm{V}\ \vee\ \mathrm{V})\equiv\mathrm{V}$

Resolución

Sea

$$M=\frac{2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}}{2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}}\cdot\frac{2^5}{2^5}$$

Efectuando solo en el denominador

$$M=\frac{2^{x+1}\cancel{+2^{x+2}+2^{x+3}}+2^{x+4}}{2^{x+4}\cancel{+2^{x+3}+2^{x+2}}+2^{x+1}}\cdot(2^5)$$

$\therefore\ M=32$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 50

Luego de reducir la expresión

$$M=\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}}}$$ indique el exponente de a.

A) $\frac{72}{13}$

B) $\frac{19}{72}$

C) $\frac{13}{36}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{13}{72}$

Resolución

Aplicamos la regla del "Por más"

- $\sqrt[3]{a^1\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^1\sqrt[4]{a^3}}}}={}^{3\cdot4\cdot3\cdot4}\sqrt{a^{91}}$

- $\sqrt[4]{a^1\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^1\sqrt[3]{a^2}}}}={}^{4\cdot3\cdot4\cdot3}\sqrt{a^{65}}$

Luego

$$M=\frac{{}^{3\cdot4\cdot3\cdot4}\sqrt{a^{91}}}{{}^{4\cdot3\cdot4\cdot3}\sqrt{a^{65}}}={}^{3\cdot4\cdot3\cdot4}\sqrt{a^{91-65}}$$

$$\rightarrow\ M={}^{3\cdot4\cdot3\cdot4}\sqrt{a^{26}}={}^{3\cdot4\cdot3\cdot2}\sqrt{a^{13}}=a^{\frac{13}{72}}$$

Por lo tanto, el exponente de a es $\frac{13}{72}$.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 51

Si $x^x=2$, calcule el valor de $x^{x^{1+2x^{1+x}}}$.

A) 2^{16}

B) 2^{64}

C) 2^{32}

D) 2^4

E) 2^{18}

Resolución

Recuerda

Por fórmula y el dato, $x^x=2$

$x^{1+x}=x\cdot x^x\ \rightarrow\ x^{1+x}=2x$

Luego

$$x^{x^{1+2x^{1+x}}}=x^{x^{1+2(2x)}}=x^{x^{1+4x}}=x^{x\cdot x^{4x}}$$

$$x^{x^{1+2x^{1+x}}}=x^{x\cdot(x^x)^4}=(x^x)^{(x^x)^4}$$

$$\therefore\ x^{x^{1+2x^{1+x}}}=2^{2^4}=2^{16}$$

Clave **A**

Entonces

$$S=\left(\sqrt[n-1]{\frac{x^n\cdot y^{n+1}}{\sqrt[n]{xy^{n+1}}}}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$S=\left(\frac{x^n\cdot y^{n+1}}{\sqrt[n]{xy^{n+1}}}\right)^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n-1}}$$

$$S=\left(\frac{\sqrt[n]{x^n}^{\,n}}{\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{\sqrt[n]{y^{n+1}}^{\,n}}{\sqrt[n]{y^{n+1}}}\right)^{\frac{n}{n^2-1}}$$

Luego

$$S=\left(\sqrt[n]{x}^{\,n^2-1}\cdot\sqrt[n]{y^{n+1}}^{\,n-1}\right)^{\frac{n}{n^2-1}}$$

$$S=\left(\sqrt[\cancel{n}]{x}^{\,\cancel{n^2-1}}\right)^{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n^2-1}}}\cdot\left(\sqrt[\cancel{n}]{y}^{\,\cancel{n^2-1}}\right)^{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n^2-1}}}$$

$\therefore\ S=x\cdot y$

Clave C

PROBLEMA N.° 54

Simplifique la expresión E.

$$E=\frac{\sqrt[x]{2^x+3^{-x}}+\sqrt[x]{2^{-x}+3^x}}{\sqrt[x]{6^x+1}};\ \forall\, x\in\mathbb{N}-\{1\}$$

A) 5/6 B) 1/5

C) 2

D) 3 E) 5

Resolución

Veamos

$$E=\frac{\sqrt[x]{3^{-x}\left(\dfrac{2^x}{3^{-x}}+1\right)}+\sqrt[x]{2^{-x}\left(1+\dfrac{3^x}{2^{-x}}\right)}}{\sqrt[x]{6^x+1}}$$

Luego

$$E=\frac{\sqrt[x]{3^{-x}}\cdot\sqrt[x]{2^x\cdot3^x+1}+\sqrt[x]{2^{-x}}\cdot\sqrt[x]{1+3^x\cdot2^x}}{\sqrt[x]{6^x+1}}$$

$$E=\frac{3^{-1}\cdot\sqrt[x]{6^x+1}+2^{-1}\cdot\sqrt[x]{6^x+1}}{\sqrt[x]{6^x+1}}$$

$$\therefore\ E=\frac{\cancel{\sqrt[x]{6^x+1}}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)}{\cancel{\sqrt[x]{6^x+1}}}=\frac{5}{6}$$

Clave A

PROBLEMA N.° 55

Efectúe y simplifique

$$\frac{\left(a^{3^2}b^{3^3}\right)^{3^{-2}}+\left(a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{-1}\cdot b}.$$

A) 1 B) $\frac{a^2}{b}$

C) $\frac{a}{b}$

D) $\frac{1}{ab^2}$ E) $\frac{b}{a}$

PROBLEMA N.° 58

Si A y T son dos números tales que

$A=\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}$,

$T=\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\ldots}}}$,

calcule el valor aproximado de S.

$S=\sqrt[4]{T^4-T}$

A) 1 B) 2
C) 4
D) 6 E) 8

Resolución

De las condiciones dadas obtenemos:

- $A=\sqrt{20+A} \rightarrow A^2=20+A$

  $\rightarrow A^2-A=20$

  $\rightarrow A(A-1)=5\cdot 4 \rightarrow A=5$

- $T=\sqrt[4]{16+\sqrt[4]{16+\sqrt[4]{16+\ldots}}}$

  $\rightarrow T=\sqrt[4]{16+T}$

  $T^4=16+T \rightarrow T^4-T=16$

$\therefore \sqrt[4]{T^4-T}=\sqrt[4]{16}=2$

Clave B

PROBLEMA N.° 59

Calcule el exponente final de x.

$$S_{(x)}=\underbrace{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\ldots}}}}_{n \text{ radicales}}$$

A) $3^n-\dfrac{1}{2^n}$ B) $3^n-\dfrac{1}{3^n}$

C) $3^n-\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{3^n}{2^n}$ E) $\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n}$

Resolución

Tenemos

$$S=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3^2]{x}\cdot\sqrt[3^3]{x}\cdot\ldots\ n \text{ radicales}$$

$$S=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3^2}}\cdot x^{\frac{1}{3^3}}\cdot\ldots\ n \text{ potencias}$$

$$S=x^{\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ n \text{ sumandos}}$$

Sea E el exponente de x se tiene

$$E=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$E=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{E}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\Bigg]$$

$$E=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left[E-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$3E=1+E-\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 2E=1-\frac{1}{3^n}$$

Luego, el exponente de x es $E=\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n}$.

Clave E

CAPÍTULO 3

POLINOMIOS

Test

PROBLEMA N.° 1

¿Cuántas expresiones de las indicadas son racionales?

I. $T_{(x;\,y)}=5x^4+7y^{-1}$

II. $S_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{45}{xyz}\sqrt{2}$

III. $U_{(x;\,y;\,z)}=xy\sqrt{z^z}$

IV. $M_{(a;\,b)}=\dfrac{32\sqrt{5}}{\pi}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Una expresión algebraica es racional si todos los exponentes de las variables son enteros.

I. $T_{(x;\,y)}=5x^4+7y^{-1}$ es racional.

II. $S_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{45}{xyz}\sqrt{2}$ es racional

III. $U_{(x;\,y;\,z)}=xy\,z^{\frac{z}{2}}$ no es racional

IV. $M_{(a;\,b)}=\dfrac{32\sqrt{5}}{\pi}$ Es una expresión constante y cumple la definición de expresión algebraica racional.

Clave D

PROBLEMA N.° 2

¿Cuántas de las expresiones indicadas son términos algebraicos?

I. $S_{(x;\,y)}=32x+y\operatorname{sen}z$

II. $A_{(x;\,y)}=\dfrac{47}{xy}\sqrt{xy}$

III. $B_{(x;\,y)}=\dfrac{7x\sqrt{y}}{z+1}$

IV. $C_{(x;\,y;\,t)}=(z+3)xyt^3$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Una expresión algebraica es término algebraico si sus variables no están separadas por adición o sustracción.

En ese caso, las siguientes expresiones cumplen:

II. $A_{(x;\,y)}=\dfrac{47}{xy}\sqrt{xy}$

III. $B_{(x;\,y)}=\dfrac{7x\sqrt{y}}{z+1}$ (z no es variable)

IV. $C_{(x;\,y;\,t)}=(z+3)xyt^3$ (z no es variable)

Clave D

PROBLEMA N.° 7

Dado el polinomio
$P_{(3-x)}=x^3-5x+1+(x-2)^4$,
calcule la suma de coeficientes.

A) -2 B) 2 C) 1
D) -1 E) 0

Resolución

Nos piden la suma de coeficientes de

$$P_{(3-x)}=x^3-5x+1+(x-2)^4$$

Recuerda

La suma de coeficientes de P es $P_{(1)}$.

Entonces

$$3-x=1 \ \rightarrow \ x=2$$

Reemplazamos x

$$\rightarrow \ P_{(1)}=2^3-5\cdot 2+1+(2-2)^4$$
$$=8-10+1+0=-1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Si $T_{(x)}=\frac{1}{2}$; $x\neq 2$, halle $T_{(T_{(x-1)})}$.

A) $x-1$ B) $x+1$

C) $\dfrac{x-1}{x+1}$

D) $\dfrac{2x+1}{x-2}$ E) $\dfrac{x-2}{2x+1}$

Resolución

Dado $T_{(x)}=\dfrac{2x-1}{x-2}$ tenemos

I. $T_{(x-1)}=\dfrac{2(x-1)-1}{(x-1)-2}=\dfrac{2x-3}{x-3}$

II. $T_{(T_{(x-1)})}=T\left(\dfrac{2x-3}{x-3}\right)=\dfrac{2\left(\dfrac{2x-3}{x-3}\right)-1}{\dfrac{2x-3}{x-3}-2}$

$$\frac{\dfrac{4x-6-x+3}{\cancel{x-3}}}{\dfrac{\cancel{2x}-3-\cancel{2x}+6}{\cancel{x-3}}}=\frac{3x-3}{3}=x-1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

Si el polinomio
$P_{(x;\,y;\,z)}=3x^{a-5}+y^{b-1}+cz^{c^2}-7xy^2z$
es homogéneo, ¿cuál es el mínimo valor de $a+b+c$?

A) 15 B) 14 C) 13
D) 17 E) 12

Resolución

Dado el polinomio homogéneo

$$P_{(x;\,y;\,z)}=3x^{a-5}+y^{b-1}+cz^{c^2}-7xy^2z$$

se cumplirá

$$a-5=b-1=c^2=1+2+1=4$$

Entonces

$$a-5=4 \ \rightarrow \ a=9$$
$$b-1=4 \ \rightarrow \ b=5$$
$$c^2=4 \left\langle \begin{array}{l} c=2 \\ c=-2 \end{array} \right.$$

$\therefore \ (a+b+c)_{\text{mínimo}}=9+5-2=12$

Clave **E**

Problemas resueltos

Nivel I

PROBLEMA N.° 1

Sea el polinomio

$$P_{(x)}=\frac{3x+1}{2}.$$

Calcule $\frac{P_{(5)}+P_{(-1)}}{P_{(0)}}$.

A) $\frac{7}{2}$ B) 14

C) $\frac{13}{2}$

D) 16 E) 12

Resolución

Tenemos el polinomio

$$P_{(x)}=\frac{3x+1}{2}$$

Evaluamos en

$x=5$: $P_{(5)}=8$

$x=-1$: $P_{(-1)}=-1$

$x=0$: $P_{(0)}=1/2$

Luego

$$\frac{P_{(5)}+P_{(-1)}}{P_{(0)}}=\frac{8+(-1)}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{\frac{1}{2}}=14$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Sea $P_{(x;\,y)}=x^{2n-3}\cdot y^{2n+5}$,
donde el grado relativo respecto a x es 7. Calcule el grado absoluto de la expresión.

A) 22 B) 30

C) 35

D) 25 E) 28

Resolución

En el monomio

$$P_{(x;\,y)}=x^{2n-3}\cdot y^{2n+5}$$

el grado relativo con respecto a x es $2n-3$ y el grado absoluto es $2n-3+2n+5=4n+2$.

Luego, del dato

$2n-3=7$

$\rightarrow\ n=5$

$\therefore\ \mathrm{GA}\left(P_{(x;\,y)}\right)=4(5)+2=22$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Sea

$$P_{\left(\frac{x}{5}\right)}=x^{20}-125x^{17}+3x+2.$$

¿Cuál es el valor numérico de P en 1?

A) 17 B) 20

C) 30

D) 50 E) 80

PROBLEMA N.° 6

Si $M_{(x-1)}=x^3+x+1$, tal que
$M_{(k)}=k^3+2k^2+k-1+q_{(k)}$,
halle la expresión $q_{(k)}$.

A) k^2+3k+4 B) $3k-1$
C) k^2-3k+5
D) k^2+4k+3 E) k^2-4k+3

Resolución

Como

$M_{(x-1)}=x^3+x+1$ y
$M_{(k)}=k^3+2k^2+k-1+q_{(k)}$

resolvemos que

$x-1=k$
$\rightarrow x=k+1$

Luego

$$M_{(k)}=(k+1)^3+(k+1)+1$$
$$=k^3+3k^2+4k+3$$
$$=\left(k^3+2k^2+k-1\right)+\left(k^2+3k+4\right)$$

De donde concluimos que

$q_{(k)}=k^2+3k+4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Definimos la expresión

$$f_{(x)}=\begin{cases} x-1, & \text{si } x\geq 2 \\ x^2-1, & \text{si } x<2 \end{cases}$$

Calcule $af_{(3-a)}+f_{(2a)}$ con $a<0$.

A) $3a+2$ B) $3a^2+2a-1$
C) $3a+5$
D) $4a+2$ E) $3a$

Resolución

Se tiene

$$f_{(x)}=\begin{cases} x-1, & x\geq 2 \\ x^2-1, & x<2 \end{cases}$$

Como

$a<0 \rightarrow -a>0$
$\rightarrow 3-a>3$

Luego

$f_{(3-a)}=(3-a)-1=2-a$

$f_{(2a)}=(2a)^2-1=4a^2-1$; note que $2a<0$

$\therefore\ af_{(3-a)}+f_{(2a)}=a(2-a)+4a^2-1=3a^2+2a-1$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Si $P_{(x)}=ax+b$, además $P_{(3)}=2P_{(1)}=4$, ¿cuál es el término independiente de $Q_{(x)}$, si $Q_{(ax^2+b)}=x^4$?

A) 0 B) 1 C) -1
D) 3 E) 2

Resolución

De los datos:

$P_{(3)}=4$ y $2P_{(1)}=4$
$P_{(1)}=2$

PROBLEMA N.° 11

Dadas las expresiones

$P_{(x)}=x^3;\ Q_{(x)}=\sqrt[3]{x}$,

calcule el valor numérico de

$Q_{(P_{(3)})}+P_{(Q_{(8)})}$.

A) 7 B) 35
C) 18
D) 12 E) 11

Resolución

Tenemos

$$P_{(x)}=x^3 \ \text{ y } \ Q_{(x)}=\sqrt[3]{x}$$

Entonces

$$P_{(3)}=3^3=27 \ \wedge \ Q_{(8)}=\sqrt[3]{8}=2$$

Luego

$$Q_{(P_{(3)})}=Q_{(27)}=\sqrt[3]{27}=3$$

$$P_{(Q_{(8)})}=P_{(2)}=2^3=8$$

$$\therefore\ Q_{(P_{(3)})}+P_{(Q_{(8)})}=3+8=11$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Se tiene un polinomio $f_{(x)}$
tal que cumple las condiciones:

I. $f_{(1)}=1$

II. $f_{(x)}=f_{(x-1)}+x;\ \forall\, x\in\mathbb{Z}^+ \ \wedge \ x>1$

¿Cuál es el valor numérico del polinomio f en 9?

A) 40 B) 44
C) 45
D) 46 E) 47

Resolución

Dadas las condiciones

$$f_{(1)}=1 \ \text{ y } \ f_{(x)}=f_{(x-1)}+x;\ \forall\, x\in\mathbb{Z}^+ \ \wedge \ x>1$$

nos piden el valor de $f_{(9)}$, entonces

$$f_{(9)}=f_{(8)}+9$$

$$f_{(8)}=f_{(7)}+8$$

$$f_{(7)}=f_{(6)}+7$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f_{(2)}=f_{(1)}+2$$

Sumamos miembro a miembro

$$f_{(9)}+\cancel{f_{(8)}+f_{(7)}+\ldots+f_{(2)}}$$

$$=\cancel{f_{(8)}+f_{(7)}+\ldots+f_{(2)}}+f_{(1)}+(9+8+7+\ldots+2)$$

$$=1+2+\ldots+7+8+9$$

Por dato

$$f_{(1)}=1$$

entonces

$$f_{(9)}=\frac{9(10)}{2}=45$$

$$\therefore\ f_{(9)}=45$$

Clave **C**

Entonces

$a=6 \wedge d=3$

$c=5 \wedge b=4$

$\therefore\ a=6 \wedge b=4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

Dada la expresión algebraica

$f_{(x;\,y)}=\dfrac{x^2+y}{y}$,

determine el valor numérico de f cuando $x=2^{4^6}$; $y=4^{4^6}$.

A) 1 B) 2 C) 2^4

D) 2^{4^4} E) 2^{2^3}

Resolución

Tenemos

$$f_{(x;\,y)}=\frac{x^2+y}{y}$$

Evaluaremos

$$x=2^{4^6};\ y=4^{4^6}$$

Pero se observa que

$$x^2=(2^{4^6})^2=(2^2)^{4^6}=4^{4^6}=y$$

Entonces

$$f_{(2^{4^6};\,4^{4^6})}=\frac{4^{4^6}+4^{4^6}}{4^{4^6}}=\frac{2\cdot\cancel{4^{4^6}}}{\cancel{4^{4^6}}}=2$$

Por lo tanto, el valor numérico de f es igual a 2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

Si $P_{(x-1)}=2x^2-1$; $x\neq 2$,

halle el equivalente reducido de

$\dfrac{P_{(x-2)}-P_{(2-x)}}{2x-4}$.

A) $2x$ B) 0

C) x^2-1

D) 4 E) 1

Resolución

Sea

$$P_{(x-1)}=2x^2-1=2(x-1+1)^2-1$$

Entonces, haciendo $x-1<>x$ tenemos

$$P_{(x)}=2(x+1)^2-1$$

Luego

$$P_{(x-2)}=2(x-2+1)^2-1=2(x-1)^2-1$$
$$=2x^2-4x+1$$

$$P_{(2-x)}=2(2-x+1)^2-1=2(3-x)^2-1$$
$$=2x^2-12x+17$$

Entonces, del problema

$$\frac{P_{(x-2)}-P_{(2-x)}}{2x-4}=\frac{(2x^2-4x+1)-(2x^2-12x+17)}{2x-4}$$

$$=\frac{8x-16}{2x-4}=\frac{4(\cancel{2x-4})}{\cancel{2x-4}}=4$$

Por lo tanto, el resultado del equivalente reducido será 4.

Clave **D**

Nivel II

PROBLEMA N.° 21

Si $H_{(H(x))}=4x-3$; $H_{(x)}=ax+b$ y $a>0$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La suma de coeficientes de $H_{(2x-1)}$ es -1.

II. $H_{(5)}=17$.

III. El término independiente de $H_{(3x+1)}$ es -3.

A) VVV B) FFF C) VFF
D) FVF E) FVV

Resolución

En $H_{(x)}=ax+b$; $a>0$

$$x<>H_{(x)} \rightarrow H_{(H_{(x)})}=a\,H_{(x)}+b$$
$$=a(ax+b)+b$$
$$=a^2x+ab+b$$

Por dato

$$H_{(H_{(x)})}=4x+3$$

Luego

$\rightarrow a^2=4 \wedge ab+b=3$

$a=2$; pues $a>0 \rightarrow 3b=3$

$b=1$

Finalmente

$H_{(x)}=2x+1$, de donde

$H_{(1)}=3$; $H_{(5)}=11$; $H_{(0)}=1$

I. Falsa II. Falsa III. Falsa

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

Sean los polinomios
$P_{(x)}=2x^2-15 \wedge Q_{(x;y)}=2x+3y-2$.
Halle el término independiente del polinomio $H_{(t)}$, sabiendo que $H_{(t)}=Q_{(P_{(3)};\,3t-1)}$.

A) -5 B) -15 C) -2
D) 1 E) 7

Resolución

Tenemos

$P_{(x)}=2x^2-15$; $Q_{(x;y)}=2x+3y-2$

$H_{(t)}=Q_{(P_{(3)};\,3t-1)}$

Entonces

$x=3 \rightarrow P_{(3)}=2\cdot 3^2-15=3$

Como

$$H_{(t)}=Q_{(P_{(3)};3t-1)}=Q_{(3;3t-1)}=2(3)+3(3t-1)-2$$

Luego

$H_{(t)}=9t+1$

$\therefore H_{(0)}=1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 23

En el polinomio
$P_{(x-2)}=(x+2)^3-3(x-1)+mx+5$
se cumple que la sumatoria de coeficientes y el término independiente suman 200; según ello, establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones con respecto al polinomio $P_{(x)}$.

I. El término independiente del polinomio es 129.

II. La suma de sus coeficientes es 71.

III. $P_{(2)}=6^3+4$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) VFF E) FFV

Resolución

Como $P_{(x)}=(a^3-7)x^5+ax^2+a^2+1$ es mónico,

entonces $a^3-7=1 \rightarrow a^3=8$

$a=2$

Luego

$P_{(x)}=x^5+2x^2+5$

Por lo tanto, el término independiente es 5.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

En el polinomio $P_{(x)}=(1+2x)^n+(1+3x)^n$, la suma de coeficientes excede en 23 al término independiente.

Según ello, establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El polinomio $P_{(x)}$ es de grado 2.

II. La suma de sus coeficientes es 25.

III. El término cuadrático de $P_{(x)}$ es $12\,x^2$.

A) VVV B) VFV

C) VVF

D) FVV E) FFV

Resolución

Se tiene $P_{(x)}=(1+2x)^n+(1+3x)^n$.

Como la suma de coeficientes excede en 23 al témino independiente, entonces

$P_{(1)}=P_{(0)}+23$ (I)

Debemos recordar que el término independiente es $P_{(0)}$ y la suma de coeficientes es $P_{(1)}$.

Luego evaluamos

$P_{(1)}=3^n+4^n$

$P_{(0)}=1^n+1^n=2$

Reemplazamos en (I)

$3^n+4^n=2+23=25$

de donde $n=2$.

Luego

$P_{(x)}=(1+2x)^2+(1+3x)^2=13x^2+10x+2$

Entonces concluimos que el polinomio es de segundo grado, la suma de coeficientes es 25 y el término cuadrático es $13x^2$.

Por lo tanto, las dos primeras proposiciones son verdaderas y la última es falsa.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 27

Si la expresión algebraica

$$S_{(x)}=\frac{\left[\left(x^{n-2}\right)^3\cdot x^{2n-3}\right]^2\cdot x^4}{\left(\left(x^n\right)^2\cdot x^4\right)^2}$$

se reduce a un monomio de segundo grado, calcule el valor de n.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Reducimos la expresión

$$S_{(x)}=\frac{\left[\left(x^{n-2}\right)^3\cdot x^{2n-3}\right]^2\cdot x^4}{\left(\left(x^n\right)^2\cdot x^4\right)^2}=\frac{\left[x^{3n-6}\cdot x^{2n-3}\right]^2\cdot x^4}{\left(x^{2n+4}\right)^2}$$

Entonces concluimos que la suma de coeficientes del polinomio es 0, es de grado 7 y el valor de

$$\frac{m}{n^2+p^2}=\frac{4}{4^2+4^2}=\frac{1}{8}.$$

Por lo tanto, todas las proposiciones son verdaderas.

Clave A

PROBLEMA N.° 30

Dado el polinomio $P_{(x)}=x(ax^3+bx^2+cx+d)$, donde se verifica $P_{(x)}\equiv P_{(1-x)}$, calcule $2a+b$.

A) 3 B) 5 C) −4
D) 1 E) 0

Resolución

Se tiene

$$P_{(x)}=x\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$$

En $P_{(x)}\equiv P_{(1-x)}$

Evaluando en

$x=0$: $P_{(0)}=P_{(1)}$

$$0=a+b+c+d \qquad \text{(I)}$$

$x=2$: $P_{(2)}=P_{(-1)}$

$$2(8a+4b+2c+d)=-(-a+b-c+d)$$

$$16a+8b+4c+2d=a-b+c-d$$

$$15a+9b+3c+3d=0$$

$$12a+6b+3a+3b+3c+3d=0$$

Luego

$$6(2a+b)+3(a+b+c+d)=0$$

$$6(2a+b)+0=0$$

$$6(2a+b)=0$$

$\therefore\ 2a+b=0$

Clave E

PROBLEMA N.° 31

Si la siguiente expresión matemática es un polinomio

$$P_{(x;\,y;\,z)}=(a-b)\sqrt[a]{x^b}+(b-c)\sqrt[b]{y^c}+(c-a)\sqrt[c]{z^a},$$

establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. P presenta 3 términos.
II. P es un polinomio homogéneo.
III. P es idénticamente nulo.
IV. P es de grado cero.

A) VVVV B) VFVV C) VVFV
D) FFVF E) FFFF

Resolución

Como

$$P_{(x;y;z)}=(a-b)\sqrt[a]{x^b}+(b-c)\sqrt[b]{y^c}+(c-a)\sqrt[c]{z^a}$$

$$=(a-b)x^{\frac{b}{a}}+(b-c)y^{\frac{c}{b}}+(c-a)z^{\frac{a}{c}}$$

es un polinomio, entonces $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}$ es entero positivo; luego $b\geq a,\quad c\geq b,\quad a\geq c$

Entonces

$$a\geq c\geq b\geq a$$

Resolución

Del problema, el polinomio

$$P_{(x)}=(a^3+b-c-10)x^{a^6}+(c-b+9)x^{a^9}$$

es nulo; entonces $a^3+b-c-10 \wedge c-b+9=0$

Sumando $a^3-1=0$

$$a^3=1;\ a\in\mathbb{R}\ \rightarrow\ a=1$$

$$\therefore\ a^{33}+\frac{2}{a^{99}}=1+\frac{2}{1}=3$$

Clave E

PROBLEMA N.° 35

Dada la siguiente identidad

$(2x+5)^7-(x-1)^7\equiv\left(x^2+9x+18\right)A_{(x)}+ax+b$,

donde $A_{(x)}=a_0x^5+a_1x^4+\ldots+a_5\ \wedge\ a_0\neq 0$,

determine $a+\dfrac{b}{6}$.

A) $\frac{2}{3}(4^7+1)$ B) $\frac{3}{2}(4^7+1)$

C) $\frac{2}{3}(4^7-1)$

D) $\frac{3}{2}(4^7-1)$ E) 4325

Resolución

Tenemos la identidad

$$(2x+5)^7-(x-1)^7\equiv\left(x^2+9x+18\right)A_{(x)}+ax+b$$

$$\equiv(x+3)(x+6)A_{(x)}+ax+b$$

Evaluamos en

$$x=-3:\ -1-(-4)^7=0-3a+b$$

$$3a-b=1-4^7 \qquad \text{(I)}$$

$$x=-6:\ -\cancel{7^7}-\cancel{(-7)^7}=0-6a+b$$

$$6a=b \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$3a-6a=1-4^7\ \rightarrow\ -3a=1-4^7$$

$$a=\frac{4^7-1}{3}$$

$$\rightarrow\ a+\frac{b}{6}=a+a=2a$$

$$\therefore\ a+\frac{b}{6}=\frac{2}{3}(4^7-1)$$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

Si el polinomio

$M_{(x;y)}=\left(a+b-c-d^2\right)x^2+(b-de)xy+9\left(b+c-a-e^2\right)y$

es idénticamente nulo, calcule

$$S=\frac{d^2}{b}+\frac{9b}{e^2}+\frac{6a}{c}.$$

A) 15 B) 16 C) 18

D) 13 E) 9

Resolución

Como el polinomio

$M_{(x;\,y)}=\left(a+b-c-d^2\right)x^2+(b-de)xy+9\left(b+c-a-e^2\right)y$

es nulo, entonces

$$a+b-c-d^2=0\ \wedge\ b-de=0\ \wedge\ b+c-a-e^2=0$$

Resolución

Tenemos la expresión matemática

$$\underbrace{A_{(x;\,y;\,z;\ldots)}}_{10\text{ variables}}=3xy^5z^{13}w^{25}\ldots$$

$$=3x^1\cdot y^5\cdot z^{13}\cdot w^{25}\ldots$$

Luego, el grado es

$$G_{(A)}=\underbrace{1+5+13+25+\ldots}_{10\text{ sumandos}}$$

Pero los números 1; 5; 13; 25; ...
tienen término general de la forma

$$2n(n-1)+1=2n^2-2n+1$$

Luego, el grado es

$$G_{(A)}=\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n+1)=2\sum_{n=1}^{10}n^2-2\sum_{n=1}^{10}+\sum_{n=1}^{10}1$$

$$=\cancel{2}\left(\frac{10(11)\cancel{(21)}^{7}}{\cancel{6}_{\cancel{2}}}\right)-\frac{\cancel{2}(10)(11)}{\cancel{2}}+10$$

$$=770-110+10=670$$

Por lo tanto, el grado absoluto es 670.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 39

En el polinomio homogéneo
$P_{(x;\,y;\,z)}=(xy)^{3a^{b-a}}+y^{b^{a-b}}+2z^c$, calcule $a+b+c$.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 15

Resolución

Como $P_{(x;\,y;\,z)}=(xy)^{3a^{b-a}}+y^{b^{a-b}}+2z^c$

es homogéneo, entonces

$$2(3a^{b-a})=b^{a-b}=c$$

$$6a^{b-a}=b^{a-b}=c;\text{ además } a;\,b;\,c\in\mathbb{Z}^+\quad\text{(I)}$$

Entonces

$$\frac{6}{a^{a-b}}=b^{a-b}$$

$$(ab)^{a-b}=6;\quad a\geq b\ \rightarrow\ a=3;\quad b=2$$

Luego, reemplazamos en (I)

$$c=2$$

$$\therefore\ a+b+c=7$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Si $f_{(x)}=\dfrac{3x}{x-1}$, halle $f_{(2x)}$ en términos de $f_{(x)}$.

A) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}-2}$ B) $\dfrac{3f_{(x)}}{f_{(x)}+3}$

C) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}+3}$

D) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}-3}$ E) $\dfrac{1}{f_{(x)}}$

Resolución

Tenemos

$$f_{(x)}=\frac{3x}{x-1}\qquad\text{(I)}$$

Haciendo

$$x<>2x:\ f_{(2x)}=\frac{3(2x)}{2x-1}=\frac{6x}{2x-1}\qquad(*)$$

Resolución

Reducimos

$$P_{(x)}=(x+1)(x-1)-\frac{x^{n^n}+x^n}{x};\ \ x\neq 0$$

$$P_{(x)}=x^2-1-x^{n^n-1}-x^{n-1}$$

Como es completo, entonces debe tener término lineal y cúbico, luego $n-1=1 \wedge n^n-1=3$ de donde $n=2$.

Reemplazando en J tenemos

$$J_{(x)}=(2x^n)^n+3x^{n^n}-4x^{6\cdot n}+y^n$$

$$=(2x^2)^2+3x^{2^2}-4x^{6\cdot 2}+y^2$$

$$=4x^4+3x^4-4x^{12}+y^2$$

$$=-4x^{12}+7x^4+y^2$$

Por lo tanto, $J_{(x)}$ es un trinomio.

Clave E

PROBLEMA N.° 43

Sea la expresión matemática

$$f_{(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};\ \ x\notin\{-1;0;1\}.$$

Determine m ($m\in\mathbb{R}^+$), si se cumple que $f_{(\Delta)}=2$, cuando

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}.$$

A) -2 B) 49
C) 2
D) 4 E) $\sqrt{7}$

Resolución

Se tiene

$$f_{(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

tal que $f_{(\Delta)}=2$, donde

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}};\ \ m>0$$

Reemplazando $x=\Delta$, tenemos

$$\frac{\Delta}{\sqrt{1-\Delta^2}}+\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta}=2$$

Efectuando

$$\Delta=\sqrt{1-\Delta^2}$$

$$\Delta^2=1-\Delta^2$$

$$\Delta^2=\frac{1}{2}$$

Entonces, de

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}$$

se tiene

$$\Delta^2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}=\cancel{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}$$

$\rightarrow\ m^2=4;\ m>0$

$\therefore\ \ m=2$

Clave C

Como $P_{(x)}$ es completo y ordenado entonces

$a=4,\ \ b=3,\ \ c=2\ \ d=1$

Luego

$P_{(x)}=4x^4+3x^3+2x^2+x+24$

$\therefore\ \ P_{(1)}=4+3+2+1+24=34$

Clave D

PROBLEMA N.° 47

Si el polinomio se anula para más de dos valores asignados a su variable
$P_{(x)}=(ab+ac-3)x^2+(ac+bc-6)x+(ab+bc-9)$,
calcule el valor de $abc(a+b)(a+c)(b+c)$.

A) 160 B) 163 C) 161
D) 162 E) 164

Resolución

Tenemos

$P_{(x)}=(ab+ac-3)x^2+(ac+bc-6)x+(ab+bc-9)$,

que se anula para más de dos valores, entonces $P_{(x)}$ es nulo ($P_{(x)}\equiv 0$).

Entonces

$ab+ac-3=0\ \wedge\ ac+bc-6=0\ \wedge\ ab+bc-9=0$

$ab+ac=3;\ ac+bc=6;\ ab+bc=9$

$a(b+c)=3;\ c(a+b)=6;\ b(a+c)=9$

$\therefore\ \ a(b+c)c(a+b)b(a+c)=abc(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(3)(6)(9)=162$

Clave D

PROBLEMA N.° 48

Si el polinomio P verifica

$P_{(x;y)}=(n^n-1)x^3y^3+(m^n-2)y\equiv-\frac{3}{4}x^3y^3+62y$,

calcule el valor de $64m-n$.

A) −3 B) −2 C) 30
D) 20 E) 10

Resolución

Se tiene la identidad

$$(n^n-1)x^3y^3+(m^n-2)y\equiv-\frac{3}{4}x^3y^3+62y$$

Entonces concluimos

$$n^n-1=-\frac{3}{4}\ \ \wedge\ \ m^n-2=62$$

$$n^n=\frac{1}{4}\ \ \wedge\ \ m^n=64$$

$$n^n=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=(-2)^{-2}$$

$\rightarrow\ n=-2$

Luego $m^{-2}=64$; entonces $m^{-1}=8$

Finalmente, $m=\frac{1}{8}$

$$\therefore\ \ 64m-n=64\left(\frac{1}{8}\right)-(-2)=8+2=10$$

Clave E

PROBLEMA N.° 49

Calcule los valores de m y n para que el polinomio $P_{(x)}=(2+n)x^{m+3}+5x^2+x^{p-m}+2x^n$ sea completo. Considere $n>p$.

A) 0; 4 B) −2; 3 C) 0; 2
D) 1; 2 E) 3; 4

PROBLEMA N.° 52

Dado el polinomio
$P_{(x;\,y)}=3^5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n}+x^{n+2}y^{m-3}$.
Si $GA_{(P)}=11$; $GR_x-GR_y=5$,
calcule el valor de $2m+n$.

A) 5 B) 15 C) 10
D) 25 E) 12

Resolución

En el polinomio

$$P_{(x;\,y)}=3^5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n}+x^{n+2}y^{m-3}$$

$$GA_{(P)}=11;$$

$$GR_x-GR_y=5$$

Vea que z no es variable.

Entonces $n+3+m-2=11 \wedge (n+3)-(m-2)=5$

$$n+m=10 \quad \wedge \quad n-m=0$$

$$n=m$$

Luego

$$2m=10$$

$$m=5;\ n=5$$

$\therefore\ 2m+n=15$

Clave B

PROBLEMA N.° 53

Sean $F_{(x)}=-x^2+x+m$ y $G_{(x)}=x+3$,
de tal manera que $F_{\left(G_{(F_{(2)})}\right)}=-1$.
Indique el mayor valor de m.

A) 2 B) 0 C) 1
D) −1 E) −2

Resolución

Tenemos

$$F_{(x)}=-x^2+x+m \quad \text{y} \quad G_{(x)}=x+3$$

Calculamos

$$F_{(2)}=-2^2+2+m=m-2$$

Como

$$F_{\left(G_{(F_{(2)})}\right)}=-1$$

entonces

$$F_{\left(G_{(m-2)}\right)}=-1$$

$$F_{(m-2+3)}=-1$$

$$F_{(m+1)}=-1$$

$$-(m+1)^2+m+1+m=-1$$

$$-m^2-\cancel{2m}-\cancel{1}+\cancel{2m}+\cancel{1}=-1$$

$$m^2=1$$

$$m=\pm 1$$

Por lo tanto, el mayor valor de m es 1.

Clave C

PROBLEMA N.° 54

Si $P_{(x)}=x$ verifica

$P_{(M_{(x)}+G_{(x)})}=4x+6$ y

$P_{(M_{(x)}-2G_{(x)})}=x+12$,

calcule el valor de $M_{(G_{(2)})}$.

A) 0 B) 1
C) 6
D) 3 E) 8

$\rightarrow\ P_{(0)}=(3+3)^{4m}+2(18-6)^{2m}+(3+1)^{2m}$

$=6^{4m}+2(12)^{2m}+4^{2m}=1600$

$\rightarrow\ 6^{4m}+2(12)^{2m}+2^{4m}=1600$

$$\underbrace{(6^{2m})^2+2(6^{2m}\cdot 2^{2m})+(2^{2m})^2}=1600$$

$$(6^{2m}+2^{2m})^2=1600$$

$$6^{2m}+2^{2m}=40$$

$$2^{2m}(3^{2m}+1)=40$$

$$=4(10)$$

$$2^{2m}(3^{2m}+1)=2^2(3^2+1)$$

$\therefore\ m=1$

Clave A

PROBLEMA N.° 57

Sean los polinomios

$P_{(x)}=2x^3+5x^2+4x+1;$

$Q_{(x)}=(ax+b)^c(cx+d)^a+k;$

$k\neq 1$, donde $P_{(x)}-Q_{(x)}\equiv 0$.

Calcule $\left(\dfrac{b^c d^a}{1-k}\right)\left(a^c\cdot c^a\right)$.

A) -1 B) 2 C) 1
D) -2 E) 4

Resolución

Como $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$

$\rightarrow\ 2x^3+5x^2+4x+1\equiv(ax+b)^c(cx+d)^a+k$

Evaluando en $x=0$

$1=b^c\cdot d^a+k\ \leftrightarrow\ b^c\cdot d^a=1-k$

Como el grado es 3 y el coeficiente principal es 2

$\rightarrow\ a^c\cdot c^a=2$

$$\therefore\ \left(\frac{b^c\cdot d^a}{1-k}\right)(a^c\cdot c^a)=(1)(2)=2$$

Clave B

PROBLEMA N.° 58

Si al sumar $M_{(x)}$ y $P_{(x;\,y)}$ se obtiene un polinomio homogéneo donde

$M_{(x)}=ax^{(a+1)^b\cdot b^a}$

$P_{(y;\,z)}=y^{(a-1)^a\cdot b^{2b}}+6z^{b^{a+2b}}$,

calcule $\sqrt[a]{b(a+1)}$; $ab\neq 0$.

A) 2 B) -3 C) 3
D) -2 E) 1

Resolución

Como $P_{(y;z)}=y^{(a-1)^a\cdot b^{2b}}+6z^{b^{a+2b}}$

entonces

$$P_{(x;\,y)}=x^{(a-1)^a\cdot b^{2b}}+6y^{b^{a+2b}}$$

Sumando

$$M_{(x)}+P_{(x;y)}=ax^{(a+1)^b\cdot b^a}+x^{(a-1)^a\cdot b^{2b}}+6y^{b^{a+2b}}$$

se tiene un polinomio homogéneo, entonces

$$(a+1)^b\cdot b^a=(a-1)^a\cdot b^{2b}=b^{a+2b}$$

CAPÍTULO 4

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Test

PROBLEMA N.° 1

Si $a+b=5 \ \wedge \ ab=2$,
¿cuál es el valor de a^2+b^2?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

Resolución

Recuerda

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

Del dato: $a+b=5 \ \wedge \ ab=2$

$\rightarrow \ 5^2=a^2+b^2+2\cdot 2$

$\therefore \ a^2+b^2=21$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

Al desarrollar $(2x^2+1)^2+(3x^2-x)^2$ se obtuvo $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
¿Cuál es el valor de $a+b$?

A) 2 B) 5 C) 7
D) 9 E) 13

Resolución

Desarrollamos

$$(2x^2+1)^2+(3x^2-x)^2=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

$$(2x^2)^2+2(2x^2)\cdot 1+1^2+(3x^2)^2-2(3x^2)x+x^2$$

$$=4x^4+4x^2+1+9x^4-6x^3+x^2$$

Simplificamos y ordenamos

$$13x^4-6x^3+5x^2+0x+1\equiv ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

Ahora, identificamos los coeficientes:

$a=13; \ b=-6 \ \rightarrow \ a+b=7$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

¿Cuál es el valor de $2M+3N$?, donde

$M=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$;

$N=(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2$.

A) 80 B) 96 C) 63
D) 54 E) 37

Resolución

Recuerda

Identidades de Legendre

- $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

PROBLEMA N.° 7

Si se cumple que $x+4=5$; $xy=2$, calcule el valor de $(x-y)$.

A) -1 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{14}$
D) 2 E) $\sqrt{19}$

Resolución

Con $x+4=5 \rightarrow x=1$
Luego $xy=2 \rightarrow y=2$
Se pide $x-y=1-2=-1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

¿Cuál es el valor de $\frac{2p}{m}$ si se cumple que $(m+p)^2+(m-p)^2=4mp$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Del dato: $\underbrace{(m+p)^2+(m-p)^2}_{2(m^2+p^2)}=4mp$

$2(m^2+p^2)=4mp$

$\rightarrow m^2+p^2-2mp=0 \rightarrow (m-p)^2=0$

$\rightarrow m=p$

Luego, lo pedido: $2\cdot\frac{\cancel{p}}{\cancel{m}}=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Si $a^3+b^3=7 \wedge a^2b+ab^2=\frac{1}{3}$, ¿cuál es el valor de $(a+b)^6$?

A) 10 B) 100
C) 1000
D) 64 E) 729

Resolución

Datos: $a^3+b^3=7$, $3ab(a+b)=1$

$\rightarrow (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=7+1=8$

Finalmente

$$(a+b)^6=[(a+b)^3]^2=8^2=64$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Reduzca la expresión

$$\sqrt[3]{3xy(x+y)+(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}.$$

A) $x+y$ B) $x-y$
C) x
D) y E) xy

Resolución

Vamos a reducir

$$\sqrt[3]{3xy(x+y)+(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}$$

Recuerda

$x^3+y^3\equiv(x+y)(x^2+y^2-xy)$

Entonces

$$=\sqrt[3]{3xy(x+y)+x^3+y^3}=\sqrt[\cancel{3}]{(x+y)^{\cancel{3}}}$$

$=x+y$

Clave **A**

Problemas resueltos

NIVEL I

PROBLEMA N.° 1

Simplifique la expresión

$$\frac{(x+1)^2+(x+2)^2+2x}{(x-1)^2+(x-2)^2+14x}.$$

A) $3x+1$

B) 2

C) $x/2$

D) 1

E) 0

Resolución

Efectuando el desarrollo de los binomios

$$\frac{x^2+\underline{2x}+1+x^2+\underline{4x}+4+\underline{2x}}{x^2-\underline{2x}+1+x^2-\underline{4x}+4+\underline{14x}}$$

Simplificamos

$$\frac{\cancel{2x^2+8x+5}}{\cancel{2x^2+8x+5}}=1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Sean a; b; c números reales tales que

$\frac{b+a}{b+c}=\frac{c}{a}$. ¿Cuál es el valor de $a+b+c$ si $a\neq c$?

A) 1

B) a

C) b

D) c

E) 0

Resolución

Del dato

$$\frac{b+a}{b+c}=\frac{c}{a} \quad\rightarrow\quad ab+a^2=bc+c^2$$

Transponiendo términos convenientemente

$$ab-bc=c^2-a^2 \quad\rightarrow\quad b(a-c)=-\left(a^2-c^2\right)$$

$$b\cancel{(a-c)}=-(a+c)\cancel{(a-c)} \quad \text{ya que } c\neq a$$

$$\rightarrow\quad b=-a-c$$

$$\therefore\quad a+b+c=0$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

Si se cumple que $\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}=6$, ¿cuál es el valor de $\frac{a^3-27b^3}{a^3+27b^3}$?

A) 1

B) 0

C) 1/3

D) 1/2

E) -1

PROBLEMA N.° 6

Sean $a; b \in \mathbb{N}$, tal que $4(a+b)+(a-b)^2=(a+b)^2$.
Calcule el valor de $a+a^3+a^5+b^2+b^4+b^6$.

A) 42 B) 36
C) 126
D) 142 E) 150

Resolución

Del dato

$$\cancel{4}(a+b)=\underbrace{(a+b)^2-(a-b)^2=\cancel{4}ab}_{\text{identidad de Legendre}}$$

$\rightarrow\ a+b=ab/a;\ b \in \mathbb{N}$

Solo es posible si $a=b=2$

Reemplazamos en

$\rightarrow\ 2+2^3+2^5+2^2+2^4+2^6$

$\rightarrow\ 2+8+32+4+16+64=126$

Por lo tanto, el valor de $a+a^3+a^5+b^2+b^4+b^6$ es 126.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Si $b=ka \wedge a^2+b^2=c^2$,

¿cuál es el valor de $\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{c^2}$?

A) k^2 B) k^2-1
C) k^2+1
D) k E) 1

Resolución

Del dato

$$b=ka \ \rightarrow\ \frac{b}{a}=k \ \rightarrow\ \frac{b^2}{a^2}=k^2$$

Además

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}=1 \qquad \text{(I)}$$

Luego

$$\frac{b^2}{a^2}+\underbrace{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}}_{\text{(I)}}=k^2+1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Calcule el valor de

$$\frac{(ax+1)(by+1)}{(ax-1)(by-1)}.$$

Considere $1+abxy=0$.

A) 1 B) 0 C) −1
D) a/b E) b/a

Resolución

Trabajando separadamente numerador y denominador.

- $(ax+1)(by+1)=abxy+ax+by+1$
  0
  $=ax+by$

- $(ax-1)(by-1)=abxy-ax-by+1$
  0
  $=-(ax+by)$

Resolución

Sea

$$P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-5$$

Cabe recordar que

$$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$$

$$\rightarrow\ P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-1-4=(x-1)^3-4$$

Luego, reemplazamos x por $\sqrt[3]{7}+1$

$$\rightarrow\ P_{(\sqrt[3]{7}+1)}=(\sqrt[3]{7}+\cancel{1}-\cancel{1})^3-4$$

$$=\sqrt[3]{7}^{\,3}-4=7-4=3$$

Clave C

PROBLEMA N.° 12

Si $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$,

además $E=x^3-3x+6$,

¿cuál es el valor de E^2+1?

A) 50 B) 26 C) 37
D) 17 E) 101

Resolución

Sea

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}_{b}=a+b$$

$$\rightarrow\ x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\qquad \text{(I)}$$

Asimismo

$$ab=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt[3]{2^2-\sqrt{3}^{\,2}}=1$$

Luego, en (I)

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^3+3\cdot(1)\cdot x$$

$$x^3=2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}+3x$$

$$\rightarrow\ x^3=3x+4$$

$$\rightarrow\ x^3-3x=4$$

Finalmente

$$E=\underbrace{x^3-3x}_{4}+6=10$$

$$\therefore\ E^2+1=10^2+1=101$$

Clave E

PROBLEMA N.° 13

Si $x+\dfrac{4}{x}=2$, calcule el valor numérico de

$$\frac{x^6}{x^2-2x+5}.$$

A) 64 B) 0 C) 16
D) 9 E) 81

Resolución

Del dato

$$x+\frac{4}{x}=2\ \rightarrow\ x^2+4=2x$$

$$\rightarrow\ x^2-2x+4=0$$

Para el denominador

$$x^2-2x+5=1$$

Luego

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=\sqrt[\cancel{2}]{(K+1)^{\cancel{2}}}$$

$$=K+1=n^2+3n+1$$

$$=n(n+3)+1$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

$n(n+3)$ es par

$\therefore\ n(n+3)+1$ es impar

Clave **A**

$$\rightarrow\ x^4+y^4=\frac{\left[(\sqrt{3}+1)^2\right]^2+\left[(\sqrt{3}-1)^2\right]^2}{4}$$

$$x^4+y^4=\frac{(4+2\sqrt{3})^2+(4-2\sqrt{3})^2}{4}$$

En el numerador, aplicamos la identidad de Legendre

$$=\frac{\cancel{2}\left[4^2+(2\sqrt{3})^2\right]}{\cancel{4}}=\frac{16+12}{2}=\frac{28}{2}=14$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

¿Cuál es el valor numérico de x^4+y^4 cuando $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$?

A) 16 B) 12 C) 10
D) 14 E) 8

Resolución

Nos piden

$$x^4+y^4=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$x^4+y^4=\frac{(\sqrt{3}+1)^4+(\sqrt{3}-1)^4}{4};\ \sqrt{2}^{\,4}=2^2=4$$

Luego

$$(\sqrt{3}+1)^2=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-1)^2=3+1-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

PROBLEMA N.° 17

Si se cumple que $4x^2+1=2x$, ¿cuál es el valor numérico de $\frac{x^6+1}{x^6}$?

A) 16 B) 64/65 C) 62
D) 65 E) 65/64

Resolución

La condición

$$4x^2-2x+1=0$$

nos hace recordar el producto notable

$$(2x)^3+1=(2x+1)\cancel{\underbrace{\left[(2x)^2-2x+1\right]}_{0\text{ (dato)}}}$$

$$\rightarrow\ 8x^3=-1\ \rightarrow\ x^3=-\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow\ (x^3)^2=\left(-\frac{1}{8}\right)^2$$

$$x^6=\frac{1}{64}$$

Del dato

$$a^2+c^2=2ab-2bc-2b^2$$

$$a^2+c^2-2ab-2bc+b^2+b^2=0$$

Agrupamos según lo indicado

$$\underbrace{a^2-2ab+b^2}_{(a-b)^2}+c^2-2bc+b^2=0$$

$$(a-b)^2+(c-b)^2=0$$

$\rightarrow\ a=b\ \wedge\ b=c$

$\rightarrow\ a=b=c$

Reemplazamos en lo pedido

$$\frac{a\times a+a\times a+a\times a}{2\times a^2}=\frac{3\cancel{a^2}}{2\cancel{a^2}}=\frac{3}{2}$$

Clave **B**

NIVEL II

PROBLEMA N.° 21

Halle el equivalente reducido de

$$\frac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$$

A) ab B) xy
C) $abxy$
D) -1 E) 1

Resolución

Aplicamos la identidad de Lagrange

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

y reemplazamos en lo pedido

$$\frac{\cancel{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}{\cancel{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}=1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$, determine el valor de

$\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{2}{x+y}$, $x>0$.

A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) $1/y$

Resolución

Del dato, operamos con las fracciones

$$\frac{y+x}{xy}=\frac{4}{x+y}\ \rightarrow\ (x+y)^2=4xy$$

$$x^2+2xy+y^2=4xy\ \rightarrow\ x^2-2xy+y^2=0$$

$$(x-y)^2=0\ \rightarrow\ x=y$$

Luego, lo pedido

$$\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{2}{x+y}=\sqrt{\frac{x}{x^3}}-\frac{2}{x+x}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0\quad \text{(ya que } x>0)$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{2}{x+y}=0$$

Clave **A**

Entonces

$$\frac{(m+c)^2-(m-c)^2}{(m-c)(m+c)}=\frac{(c+n)^2-(c-n)^2}{(c-n)(c+n)}$$

$$\frac{\cancel{4}m\cancel{c}}{m^2-c^2}=\frac{\cancel{4}\cancel{c}n}{c^2-n^2}$$

$$\rightarrow\ \underline{mc^2}-\underline{\underline{mn^2}}=\underline{\underline{m^2n}}-\underline{nc^2}$$

$$c^2(\cancel{m+n})=mn(\cancel{m+n})\ \rightarrow\ c^2=mn$$

Reponiendo m, n

$$c^2=(a+b)(b-a)=b^2-a^2$$

Luego, lo pedido

$$\frac{a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2-(b^2-a^2)}=\frac{\cancel{a^2}}{2\cancel{a^2}}$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Calcule el equivalente simplificado de

$$\sqrt[9]{(m^6-m^3n^3+n^6)(m^6-n^6)(m^6+m^3n^3+n^6)+n^{18}}.$$

A) 0

B) m^2

C) m^3

D) m^6

E) n^9

Resolución

Recuerda

$$(x^2+xy+y^2)(x-y)=x^3-y^3$$
$$(x^2-xy+y^2)(x+y)=x^3+y^3$$

Reemplazamos en el problema $m^3=x$, $n^3=y$

$$\sqrt[9]{(x^2-xy+y^2)(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)+y^6}$$

$$=\sqrt[9]{\underbrace{(x^2-xy+y^2)(x+y)}\underbrace{(x-y)(x^2+xy+y^2)}+y^6}$$

$$=\sqrt[9]{\underbrace{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}+y^6}$$

$$=\sqrt[9]{x^6-\cancel{y^6}+\cancel{y^6}}=\sqrt[3]{x^2}$$

Como $x=m^3$

$$=\sqrt[3]{(\cancel{m^3})^2}=m^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

Si $n+\frac{1}{n}=1$, calcule el valor de $\left(n^3-\frac{1}{n^3}\right)^3$.

A) -1 B) 3 C) 0
D) -2 E) 2

Resolución

Para resolver a pregunta, antes necesitamos hallar $n-\frac{1}{n}$. Usando la identidad de Legendre tenemos

$$\Big(\underbrace{n+\frac{1}{n}}_{1}\Big)^2-\left(n-\frac{1}{n}\right)^2=4$$

Resolución

Le sumamos miembro a miembro

$$\left[\frac{1}{a}(b+c)+1\right]+\left[\frac{1}{b}(a+c)+1\right]+\left[\frac{1}{c}(a+b)+1\right]=6+3$$

$$\left(\frac{a+b+c}{a}\right)+\left(\frac{a+b+c}{b}\right)+\left(\frac{a+b+c}{c}\right)=9$$

Factorizamos $a+b+c$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

Luego, lo escribimos como

$$\underbrace{\frac{a+b+c}{3}}_{\text{MA}}=\underbrace{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}_{\text{MH}};\ a;\ b;\ c\in\mathbb{R}^+$$

$$\boxed{\text{Si } MA=MH \ \rightarrow\ a=b=c \ \text{ propiedad}}$$

Finalmente, lo pedido

$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}=\frac{(a+a+a)^3}{a^3+b^3+a\cdot a\cdot a}=\frac{27\cancel{a^3}}{3\cancel{a^3}}=9$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 29

Si $r^4-r^2+1=0$, calcule el valor de $r^7-\frac{1}{r^7}$.

A) i B) $-2i$ C) 0
D) 7 E) -7

Resolución

Recuerda

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

De la propiedad, reemplazamos $x=r^2$

$$\rightarrow\ r^6+1=(r^2+1)\underbrace{(r^4-r^2+1)}_{0}\ \rightarrow\ r^6=-1$$

Nos piden

$$\cancel{r^6}\cdot r-\frac{1}{\cancel{r^6}\cdot r}=-r-\frac{1}{-r}=-\left(r-\frac{1}{r}\right)$$

Del dato

$$r^4-r^2+1=0\ \rightarrow\ r^4+1=r^2\ \rightarrow\ r^2+\frac{1}{r^2}=1$$

Restando 2

$$\underbrace{r^2-2+\frac{1}{r^2}}=-1\ \rightarrow\ \left(r-\frac{1}{2}\right)^2=-1$$

$$\rightarrow\ r-\frac{1}{r}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

Por lo tanto, un valor de $r-\frac{1}{r}$ es i.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 30

A partir de

I. $x+y+z=1;$

II. $x^2+y^2+z^2=9;$

III. $x^3+y^3+z^3=1,$

determine el valor de $\frac{4}{x^4+y^4+z^4}$.

A) $\frac{1}{33}$ B) $\frac{2}{33}$ C) $\frac{4}{33}$

D) $\frac{16}{33}$ E) $\frac{64}{33}$

Entonces

$$a^2+b^2+c^2=7\cdot 2 \ \rightarrow \ a^2+b^2+c^2=14$$

II. Sabemos también que

$$(a+b+c)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{14}+2\underbrace{(ab+ac+bc)}_{-7}$$

$$\rightarrow \ (a+b+c)^2=0 \ \rightarrow \ a+b+c=0$$

III.

Recuerda

Si $a+b+c=0 \ \rightarrow \ a^3+b^3+c^3=3abc$

Nos piden

$$\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}{abc}$$

Como $a+b+c=0 \ \rightarrow \ \begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$

$$\frac{(-c-c)^3+(-a-a)^3+(-b-b)^3}{abc}$$

$$\frac{(-2c)^3+(-2a)^3+(-2b)^3}{abc}$$

$$\frac{-8(c^3+a^3+b^3)}{abc}=\frac{-8\cdot 3\cancel{abc}}{\cancel{abc}}=-24$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

Si $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$,

reduzca la expresión $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$.

A) $a+b+c$

B) $ab+ac+bc$

C) abc

D) $a^2+b^2+c^2$

E) 1

Resolución

Del dato

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \ \rightarrow \ \frac{ab+ac+bc}{abc}=0$$

$$\rightarrow \ \boxed{ab+ac+bc=0}$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\underbrace{(ab+ac+bc)}_{0}$$

$$\rightarrow \ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$$

$$\rightarrow \ (a+b+c)^4=(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

$$a^4+b^4+c^4=(a+b+c)^4-2\underbrace{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}_{(*)} \qquad \text{(I)}$$

Buscamos en (*)

$$(ab+ac+bc)^2=0^2$$

$$\rightarrow \ a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)=0$$

$$\rightarrow \ a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=-2abc(a+b+c)$$

En (I)

$$a^4+b^4+c^4=(a+b+c)^4-2\{-2abc(a+b+c)\}$$

$$\rightarrow \ a^4+b^4+c^4=(a+b+c)\underbrace{\left[(a+b+c)^3+4abc\right]}_{(**)}$$

PROBLEMA N.° 34

Simplifique

$$\frac{[(y-x)+(z-x)+(p-x)+q][(y+2x)+(z+2x)+(p+2x)+(q+x)]}{y^2+z^2+p^2+q^2}$$

si $(x+y+z+p+q+x)^2=5^2(x^2+y^2+z^2+p^2+q^2)$.

A) 0 B) 5 C) 25 D) x^2 E) -25

Resolución

Simplificamos la parte pedida $\dfrac{(y+z+p+q-3x)(y+z+p+q+7x)}{y^2+z^2+p^2+q^2}$

Le damos forma $\dfrac{[(2x+y+z+p+q)-5x][(2x+y+z+p+q)+5x]}{y^2+z^2+p^2+q^2}$

Al multiplicar en el numerador, se forma una diferencia de cuadrados

$$\frac{(2x+y+z+p+q)^2-25x^2}{y^2+z^2+p^2+q^2} \qquad \text{(I)}$$

Del dato: $(2x+y+z+p+q)^2=25(x^2+y^2+z^2+p^2+q^2)$

En (I) $\dfrac{\cancel{25x^2}+25(y^2+z^2+p^2+q^2)-\cancel{25x^2}}{y^2+z^2+p^2+q^2}=\dfrac{25\cancel{(y^2+z^2+p^2+q^2)}}{\cancel{y^2+z^2+p^2+q^2}}$

Por lo tanto, lo pedido equivale a 25.

Clave C

PROBLEMA N.° 35

Basándose en las siguientes condiciones

I. $\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3+\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2+\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3-\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2=10(x^3+y^3);$ II. $x^6-y^6=6x^4y^4\sqrt[3]{x^3+y^3}$,

calcule el valor de $\dfrac{3}{x^{-3}-y^{-3}}$.

A) 1 B) -1 C) 3 D) $\dfrac{3}{2}xy$ E) $\dfrac{3}{2xy}$

PROBLEMA N.° 37

De acuerdo con las condiciones

I. $m^2+n^2+p^2=16$;

II. $mn+np+pm=-6$;

III. $mnp=4$,

calcule el valor de

$m^4n+n^4p+p^4m+m^4p+n^4m+p^4n$.

Considere $(m+n+p)^{-1}<0$.

A) 64 B) -56

C) 192

D) 128 E) 256

Resolución

Sabemos que

$$(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2(mn+np+mp)$$

Usando los datos (I) y (II)

$$\rightarrow\ (m+n+p)^2=16+2(-6)=4$$

Como $m+n+p<0 \rightarrow \boxed{m+n+p=-2}$ (α)

Sabemos que

$$m^3+n^3+p^3-3\cancel{mnp}$$
$$=(m+n+p)(m^2+n^2+p^2-mn-np-mp)$$

Usamos los datos

$$m^3+n^3+p^3-3\cdot 4=(-2)(16+6)$$

$$\rightarrow \boxed{m^3+n^3+p^3=-32} \quad (\beta)$$

Agrupamos convenientemente la parte pedida.

$$\underline{m^4n}+\underline{\underline{n^4p}}+p^4m+m^4p+\underline{n^4m}+\underline{\underline{p^4n}}$$

$$mn(m^3+n^3)+np(n^3+p^3)+mp(m^3+p^3)$$

De (β)

$$mn(-32-p^3)+np(-32-m^3)+mp(-32-n^3)$$

$$=-32(mn+np+mp)-mnp(p^2+m^2+n^2)$$

Usando los datos, tenemos que

$$-32(-6)-4(16)=128$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 38

Dado el conjunto $\{a, b, c, x, y, z\}\subset\mathbb{R}$, si se verifica $(a+b+c)^2=3[ab+ac+bc-x^2-y^2-z^2]$, calcule el valor de

$$(x^3+y^3+z^3+3^3)\left[\frac{a^7+b^7+c^7}{(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)}\right].$$

A) 0 B) 1

C) 3

D) 9 E) $27abc$

Resolución

De la condición se tiene

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=3(ab+ac+bc)$$
$$-3(x^2+y^2+z^2)$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc+3x^2+3y^2+3z^2=0$$

PROBLEMA N.° 40

Si $a+b+c=1$, halle el valor de S.

$$S=\frac{1-6abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

A) -1
B) 1
C) $1/2$
D) $-1/3$
E) $-1/6$

Resolución

De la identidad de Karl Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(\underbrace{\cancel{a+b+c}}_{1})\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

Multiplicamos por 2

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)-6abc=2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+ac+bc) \quad \text{(I)}$$

Del desarrollo del trinomio al cuadrado

$$(\underbrace{\cancel{a+b+c}}_{1})^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$$1=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \quad \text{(II)}$$

De (I) + (II)

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)-6abc+1=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Luego

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)=6abc-1$$

Lo pedido

$$\frac{1-\cancel{6abc}}{\cancel{6abc}-1}=-1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 41

Si $x^3+1=0 \wedge x\neq -1$, calcule el valor de

$$A=\frac{(x-1)^3}{x^2}-\frac{(x-1)^3}{x}.$$

A) 2
B) 0
C) 1
D) -1
E) -2

Resolución

Nos piden

$$A=\frac{(x-1)^3}{x^2}[1-x]=-\frac{(x-1)^4}{x^2}=-\frac{\left(x^2+1-2x\right)^2}{x^2}$$

Del dato

$$x^3+1=\underbrace{(x+1)}_{\neq 0}\underbrace{\left(x^2-x+1\right)}_{0}=0$$

$\rightarrow\ x^2-x+1=0 \ \rightarrow\ x^2+1=x$

Luego

$$A=-\frac{(x-2x)^2}{x^2}=-\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$\therefore\ A=-1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 42

Si $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{b+c}{a} \wedge a+c>1$,

determine el valor de

$$M=\left(\frac{a-2b-c}{b}\right)^2+\left(\frac{a-b-2c}{c}\right)^2+\left(\frac{b+c-2a}{a}\right)^2.$$

A) 3
B) 1
C) 1/3
D) 2
E) 0

PROBLEMA N.° 45

Si $a^2+bc+bd+cd=0$, calcule el valor de

$$\frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{(c+b)(b+d)(c+d)}.$$

A) 1 B) -2 C) -1
D) 2 E) 0

Resolución

Solo en el denominador

$$(c+b)(c+d)(b+d)=(c^2+\underbrace{cd+bc+bd}_{-a^2})(b+d)$$

Del dato

$$=(c^2-a^2)(b+d)$$

$$=(c+a)(c-a)(b+d)$$

$$=(c+a)(\underbrace{cb+cd}_{-a^2-bd}-ab-ad)$$

$$-(c+a)(a^2+bd+ab+ad)$$

$$-(c+a)(a+b)(a+d)$$

Luego, lo pedido

$$\frac{\cancel{(a+b)(a+c)(a+d)}}{-\cancel{(a+c)(a+b)(a+d)}}=-1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 46

A partir de $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=\frac{4^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$,

determine el valor de M.

$$M=4ab+3(a^2+b^2)-2(a^3+b^3)+(a-b)^2$$

A) 0 B) 2
C) -1
D) 1 E) 4

Resolución

Del dato

$$\cancel{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{\cancel{16}}{\cancel{4}ab}$$

$$\rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$$

$$\rightarrow \frac{b+a}{\cancel{ab}}=\frac{1}{\cancel{ab}}$$

$$\rightarrow \boxed{a+b=1}$$

Se pide

$$4ab+3(a^2+b^2)-2(\underbrace{\cancel{a+b}}_{1})(a^2+b^2-ab)+a^2+b^2-2ab$$

$$4ab+3a^2+3b^2-2a^2-2b^2+\cancel{2ab}+a^2+b^2-\cancel{2ab}$$

$$=2a^2+2b^2+4ab=2(\underbrace{\cancel{a+b}}_{1})^2$$

Por lo tanto, lo pedido se reduce a 2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 47

Si $a+\sqrt{ac}=b+\sqrt{bc}$, además $a\neq b \wedge abc\neq 0$, calcule el valor de S.

$$S=\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}$$

A) 0 B) 1 C) -3
D) 3 E) 3/2

Resolución

Del dato

$$\frac{(x-z)(x+y)+z^2}{(x+y)(z-y)}=1$$

$\rightarrow\ x^2+xy-zx-zy+z^2=xz-xy+yz-y^2$

$\rightarrow\ \underbrace{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz}_{(x+y-z)^2}=0$

$\rightarrow\ \boxed{x+y-z=0}\ \rightarrow\ \begin{cases} z-x=y \\ x+y=z \\ z-y=x \end{cases}$

Lo pedido

$$\left(\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)^2=1+1+1=3$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

Si $a+b=\sqrt[3]{3}\ \wedge\ a-b=\sqrt[3]{2}$,
determine el valor de
$4ab(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)$.

A) 4 B) 15 C) 5
D) 10 E) 16

Resolución

De los datos

$a+b=\sqrt[3]{3}$

$\rightarrow\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=3$ (I)

$a-b=\sqrt[3]{2}$

$\rightarrow\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=2$ (II)

De (I) + (II)

$2(a^3+3ab^2)=5\ \rightarrow\ 2a(a^2+3b^2)=5$

De (I) − (II)

$2(3a^2b+b^3)=1\ \rightarrow\ 2b(b^2+3a^2)=1$

Multiplicando los resultados anteriores

$2a\cdot 2b(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)=5\cdot 1$

$\therefore\ 4ab(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 51

Si $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$, calcule el valor de

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^4+b^4+c^4-4abc}.$$

A) 0 B) 2 C) −1
D) 1 E) −2

Resolución

Del dato

$a+b+c=1\ \wedge\ a^2+b^2+c^2=1$

Sabemos que

$$(\underbrace{a+b+c}_{1})^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1}+2(ab+ac+bc)$$

$\rightarrow\ \boxed{ab+ac+bc=0}$

I. En la identidad de Karl Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(\underbrace{a+b+c}_{1})(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1}\underbrace{-ab-ac-bc}_{0})$$

$\rightarrow\ a^3+b^3+c^3-3abc=1$

Resolución

Recuerda

$$\text{Si } a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} a^3+b^3+c^3=3abc \\ (a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4) \\ a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc) \\ \dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \end{cases}$$

Luego

$$M=\frac{\cancel{(a^2+b^2+c^2)}\left[3a^3-(a^3+b^3+c^3)\right]}{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}}=\frac{(3a^3-3abc)2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$M=\frac{3a(a^2-bc)\cancel{2}}{-\cancel{2}(ab+ac+bc)}=\frac{3a(a^2-bc)}{-[\underbrace{a(b+c)}_{-a}+bc]}=\frac{3a\cancel{(a^2-bc)}}{\cancel{a^2-bc}}$$

$\therefore\ M=3a$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 54

Halle el valor numérico del polinomio $E_{(x)}=x^6-6x^4+9x^2$, para $x=\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

A) 28 B) 14 C) 12 D) 18 E) 16

Resolución

Se pide el valor numérico de $E_{(x)}=(x^3-3x)^2$.

Del dato, elevamos al cubo

$$x^3=\left(\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\right)^3$$

Recuerda

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

PROBLEMA N.° 56

Si $x^3+\frac{1}{y^3}=y^3+\frac{1}{z^3}=1$, calcule el valor de $(xyz)^{102}-1$.

A) 2 B) -1 C) 0
D) 1 E) -2

Resolución

Del dato

$$x^3+\frac{1}{y^3}=1 \;\rightarrow\; x^3y^3+1=y^3 \qquad \text{(I)}$$

$$y^3+\frac{1}{z^3}=1 \;\rightarrow\; y^3=1-\frac{1}{z^3} \qquad \text{(II)}$$

De (I) = (II)

$$x^3y^3+\cancel{1}=\cancel{1}-\frac{1}{z^3} \;\rightarrow\; x^3y^3z^3=-1$$

$\rightarrow\; (xyz)^3=-1$

Se pide

$$(xyz)^{102}=[(xyz)^3]^{34}=(-1)^{34}=1$$

$\therefore\; (xyz)^{102}-1=1-1=0$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 57

Reduzca la expresión M.

$$M=\frac{(x^2+x+1)^2-2(x^4+x^2+1)+(x^2-x+1)^2}{(x^2+\sqrt{3})^2+2(x^4-3)+(x^2-\sqrt{3})^2}$$

A) x B) 1 C) x^2
D) x^{-2} E) x^{-1}

Resolución

Numerador

Recuerda

$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$(x^2+x+1)^2-2(x^4+x^2+1)+(x^2-x+1)^2\equiv$$
$$\equiv[(x^2+x+1)-(x^2-x+1)]^2=(2x)^2=4x^2$$

Denominador

Observación

$x^4-3=(x^2+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3})$

$$(x^2+\sqrt{3})^2+2(x^4-3)+(x^2+\sqrt{3})^2\equiv$$
$$\equiv\left[(x^2+\sqrt{3})+(x^2-\sqrt{3})\right]^2=(2x^2)^2=4x^4$$

Luego

$$M=\frac{4x^2}{4x^4}=x^{-2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 58

Dadas las siguientes condiciones

I. $a^2+b^2+c^2=2$;

II. $(a+b+c)(1+ab+ac+bc)=32$,

calcule el valor de $a+b+c$.

A) 4 B) 16 C) 64
D) $\sqrt[3]{32}$ E) 2

CAPÍTULO 5

DIVISIÓN ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

Test

PROBLEMA N.° 1

Al dividir ax^4-8x^2+5x-1 entre x^2+3x-1, se obtiene como cociente x^2-3x+2 y como residuo $mx+1$. ¿Cuál es el valor de $8a+m$?

A) −4 B) −2 C) 7
D) 4 E) 2

Resolución

En $\dfrac{ax^4-8x^2+5x-1}{x^2+3x-1}$ se obtuvo

$q_{(x)}=x^2-3x+2$ y $R_{(x)}=mx+1$

Usando la identidad fundamental

$D_{(x)}=d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$

Luego

$ax^4-8x^2+5x-1\equiv(x^2+3x-1)(x-1)(x-2)+mx+1$

Para $x=1$

$a-4=0+m+1 \rightarrow a-m=5$ (α)

Para $x=2$

$16a-23=2m+1 \rightarrow 8a-m=12$ (β)

De (α) y (β)

$a=1 \wedge m=-4$

$\therefore 8a+m=8+(-4)=4$

Clave D

PROBLEMA N.° 2

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En una división algebraica, si el grado del divisor es m, su cociente será a lo más de grado $m-1$.
II. El grado del cociente puede ser menor que el grado del residuo.
III. El grado del divisor es mayor que el grado del cociente.

A) VVV B) VFF C) FFV
D) VVF E) FVF

Resolución

Analicemos el valor de verdad.

I. **Falso**
Si el divisor es de grado m, su cociente será a lo más de grado $m-1$.
Esto depende del dividendo.

II. **Verdadero**
El grado del cociente puede ser menor al grado del residuo.
Sí puede, y depende del grado del dividendo.

III. **Falso**
El grado del divisor es mayor al grado de cociente.
No necesariamente.

Clave E

Separamos

$$\frac{x^3-x^2+x-2x^2+2x-2}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{x(x^2-x+1)-2(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

Luego, como $x-2$, es una división exacta

$\therefore\ R_{(x)}=0$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Si la división indicada

$\dfrac{a^2x^4+5ax^3-14x^2+a^3x-9}{ax^2-2x-3}$ es exacta,

¿cuál es el valor real de a?

A) 7 B) −3 C) −6

D) 2 E) −5

Resolución

Realizamos la división exacta

$$\frac{a^2x^4+5ax^3-14x^2+a^3x-9}{ax^2-2x-3}$$

Por el método de Horner

$$\begin{array}{c|ccc:cc}
a & a^2 & \boxed{5a} & \boxed{-14} & a^3 & -9 \\
\hline
2 & & 2a & 3a & & \\
3 & & 7a & 14 & 21 & \\
 & & & 3a & 6 & 9 \\
\hline
 & a & 7 & 3 & \underbrace{a^3+27}_{0} & 0
\end{array}$$

De $a^3=-27\ \rightarrow\ a=-3$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

Si la división $\dfrac{2x^4+x^3+4x^2+n}{x+1}$ deja como resto 5, ¿cuál es el valor de n?

A) 5

B) −5

C) 1

D) 7

E) 0

Resolución

En la división

$$\frac{2x^4+x^3+4x^2+n}{x+1}\ \rightarrow\ R=5$$

Aplicamos el teorema del resto

- $x+1=0\ \rightarrow\ x=-1$
- $R=2(-1)^4+(-1)^3+4(-1)^2+n=5$

  $=2-1+4+n=5$

$\therefore\ n=0$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 8

¿Cuál es el resto en $\dfrac{12x^4+x^3-24-12x}{4x^2-x-5}$?

A) $-3x+4$

B) $3x+4$

C) $-3x+2$

D) $-3x-4$

E) $3x-4$

Luego, el cociente $q_{(x)}=x^3+3$
Por lo tanto, la suma de coeficientes es

$q=1+3=4$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Halle el resto en $\dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+x-6)}{x^3-3x^2+3x-1}$.

A) $-4(x-1)^2$
B) $3-3x$
C) $4x-4$
D) $4x-1$
E) $4(x-1)^2$

Resolución

No piden el resto en

$$\frac{(x^2-2x+1)(x^2+x-6)}{x^3-3x^2+3x-1}$$

Entonces

$$\frac{\cancel{(x-1)}^2(x^2+x-6)}{\cancel{(x-1)}^3}=\frac{x^2+x-6}{x-1}$$

Pero el residuo queda dividido por $(x-1)^2$.
Luego, por el teorema del resto

- $x-1=0 \rightarrow x=1$
- $R_1=1^2+1-6=-4$

$\therefore\ R_{(x)}=-4(x-1)^2$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Halle el resto en

$$\frac{x^{35}+(x-1)^{34}+x}{x(x-1)}.$$

A) $2x$
B) x
C) $x-1$
D) $x+1$
E) $2x+1$

Resolución

El resto en

$$\frac{x^{35}+(x-1)^{34}+x}{x(x-1)}$$

tendrá la forma

$R_{(x)}=Ax+B$

Usando la identidad fundamental

$D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$

$x^{35}+(x-1)^{34}+x\equiv x(x-1)q_{(x)}+Ax+B$

$x=0 \rightarrow (-1)^{34}=B \rightarrow B=1$

$x=1 \rightarrow 1+0+1=0+A+B \rightarrow A=1$

$\therefore\ R_{(x)}=x+1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Del esquema de Horner adjunto de una división en variable x,

1	3	5	a	13
-2		b	d	m
	a	c	e	n

calcule el valor de $m+n$.

A) 4 B) 3
C) 1
D) -7 E) -10

Resolución

Del esquema

- $\frac{3}{1}=a \rightarrow a=3$
- $-2a=b \rightarrow b=-6$
- $5+b=c \rightarrow c=-1$
- $-2c=d \rightarrow d=2$
- $a+d=e \rightarrow e=5$
- $-2e=m \rightarrow m=-10$
- $13+m=n \rightarrow n=3$

$\therefore\ m+n=-7$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Halle el cociente y el resto que se obtiene luego de efectuar la división

$$\frac{(x-1)^3+x-1}{x-2}.$$

A) x^2-3x+4; 4
B) x^2-x+2; 2
C) x^2+x+2; 4
D) x^2+3x+2; 2
E) x^2-3x-2; 4

Resolución

Desarrollamos el cubo y reducimos términos semejantes para obtener la sigiente división

$$\frac{x^3-3x^2+4x-2}{x-2}.$$

Aplicamos la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto

	1	-3	4	-2
2		2	-2	4
	1	-1	2	2

Luego

$$q_{(x)}=x^2-x+2 \quad \text{y} \quad R_{(x)}=2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

¿Cuál es el resto de la división

$$\frac{6x^4-5x^3-3+x^2}{3x-1}?$$

A) 3 B) 0
C) -3
D) -2 E) -1

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

	$\sqrt{2}+1$	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$
$\sqrt{2}-1$		1	$\sqrt{2}-1$	$-\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
	$\sqrt{2}+1$	1	-1	1	$2\sqrt{2}$

y obtenemos

$$q_{(x)}=(\sqrt{2}+1)x^3+x^2-x+1 \quad \text{y} \quad R_{(x)}=2\sqrt{2}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

Halle el resto en la división $\dfrac{x^5+nx+2}{x-1}$ si se sabe que la suma de coeficientes del cociente es 10.

A) 8 B) 10 C) 4
D) 0 E) 15

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

	1	0	0	0	n	2
1		1	1	1	1	$n+1$
	1	1	1	1	$n+1$	$n+3$

y obtenemos

$$q_{(x)}=x^4+x^3+x^2+x+n-1 \text{ y } R_{(x)}=n+3$$

Además, como

$$q_{(1)}=10$$

entonces

$$1+1+1+1+n+1=10$$

$n+5=10$, luego $n=5$

$$R_{(x)}=n+3$$

$$\therefore\ R_{(x)}=8$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

Halle el cociente que se obtiene luego de dividir

$$\frac{16x^4-9x^2-2x}{x-\frac{1}{4}}.$$

A) $4x^3+x^2-2x-1$

B) $16x^2+4x-8$

C) $16x^3+4x-8$

D) $16x^3+4x^2-8x-4$

E) $64x^3+16x^2-32x-16$

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

	16	0	-9	-2	0
$\frac{1}{4}$		4	1	-2	-1
	16	4	-8	-4	-1

y obtenemos

$$q_{(x)}=16x^3+4x^2-8x-4 \quad \text{y} \quad R_{(x)}=-1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

En la siguiente división algebraica

$$\frac{mx^3+mx^2-5mx+2m}{x^2-2x-2};\ m\neq 0,$$

la suma de coeficientes del cociente es 12. Halle el término independiente del residuo.

A) 3 B) 12 C) 15
D) 21 E) 24

Resolución

Efectuamos la división por el método de Horner

1	m	m	$-5m$	$2m$
2		$2m$	$2m$	
2			$6m$	$6m$
	m	$3m$	$3m$	$8m$

Como la suma de coeficientes del cociente $q_{(x)}=mx+3m$ es 12, entonces $q_{(1)}=12$.

Es decir

$m+3m=12 \rightarrow m=3$

Por lo tanto, el término independiente del residuo $R_{(x)}=3mx+8m$ es

$R_{(0)}=8m=24$

$\therefore\ R_{(0)}=24$

Clave E

PROBLEMA N.° 15

Calcule el valor $(m+n)$ si el resto de la siguiente división es $R_{(x)}=-4x-1$.

$$\frac{3x^5+(m+9)x^3+nx^2-x+2}{x^2+3}$$

A) 1 B) 0 C) -1
D) 2 E) -2

Resolución

Efectuamos la división por el método de Horner

1	3	0	$m+9$	n	-1	2
0		0	-9			
-3			0	0		
				0	$-3m$	
					0	$-3n$
	3	0	m	n	-4	-1

coeficientes del residuo

Del esquema

$-1-3m=-4 \rightarrow m=1$

$2-3n=-1 \rightarrow n=1$

$\therefore\ m+n=2$

Clave D

PROBLEMA N.° 16

Luego de efectuar la división

$\dfrac{nx^3+n^2x^2-nx+n^3+n^2}{x+n+1}$ se obtiene que la suma de coeficientes del cociente es igual a $f_{(n)}$.

¿Cuál es el valor de $f_{(1)}+f_{(2)}+\ldots+f_{(20)}$?

A) 2170 B) 2870
C) 3870
D) 20 E) 70

Como $D_{(x)}=(x^2-1+2x)^2-x+3$, reemplazamos x^2 por 1

$$R_{(x)}=(\cancel{1}-\cancel{1}+2x)^2-x+3$$

$$R_{(x)}=4x^2-x+3=4(1)-x+3$$

$\therefore\ R_{(x)}=7-x$

Clave D

PROBLEMA N.° 19

Halle el resto de la división

$$\frac{(8x-3)^{2n}+(6x-2)^n+4x+2}{2x-1}.$$

A) 2 B) 4
C) 6
D) 0 E) -6

Resolución

Aplicamos el teorema del resto

$$d_{(x)}=2x-1=0$$

$$\rightarrow\ x=\frac{1}{2}$$

$$R_{(x)}=D_{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left[8\left(\frac{1}{2}\right)-3\right]^{2n}+\left[6\left(\frac{1}{2}\right)-2\right]^{n}+4\left(\frac{1}{2}\right)+2$$

Luego

$$R_{(x)}=(4-3)^{2n}+(3-2)^n+2+2$$

Entonces

$$R_{(x)}=1^{2n}+1^n+4$$

$\therefore\ R_{(x)}=6$

Clave C

PROBLEMA N.° 20

¿Cuál es el resto de la división $\dfrac{x^8-x+1}{x^2+x+1}$?

A) $-2x$ B) $2x$
C) $3x$
D) $x+1$ E) $2x-1$

Resolución

Aplicamos el teorema del resto generalizado

$$d_{(x)}=x^2+x+1=0$$

$$\rightarrow\ x^2=-x-1$$

Además

$$(x-1)\ (x^2+x+1)=(x-1)\cdot 0$$

$$x^3-1=0$$

$$\rightarrow\ x^3=1$$

Como $D_{(x)}=(x^3)^2\cdot x^2-x+1$, entonces

$$R_{(x)}=(1)^2\cdot(-x-1)-x+1$$

$$R_{(x)}=-x-\cancel{1}-x+\cancel{1}$$

$\therefore\ R_{(x)}=-2x$

Clave A

PROBLEMA N.° 23

En el esquema de Horner mostrado (de una división de polinomios en x), determine el valor de $(m+n+p)-(a+b+c)$.

1	3	a	1	b	c
m	↓	9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	-2	p	4	-3

A) 20 B) 18
C) 15
D) 5 E) -3

Resolución

Del esquema de Horner

- $\frac{3}{1}=n \rightarrow n=3$
- $mn=9 \rightarrow 3m=9 \rightarrow m=3$
- $2n=d \rightarrow 2\cdot 3=d \rightarrow d=6$
- $\frac{a+9}{1}=-2 \rightarrow a=-11$
- $(-2)\cdot m=e \rightarrow (-2)(3)=e \rightarrow e=-6$
- $(-2)\cdot 2=f \rightarrow f=-4$
- $1+d+e=p \rightarrow 1+6-6=p \rightarrow p=1$
- $p\cdot m=g \rightarrow 1\cdot 3=g \rightarrow g=3$
- $p\cdot 2=h \rightarrow 1\cdot 2=h \rightarrow h=2$
- $b+f+g=4 \rightarrow b-4+3=4 \rightarrow b=5$
- $c+h=-3 \rightarrow c+2=-3 \rightarrow c=-5$

Luego

$m+n+p=3+3+1=7$

$a+b+c=-11+5-5=-11$

$\therefore\ (m+n+p)-(a+b+c)=7-(-11)=18$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

Calcule el valor de $(m+n)$ si se sabe que la división $\frac{3x^5+mx^3+nx^2-x+2}{x^2+3}$ deja un residuo $5x-10$.

A) 11 B) 5
C) 1
D) 7 E) 4

Resolución

Efectuamos la división

$$\frac{3x^5+0x^4+mx^3+nx^2-x+2}{x^2+0x+3}$$

Aplicamos el método de Horner

1	3	0	m	n	-1	2
0		0	-9			
-3			0	0		
				0	$-3m+27$	
					0	$-3n$
	3	0	$m-9$	n	$26-3m$	$2-3n$

Luego

$$m=4 \quad \wedge \quad n=-4$$

$$\therefore \quad (m)^{\frac{m}{n}}=4^{-1}=\frac{1}{4}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 27

Halle el residuo de la división algebraica

$$\frac{3+(x-3)^{3^{n+3}}}{x^3-26+27x-9x^2}.$$

A) 3 B) 2

C) 4

D) 5 E) 6

Resolución

La división algebraica dada puede escribirse así

$$\frac{(x-3)^{3^{n+3}}+3}{(x-3)^3+1}$$

Para hallar el residuo aplicamos el teorema del resto

$$d_{(x)}=(x-3)^3+1=0 \ \rightarrow \ (x-3)^3=-1$$

Como

$$D_{(x)}=\left[(x-3)^3\right]^{3^{n+2}}+3$$

$$R_{(x)}=[-1]^{3^{n+2}}+3=(-1)+3$$

$$\therefore \ R_{(x)}=2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Halle el resto de la división algebraica.

$$\frac{x+x^{199}+1}{\dfrac{x^5-1}{x-1}}.$$

A) $x^2(x-1)$ B) $x^3(x-1)$

C) $x(x-1)$

D) $-x^2(x+1)$ E) $x^4(x+1)$

Resolución

Aplicamos el teorema del resto generalizado

$$d_{(x)}=\frac{x^5-1}{x-1}=0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x^5-1=0 \ \rightarrow \ x^5=1 \\ x^4+x^3+x^2+x+1=0 \end{cases}$$

Como

$$D_{(x)}=x+(x^5)^{39}\cdot x^4+1$$

$$R_{(x)}=x+(1)^{39}\cdot(-x^3-x^2-x-1)+1$$

$$\rightarrow \quad R_{(x)}=\cancel{x}-x^3-x^2-\cancel{x}-\cancel{1}+\cancel{1}$$

$$\therefore \ R_{(x)}=-x^3-x^2=-x^2(x+1)$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Calcule el valor de $(a+b+c)$ si el resto de la división $\dfrac{ax^5+bx^4+cx^3-5x-3}{2x^3+x^2-x-2}$ es $R_{(x)}=7x^2+8x-3$.

A) 21 B) 20 C) 30

D) 40 E) 50

Resolución

Aplicamos el método de Horner

1	2	3	b	$6b$	1	a
1		2	$-2b$			
$-b$			5	$-5b$		
				$5-b$	b^2-5b	
					5	$-5b$
	2	5	$5-b$	5	2	3

$\underbrace{2 \quad 3}_{\text{por dato}}$

Luego, del resto

$$b^2-5b+6=2 \quad \wedge \quad a-5b=3$$

$$b^2-5b+4=0 \quad \wedge \quad a=5b+3$$

$$(b-1)(b-4)=0 \quad \wedge \quad a=5b+3$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=1 \rightarrow a=8 \\ b=4 \rightarrow a=23 \end{cases}$$

Como la suma de coeficientes de $q_{(x)}$ es mayor de 15, entonces

$$2+\cancel{5}+\cancel{5}-b+\cancel{5}>\cancel{15} \rightarrow b<2$$

Luego

$$b=1 \quad \wedge \quad a=8$$

$\therefore \ ab=8$

Clave E

PROBLEMA N.° 32

Calcule el valor de a si al dividir

$$\frac{x^{a+17}+x^{a+16}+x^{a+15}+\ldots+x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

se observa que la suma de los coeficientes del cociente es igual a 90 veces su resto.

A) 13 B) 155 C) 160

D) 163 E) 165

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

	1	1	1	1...	1	1	1	1
1		1	2	3...	$a+14$	$a+15$	$a+16$	$a+17$
	1	2	3	4...	$a+15$	$a+16$	$a+17$	$a+18$

De la condición

$$1+2+3+4+\ldots+(a+16)+(a+17)=90(a+18)$$

$$\frac{(a+17)\cancel{(a+18)}}{2}=90\cancel{(a+18)}$$

$\rightarrow a+17=180$

$\therefore \ a=163$

Clave D

PROBLEMA N.° 33

Del esquema de Paolo Ruffini (de una división de polinomios en x)

	A	B	C	D	E	F
-1	↓	1	3	5	7	9
	e	d	c	b	a	0

calcule la suma de coeficientes del polinomio dividendo.

A) 100 B) -50

C) 50

D) -25 E) 0

PROBLEMA N.° 35

Al dividir $F_{(x)}$ entre $(4x^2-9)(x+3)$ se obtuvo como residuo $2(x-3)^2$. Halle el residuo de dividir $F_{(x)}$ entre $2x^2+9x+9$.

A) $-21x+9$

B) $12x+3$

C) $-20x+11$

D) $2x+1$

E) $-3x+10$

Resolución

Del dato, al dividir

$\dfrac{F_{(x)}}{(4x^2-9)(x+3)}$ deja de residuo $2(x-3)^2$.

Entonces, por la identidad fundamental de la división

$$F_{(x)} \equiv (4x^2-9)(x+3)\cdot q_{(x)}+2(x-3)^2$$

Debemos hallar el residuo de $\dfrac{F_{(x)}}{2x^2+9x+9}$

Aplicamos el teorema del resto generalizado

$$d_{(x)}=2x^2+9x+9=0 \;\rightarrow\; 2x^2=-9x-9$$

Como

$$F_{(x)}\equiv(2x-3)(2x+3)(x+3)\cdot q_{(x)}+2(x^2-6x+9)$$

Es decir

$$F_{(x)}\equiv(2x-3)(2x^2+9x+9)\cdot q_{(x)}+2x^2-12+18$$

Entonces

$$R_{(x)}=\cancel{(2x-3)\cdot 0\cdot q_{(x)}}+(-9x-9)-12x+18$$

$$\rightarrow R_{(x)}=-9x-9-12x+18$$

$$\therefore\; R_{(x)}=-21x+9$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 36

Si se sabe que en la división del polinomio completo $F_{(x)}=ax^n+(3a-b)x^{n-1}+(5a-3b)x^{n-2}+(7a-5b)x^{n-3}+\ldots$ entre $(ax-b)$ el residuo es $11a$; $(a\neq b)$, calcule el valor de n.

A) 5 B) 6

C) 4

D) 3 E) 7

Resolución

Efectuamos la división aplicando la regla de Ruffini y usamos el dato del residuo.

	a	$3a-b$	$5a-3b$	$7a-5b$	$9a-7b$	$11a-9b$
$\frac{b}{a}$		b	$3b$	$5b$	$7b$	$9b$
$\div a$	a	$3a$	$5a$	$7a$	$9a$	$11a$
	1	3	5	7	9	

Luego

$$q_{(x)}=x^4+3x^3+5x^2+7x+9 \quad \text{y} \quad R_{(x)}=11a$$

Como

$$D_{(x)}=d_{(x)}\cdot q_{(x)}+R_{(x)}$$

entonces

$$D_{(x)}=(ax-b)(x^4+3x^3+5x^2+7x+9)+11a$$

$$D_{(x)}=ax^5+(3a-b)x^4+(5a-3b)x^3+\ldots+11a-9b$$

$$\therefore\; {}^{\circ}[D]=n=5$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

Calcule el residuo de la siguiente división
$\dfrac{(x-1)^7-(x-2)^7-1}{x^2-3x+2}$.

A) $x-1$ B) $x-2$ C) 1
D) 0 E) -1

Resolución

De la división indicada

$D_{(x)}=(x-1)^7-(x-2)^7-1$

$d_{(x)}=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$q_{(x)}=?$ y $R_{(x)}=?$

Como $^{\circ}[d]=2$, entonces $R_{(x)}=Ax+B$

Aplicamos la identidad fundamental de la división $D_{(x)}\equiv d_{(x)}\cdot q_{(x)}+R_{(x)}$

$\rightarrow (x-1)^7-(x-2)^7-1\equiv(x-1)(x-2)\cdot q_{(x)}+Ax+B$

Evaluando convenientemente

$x=1$: $\cancel{0^7}-(-1)^7-1=\cancel{0(-1)\cdot q_{(1)}}+A+B$

$\rightarrow A+B=0$

$x=2$: $1^7-\cancel{0^7}-1=\cancel{1(0)\cdot q_{(1)}}+2A+B$

$\rightarrow 2A+B=0$

Del sistema lineal

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=0 \end{cases}$$

Obtenemos

$A=0 \wedge B=0$

$\therefore R_{(x)}\equiv 0$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Al efectuar la división algebraica

$\dfrac{(x^2+1)^5+(x-1)^3+3x}{x^3-x^2+x-1}$ se obtuvo un resto $R_{(x)}$.

Calcule el valor de $\dfrac{R_{(-1)}}{R_{(1)}}$.

A) 5/7 B) 7/5 C) 8/7
D) 7/8 E) 1/7

Resolución

Podemos escribir la división así

$$\frac{(x^2+1)^5+x^3-3x^2+6x-1}{(x^2+1)(x-1)}$$

Como $^{\circ}[d]=3$, entonces $R_{(x)}=Ax^2+Bx+C$

Luego, por la identidad fundamental de la división

$$(x^2+1)^5+x^3-3x^2+6x-1\equiv(x^2+1)(x-1)\cdot q_{(x)}+Ax^2+Bx+C$$

Evaluando convenientemente

$x=1$: $2^5+\cancel{1}-3+6\cancel{-1}=\cancel{(2)\cdot 0\cdot q_{(1)}}+A+B+C$

$\rightarrow A+B+C=35$

Como $R_{(1)}=A+B+C \rightarrow R_{(1)}=35$

Como

$$D_{(x)}=3(x^2)^6-5(x^2)^5+3x^2\cdot x+3x^2-5x-5$$

$$\rightarrow R_{(x)}=3\left(\frac{b}{a}\right)^6-5\left(\frac{b}{a}\right)^5+3\frac{b}{a}x+3\frac{b}{a}-5x-5$$

Por ser división exacta $R_{(x)}\equiv 0$, entonces deben cancelarse todos los términos, en particular los términos "lineales".

$$\frac{3b}{a}x-5x=0 \rightarrow \frac{3b}{a}x=5x$$

$$\frac{3b}{a}=5 \rightarrow 3b=5a$$

Se sabe que a y b son enteros positivos y que $a<4$, entonces $a=3$ y $b=5$.

Reemplazamos en

$$R_{(x)}=3\left(\frac{5}{3}\right)^6-5\left(\frac{5}{3}\right)^5+3\frac{5}{3}x+3\frac{5}{3}-5x-5$$

$$\rightarrow R_{(x)}=\frac{5^{\cancel{6}}}{\cancel{3}^5}-\frac{5^{\cancel{6}}}{\cancel{3}^5}+\cancel{5x}+\cancel{5}-\cancel{5x}-\cancel{5}$$

$$\therefore R_{(x)}\equiv 0$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 43

Al efectuar la división algebraica

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+x+3}{3x^2-x+1},$$

se obtuvo como residuo $2x+1$. Determine la relación correcta si el producto de los coeficientes del cociente es 8.

A) $c-a=9$

B) $|b|=2$

C) $|a|-|b|=13$

D) $|b-c|>9$

E) $ab>0$

Resolución

La división

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+x+3}{3x^2-x+1}$$

deja como resto $2x+1$, así que por la identidad fundamental de la división

$$ax^4+bx^3+cx^2+x+3\equiv(3x^2-x+1)\cdot q_{(x)}+2x+1$$

$$\rightarrow ax^4+bx^3+cx^2-x+2\equiv(3x^2-x+1)\cdot q_{(x)}+0$$

Entonces

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2-x+2}{3x^2-x+1}$$

es una división exacta que admite el mismo cociente $q_{(x)}$. Luego podemos efectuar la división por el método de Horner ordenando los polinomios dividendo y divisor en forma ascendente:

1	2	−1	c	b	a
1		2	−6		
			1	−3	
−3				$c-5$	$15-3c$
	2	1	$c-5$	0	0
	coeficientes del cociente			división exacta	

- $\dfrac{P_{(x)}}{x^2-(b+2)x+2b}$ deja como resto $5x-8$

Entonces

$$P_{(x)} \equiv [x^2-(b+2)x+2b]Q_{(x)}+5x-8$$

$$P_{(x)} \equiv (x-2)(x-b)Q_{(x)}+5x-8$$

si $x=2$

$$P_{(2)}=0\cdot\cancel{(2-b)}Q_{(2)}+2 \rightarrow P_{(2)}=2$$

si $x=b$

$$P_{(b)}=\cancel{(b-2)\cdot 0\cdot Q_{(b)}}+5b-8$$

$\rightarrow P_{(b)}=5b-8$

Luego

$$7b-4=5b-8$$

$$2b=-4 \rightarrow b=-2$$

Como

$$P_{(b)}=5b-8 \rightarrow P_{(-2)}=-18$$

Ahora, hallaremos el resto $R_{(x)}$ de la división

$$\frac{P_{(x)}}{x^3-(b+3)x^2+(3b+2)x-2b}$$

Entonces

$$P_{(x)} \equiv [x^3-(b+3)x^2+(3b+2)x-2b]\cdot q_{0(x)}+R_{(x)}$$

Como

$$^{o}[d]=3 \rightarrow R_{(x)}=Ax^2+Bx+C$$

Además $b=2$, luego

$$P_{(x)} \equiv (x^3-5x^2+8x-4)q_{0(x)}+Ax^2+Bx+C$$

$$\rightarrow P_{(x)} \equiv (x-1)(x-2)(x+2)q_{0(x)}+Ax^2+Bx+C$$

Evaluamos convenientemente para x

$x=1$: $P_{(1)}=0(-1)(3)q_{0(1)}+A+B+C$

Como $P_{(1)}=3$

$\rightarrow A+B+C=3$

$x=2$: $P_{(2)}=1(0)(4)\cdot q_{0(2)}+4A+2B+C$

Como $P_{(2)}=2$

$\rightarrow 4A+2B+C=2$

$x=-2$: $P_{(-2)}=(-3)(-4)\cdot 0\cdot q_{0(-2)}+4A-2B+C$

Como $P_{(-2)}=-18$

$\rightarrow 4A-2B+C=-18$

Del sistema lineal

$$\begin{cases} A+B+C=3 & (1) \\ 4A+2B+C=2 & (2) \\ 4A-2B+C=-18 & (3) \end{cases}$$

se obtiene

$$A=-2;\quad B=5;\quad C=0$$

Entonces

$$R_{(x)}=-2x^2+5x$$

$\therefore R_{(1)}=3$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 48

El cociente de dividir un polinomio de tercer grado entre $2x-1$ es x^2+2x-3, y el residuo de dividir dicho polinomio entre $2x+1$ es 1. Halle el resto obtenido al dividir el mismo polinomio entre $2x-1$.

A) −6,5 B) −1,5 C) 4,5
D) 4 E) 5

Resolución

Sea $P_{(x)}$ el polinomio de tercer grado. Entonces $P_{(x)} \div (2x-1)$ admite cociente $q_{(x)}=x^2+2x-3$ y residuo $R_{(x)}=\alpha$.

Luego

$$P_{(x)} \equiv (2x-1)(x^2+2x-3)+\alpha$$

pero $P_{(x)} \div (2x+1)$ deja como residuo 1.

Por el teorema del resto $P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=1$

Como

$$P_{(x)}=(2x-1)(x^2+2x-3)+\alpha$$

$$\rightarrow P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)-3\right]+\alpha$$

Luego

$$1=(-2)\left(\frac{1}{4}-1-3\right)+\alpha$$

$$1=-\frac{1}{2}+2+6+\alpha$$

$\rightarrow \alpha=-6,5$

Por lo tanto, el residuo de $\frac{P_{(x)}}{2x-1}$ es $R_{(x)}=-6,5$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 49

Dada la siguiente división exacta

$$\frac{abcx^3-(a^2c+b^2a+c^2b)x^2+(a^2b+b^2c+c^2a)x-abc}{\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)}.$$

Si $abc \neq 0$, determine el valor de x que anula al cociente de la división.

A) $\frac{c}{b}$ B) $\frac{a}{b}$ C) 1

D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{b}{c}$

Resolución

Efectuamos la división

$$\frac{abcx^3-(a^2c+b^2a+c^2b)x^2+(a^2b+b^2c+c^2a)x-abc}{x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{a}\right)x+\frac{c}{b}}$$

Por el método de Horner

1	abc	$-a^2c-b^2a-c^2b$	$a^2b+b^2c+c^2a$	$-abc$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$		a^2c+bc^2	$-ac^2$	
			$-ba^2-b^2c$	abc
$-\frac{c}{b}$				
	abc	$-b^2a$	0	0

Luego

$$q_{(x)}=(abc)x-b^2a \quad \text{y} \quad R_{(x)} \equiv 0$$

Como queremos que se anule el cociente

$q_{(x)}=0$

$\rightarrow abcx-b^2a=0$

$\rightarrow abcx=b^2a$

PROBLEMA N.° 52

Si la división algebraica

$$\frac{ax^4+bx^3+16x-25}{2x^2-x+4}$$

deja residuo $3x-5$, calcule el valor de $a+b$.

A) 2 B) 11 C) 33
D) 36 E) 7

Resolución

Por la identidad fundamental de la división

$$ax^4+bx^3+16x-25\equiv(2x^2-x+4)\cdot q_{(x)}+3x-5$$

$$ax^4+bx^3+13x-20\equiv(2x^2-x+4)\cdot q_{(x)}+0$$

$$\rightarrow \quad \frac{ax^4+bx^3+13x-20}{2x^2-x+4} \text{ es exacta}$$

Efectuamos la división por el método de Horner, ordenando los polinomios dividendo y divisor en forma ascendente

4	-20	13	0	b	a
1		−5	10		
-2			2	-4	
				3	-6
	-5	2	3	0	0

$\underbrace{0 \quad 0}_{\text{división exacta}}$

Del esquema (resto)

$b-1=0 \ \wedge \ a-6=0$

$\rightarrow \ b=1 \ \wedge \ a=6$

$\therefore \ a+b=7$

Clave E

PROBLEMA N.° 53

Calcule la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir

$$\frac{4x^{80}-2x^{79}+x+b}{x-1}.$$

A) 165 B) 162 C) 163
D) 164 E) 161

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

	4	−2	0	0	...	0	1	b
1		4	2	2	...	2	2	3
	4	2	2	2	...	2	3	$b+3$

$\underbrace{4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \ldots \quad 2 \quad 3}_{\text{80 coeficientes}}$

Luego, la suma de coeficientes del cociente es $4+2(78)+3=163$.

Clave C

PROBLEMA N.° 54

Halle el valor numérico del polinomio

$P_{(x)}=x^4+3\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}x^2-(5+\sqrt[3]{5}-2\sqrt{3})x+\sqrt[3]{25}+4$

cuando x toma el valor de $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.

A) $-1+\sqrt[3]{5}$ B) 0

C) $2\sqrt[3]{25}$

D) 7 E) $2\sqrt[3]{25}+7$

Resolución

Debemos hallar $P_{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})}$, pero $P_{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})}$ es el residuo de dividir $\dfrac{P_{(x)}}{x-\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}$

PROBLEMA N.° 56

Luego de efectuar la división algebraica

$$\frac{x^{19}+x^{16}+2x^{12}-7x^5+9x-1}{x^2+1},$$

dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Su resto es un polinomio constante.
II. Su resto es $x+2$.
III. La división es exacta.
IV. Su resto es $x-2$.

A) VVFF
B) FVFF
C) VFFF
D) FVVV
E) FFFF

Resolución

Aplicamos el teorema del resto

$$d_{(x)}=x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$$

Como

$$D_{(x)}=(x^2)^9\cdot x+(x^2)^8+2(x^2)^6-7(x^2)^2\cdot x+9x-1$$

entonces

$$R_{(x)}=(-1)^9x+(-1)^8+2(-1)^6-7(-1)^2x+9x-1$$

$$\rightarrow R_{(x)}=-\underline{x}+\cancel{1}+2-\underline{7x}+\underline{9x}-\cancel{1}$$

$$\therefore R_{(x)}=x+2$$

Clave B

PROBLEMA N.° 57

Si el polinomio $2x^5+x^4+ax^2+bx+c$ es divisible por (x^4-1), halle $\frac{a+b}{a-b}$.

A) $\frac{3}{2}$
B) $-\frac{3}{2}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{2}{3}$
E) -1

Resolución

De la condición del problema, el polinomio

$$\frac{2x^5+x^4+ax^2+bx+c}{x^4-1}$$

deja resto nulo.

Luego, por teorema del resto

$$d_{(x)}=x^4-1=0 \rightarrow x^4=1$$

Como

$$D_{(x)}=2x^4\cdot x+x^4+ax^2+bx+c$$

entonces

$$R_{(x)}=2\cdot 1\cdot x+1+ax^2+bx+c$$

$$R_{(x)}=2x+1+ax^2+bx+c$$

$$\rightarrow R_{(x)}=ax^2+(b+2)x+c+1$$

Pero el residuo es nulo, entonces

$$a=0;\ b+2=0;\ c+1=0$$

$$\rightarrow a=0;\ b=-2;\ c=-1$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{b}{-b}=\frac{-2}{2}=-1$$

Clave E

Por el método de Horner

ab	$ab(a^n+b^n)$	$-a^{n+1}-b^{n+1}$	0	0	$\dots 0$	$-ab$	0	1
$a+b$	$a^{n+1}+a^nb+ab^n+b^{n+1}$	$-a^n-b^n$						
-1		$a^n+a^{n-1}b+ab^{n-1}+b^n$	$-a^{n-2}-b^{n-2}$					
					$\dots$			
					$\dots$			
					$\dots$			
						$-a^2-b^2$		
						a^2+b^2+2ab	$-a-b$	
							$a+b$	-1
	a^n+b^n	$a^{n-1}+b^{n-1}$	$a^{n-2}+b^{n-2}$		$\dots\ a+b$	1	0	0

Luego

$$q_{(x)}=(a^n+b^n)x^n+(a^{n-1}+b^{n-1})x^{n-1}+(a^{n-2}+b^{n-2})x^{n-2}+\dots+(a+b)x+1 \quad \wedge \quad R_{(x)}\equiv 0$$

Observe que

- si $n=2 \rightarrow q_{(x)}=(a^2+b^2)x^2+(a+b)x+2 \rightarrow t_{\text{central}}=(a+b)x$
- si $n=4 \rightarrow q_{(x)}=(a^4+b^4)x^4+(a^3+b^3)x^3+(a^2+b^2)x^2+(a+b)x+2 \rightarrow t_{\text{central}}=(a^2+b^2)x^2$

Entonces: t_{central} de $q_{(x)}$ es $\left(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}\right)x^{\frac{n}{2}}$

Por lo tanto, el coeficiente es $a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 60

Al dividir $P_{(x)}$ entre (x^2+x+1) se obtuvo por residuo $x+1$, y al dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-x+1) el resto es $x-1$. Calcule el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^4+x^2+1).

A) $x+1$ B) x^3 C) x^3-x D) x^3+x E) x^3-1

Resolución

De las condiciones se tiene:

- $\dfrac{P_{(x)}}{x^2+x+1} \rightarrow \text{resto}=x+1$
- $\dfrac{P_{(x)}}{x^2-x+1} \rightarrow \text{resto}=x-1$

CAPÍTULO 6

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS Y COCIENTES NOTABLES

Test

PROBLEMA N.° 1

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. x^7-3x+2 es divisible por $x-1$

II. $3x^8-x^2-9$ es divisible por x^2+1

III. $2x^{33}-x^3-1$ es divisible por x^3-1

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FFV E) VFF

Resolución

Analicemos el valor de verdad de cada proposición.

I. **Verdadero**. Es cierto que
x^7-3x+2 es divisible por $x-1$
ya que $\dfrac{x^7-3x+2}{x+1}$ es exacta.

II. **Falso**. No es cierto que
$3x^8-x^2-9$ es divisible por x^2+1
ya que $\dfrac{3x^8-x-9}{x^2+1}$ no es exacta.

III. **Verdadero**. Es cierto que
$2x^{33}-x^3-1$ es divisible por x^3-1
ya que $\dfrac{2x^{33}-x^3-1}{x^3-1}$ es exacta.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

Si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son divisibles por $d_{(x)}$, no siempre es cierto que

A) $P_{(x)}+3Q_{(x)}+d_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$.

B) $P_{(x)}+Q^2_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$.

C) $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ es divisible por $d_{(x)}$.

D) $P^2_{(x)}+Q^2_{(x)}$ es divisible por $d^2_{(x)}$.

E) $P^3_{(x)}-Q^3_{(x)}$ es divisible por $d^2_{(x)}$.

Resolución

Si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son divisibles por $d_{(x)}$, entonces

$kP^n_{(x)}+rQ^m_{(x)}+td^p_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$, pero

$\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ no necesariamente será divisible por $d_{(x)}$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

Indique cuál es el resto en $\dfrac{x^{15}-x+1}{x^2-1}$.

A) 1 B) $1-x$ C) $x-1$

D) 0 E) -1

PROBLEMA N.° 6

Halle el término lineal del resto obtenido en $\dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+5x-1)}{(x-1)^2(x-2)}$.

A) $13x$ B) $-13x$
C) $26x$
D) $-26x$ E) $-15x$

Resolución

Primero hallamos el resto en

$$\frac{(x^2-2x+1)(x^2+5x-1)}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$\frac{\cancel{(x-1)^2}(x^2+5x-1)}{\cancel{(x-1)^2}(x-2)}$$

Observación

El resto queda dividido por $(x-1)^2$.

Luego, en

$$\frac{x^2+5x-1}{x-2}$$

calculamos su resto, así

$$R_{(x)}=2^2+5\cdot 2-1=13$$

Finalmente

$$R_{(x)}=13(x-1)^2$$
$$=13x^2-26x+13$$

Entonces, su término lineal es $-26x$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 7

¿Cuántas de las siguientes divisiones indicadas generan cociente notable?

I. $\dfrac{x^{33}-y^{11}}{x^3-y}$

II. $\dfrac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{4x}$

III. $\dfrac{x^{77}-y^{33}}{x^7-y^3}$

IV. $\dfrac{(x+2)^5-32}{x}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Observación

$\dfrac{x^n \pm y^m}{x^a \pm y^b}$ genera C.N. si $\dfrac{n}{a}=\dfrac{m}{b}=$ # de términos.

I. $\dfrac{x^{33}-y^{11}}{x^3-y^1} \rightarrow \dfrac{33}{3}=\dfrac{11}{1}$ genera C.N.

II. $\dfrac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{(x+1)^2-(x-1)^2} \rightarrow \dfrac{20}{2}=\dfrac{20}{2}$ genera C.N.

III. $\dfrac{x^{77}-y^{33}}{x^7-y^3} \rightarrow \dfrac{77}{7}=\dfrac{33}{3}$ genera C.N.

IV. $\dfrac{(x+2)^5-2^5}{(x+2)-2} \rightarrow \dfrac{5}{1}=\dfrac{5}{1}$ genera C.N.

Por lo tanto, las 4 divisiones generan C.N.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

¿Cuál es el mínimo valor entero que toma m si la división $\dfrac{x^{3m-1}-y^{3m-9}}{x^r-y^{r-1}}$ genera un cociente notable dependiente de y?

A) 3
B) 5
C) 7
D) 9
E) 11

Resolución

Si $\dfrac{x^{3m-1}-y^{3m-9}}{x^r-y^{r-1}}$ genera C.N., entonces

$$\frac{3m-1}{r}=\frac{3m-9}{r-1}=\alpha \quad (\text{\# de términos})$$

$$\left.\begin{array}{l} 3m-1=\alpha r \\ 3m-9=\alpha r-\alpha \end{array}\right\}(-)$$
$$8=\alpha$$

Luego

$$\frac{(x^r)^8-(y^{r-1})^8}{x^r-y^{r-1}}$$

Su término general será

$$t_k=(x^r)^{8-k}.(y^{r-1})^{k-1}$$

Si depende de y, entonces $(r-1)(k-1)\neq 0$.

Además

$$3m-1=8r \;\rightarrow\; m=\frac{8r+1}{3}$$

Luego, $m\in\mathbb{Z}$ es mínimo cuando $r=4$

$\therefore\; m=11$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Si $\dfrac{8\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$ se desarrolla como un cociente notable, ¿cuántos términos enteros se tendrá en dicho cociente notable?

A) 7 B) 6 C) 5
D) 4 E) 3

Resolución

Buscamos los términos enteros del C.N. generado por

$$\frac{8\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} <> \frac{\sqrt{2}^7-1}{\sqrt{2}-1}$$

Así

$$t_k=\sqrt{2}^{7-k}\cdot 1=2^{\frac{7-k}{2}},\quad k=1;2;\ldots;7$$

Luego, t_k será entero si k es impar

$\rightarrow\; k=1;\,3;\,5;\,7$

Es decir, existirán 4 términos enteros.

Clave **D**

Resolución

Sea $P_{(x)}$ un polinomio en $P_{(1)}=11$; $P_{(0)}=7$.
Nos piden el resto de $P_{(x)} \div (x^2-x)$.

Entonces, usando la identidad fundamental

$$P_{(x)}=(x^2-x)q_{(x)}+\underbrace{ax+b}_{\text{resto}}$$

Evaluando

$$P_{(0)}=b=7 \doteq \text{T.I.}(P)$$

$$P_{(1)}=a+b=11=\sum\text{coef. } P$$

$$a+7=11$$

$$a=4;\ b=7$$

$$\therefore\ R_{(x)}=ax+b=4x+7$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Al dividir $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ separadamente por $(x-1)$, los restos obtenidos son respectivamente 2; 3 y 4. ¿Cuál es el resto de dividir $[P_{(x)}+2Q_{(x)}+3R_{(x)}]$ entre $(x-1)$?

A) 18 B) 20
C) 15
D) 11 E) 22

Resolución

De las divisiones $\frac{P_{(x)}}{x-1}$; $\frac{Q_{(x)}}{x-1}$; $\frac{R_{(x)}}{x-1}$ se tienen los restos 2; 3 y 4 respectivamente, entonces $P_{(1)}=2$; $Q_{(1)}=3$ y $R_{(1)}=4$.

Luego, por el teorema del resto, hallamos el resto de

$$\frac{P_{(x)}+2Q_{(x)}+3R_{(x)}}{x-1}$$

Así

$$R=P_{(1)}+2Q_{(1)}+3R_{(1)}=2+2(3)+3(4)$$

$$\therefore\ R=20$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

Halle el coeficiente del término lineal de aquel polinomio cuadrático que es divisible por $(2x-3)$. Además, su término independiente es -3 y su resto al dividirlo por $(x+1)$ es 20.

A) −13 B) −5 C) 5
D) −4 E) −1

Resolución

Sea $P_{(x)}$ el polinomio cuadrático divisible por $(2x-3)$; entonces

$$P_{(x)}=(2x-3)(ax+b) \qquad \text{(I)}$$

Además, su término independiente es

$$-3 \text{ y } P_{(-1)}=20$$

Evaluando en (I)

$$P_{(0)}=-3b=-3 \ \rightarrow\ b=1$$

$$P_{(-1)}=(-5)(-a+b)=20$$

$$\rightarrow\ -a+b=-4$$

$$a=5$$

De donde

$$P_{(x)}=(5x-1)^3$$
$$=125x^3-75x^2+15x-1$$

Por lo tanto, el término principal del polinomio es $125x^3$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

¿Cuál es el resto en la siguiente división?

$$\frac{5x^{218}+1}{x^2+x+1}$$

A) $-5x-4$

B) $-5x+6$

C) $-5x-6$

D) $-5x-5$

E) $5x-4$

Resolución

Nos piden el resto de $\dfrac{5x^{218}+1}{x^2+x+1}$.

Aplicando el teorema del resto

$$x^2+x+1=0 \leftrightarrow x^2=-x-1$$
$$\leftrightarrow x^2+x=-1$$

También, por productos notables

$$x^3-1=(x-1)\underbrace{\cancel{(x^2+x+1)}}_{0}$$

$$x^3=1$$

Utilizamos estas equivalencias en el dividendo

$$5x^{218}+1=5(x^3)^{72}\cdot x^2+1$$
$$=5(1)^{72}(-x-1)+1$$
$$=-5x-5+1$$
$$=-5x-4$$

$\therefore \; R_{(x)}=-5x-4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

¿Cuál es el resto en la siguiente división?

$$\frac{(x^3-3x^2+3x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

A) $12(x-1)^2$

B) $12(x+1)^2$

C) $-12(x-1)^2$

D) -12

E) $12(x+2)$

Resolución

Nos piden calcular el resto en

$$\frac{(x^3-3x^2+3x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Cancelamos $(x-1)^2$, pero recordemos que el resto también queda dividido por $(x-1)^2$. Luego tenemos la división $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x+2}$ y el resto se calcula utilizando el teorema del resto, es decir $x+2=0 \rightarrow x=-2$; esto se reemplaza en el numerador $(x-1)(x-2)$.

PROBLEMA N.° 13

Si el cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^m}{x^3-y^4}$ tiene 14 términos, ¿cuál es el valor de $m+n$?

A) 56 B) 89
C) 42
D) 98 E) 84

Resolución

Tenemos $\dfrac{x^n-y^m}{x^3-y^4}$ que genera 14 términos.

Entonces $\dfrac{n}{3}=14 \wedge \dfrac{m}{4}=14$

$n=42 \wedge m=56$

$\therefore\ m+n=98$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

¿Qué lugar ocupa el término x^7y^3 en el cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$?

A) 4 B) 5
C) 3
D) 7 E) 6

Resolución

En el desarrollo de $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$, tenemos que

$t_k=x^{n-k}y^{k-1}=x^7y^3$

Entonces

$n-k=7 \wedge k-1=3$

$k=4$

de donde $n=11$

Por lo tanto, el lugar del término x^7y^3 es 4.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Si x^8y^7 es un término del cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^{\frac{n}{2}}}{x^2-y}$, ¿qué valor toma n?

A) 16 B) 32 C) 19
D) 24 E) 20

Resolución

Tenemos

$$\frac{x^n-y^{\frac{n}{2}}}{x^2-y}=\frac{(x^2)^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}}}{x^2-y}$$

El cociente notable tendrá $\dfrac{n}{2}$ términos, entonces

$$t_k=(x^2)^{\frac{n}{2}-k}(y)^{k-1}=x^8y^7$$

$x^{n-2k}\,y^{k-1}=x^8y^7$ (dato)

de donde $k-1=7 \wedge n-2k=8$

$k=8$; $n=24$

Por lo tanto, el valor de n es 24.

Clave **D**

Resolución

Tenemos la división

$$\frac{(2x+1)^{20}-(2x-1)^{20}}{8x}=\frac{(2x+1)^{20}-(2x-1)^{20}}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\frac{\left((2x+1)^2\right)^{10}-\left((2x-1)^2\right)^{10}}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}$$

$$=\underbrace{\left((2x+1)^2\right)^9+\left((2x+1)^2\right)^8(2x-1)^2+\left((2x+1)^2\right)^7\left((2x-1)^2\right)^2+\ \dots\ +\left((2x-1)^2\right)^9}_{q_{(x)}}$$

Luego, el término independiente de $q_{(x)}$ es

$$q_{(0)}=\underbrace{1+(1)+1+(1)+\ldots+1}_{10\text{ sumandos}}=10$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Si la división $\dfrac{x^{45}-y^{30}}{x^3-y^2}$ genera un cociente notable, ¿cuál es el valor númerico del término de lugar 7, contado a partir del final cuando $x=2$; $y=1/2$?

A) 4 B) 8 C) 1/2 D) 1 E) 1/4

Resolución

Se tiene la división $\dfrac{x^{45}-y^{30}}{x^3-y^2}$, que genera un cociente notable. Pero esta división se puede escribir así

$$\frac{\left(x^3\right)^{15}-\left(y^2\right)^{15}}{x^3-y^2}$$

Luego

$$\underset{\leftarrow}{t_7}=\left(y^2\right)^{15-7}\left(x^3\right)^6 \quad \text{término contado a partir del final}$$

Entonces

$$\underset{\rightarrow}{t_7}=x^{18}y^{16}$$

Evaluando en

$$x=2;\quad y=\frac{1}{2}$$

se tiene

$$2^{18}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\frac{2^{18}}{2^{16}}=2^2=4$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Calcule el valor de a si los polinomios

$P_{(x)}=x^3+ax^2-5x-6;$

$Q_{(x)}=x^3+(a-3)x^2-17x-15$

son divisibles por un polinomio lineal común de coeficientes enteros.

A) 2 B) 7 C) 5

D) 3 E) 8

Resolución

Tenemos los polinomios

$$P_{(x)}=x^3+ax^2-5x-6;$$

$$Q_{(x)}=x^3+(a-3)x^2-17x-15,$$

divisibles por un polinomio lineal en común.

Así $\quad P_{(x)}\equiv(x-b)M_{(x)}$

$\qquad Q_{(x)}\equiv(x-b)N_{(x)}$

Entonces, $P_{(x)}\pm Q_{(x)}$ también es divisible por $(x-b)$, es decir, $P_{(x)}\pm Q_{(x)}=(x-b)(M_{(x)}\pm N_{(x)})$

Pero en este problema es conveniente tomar

$$P_{(x)}-Q_{(x)}=\left(x^3+ax^2-5x-6\right)-\left(x^3+(a-3)x^2-17x-15\right)$$

$$=3x^2+12x+9$$

$$=3\left(x^2+4x+3\right)=3(x+1)(x+3)$$

Entonces, el factor común puede ser

$(x+1)$ o $(x+3)$

Veamos, para $x+1$

$$P_{(-1)}=(-1)^3+a(-1)^2-5(-1)-6=0$$

$$-1+a-1=0$$

$$a=2$$

$$Q_{(-1)}=(-1)^3+(a-3)(-1)^2-17(-1)-15=0$$

$$-1+a-3+2=0$$

$$a=2$$

Concluimos que $x+1$ es factor común de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ para $a=2$, además que $(x+3)$ no es factor común.

$\therefore\ a=2$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Si el polinomio $c_{(x)}$ es divisible separadamente por los polinomios $f_{(x)}, g_{(x)}, h_{(x)}$; entonces $c_{(x)}$ es divisible también por el residuo de $f_{(x)}\cdot g_{(x)}$ entre $h_{(x)}$.

II. x^3+2x^2-x+6 es divisible por x^2-x+2.

III. Si dividimos $mx^4+nx^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1 se obtienen restos que suman 4, entonces m es 1.

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FVV E) FFV

Resolución

I. **Falsa**

Veamos un contraejemplo

$$c_{(x)}=(x+1)(x+2)\left(x^2+1\right)$$

con $f_{(x)}=x+1;\ g_{(x)}=x+2;\ h_{(x)}=x^2+1$

Resolución

Las raíces de $P_{(x)}$ son 2; 3 y además es divisible por $(x^4+1)(x+1)$.

$\rightarrow\ P_{(x)}=(x-2)(x-3)(x^4+1)(x+1)Q_{(x)}$

Y como $P_{(x)}$ es de octavo grado, entonces $Q_{(x)}$ es lineal.

Así

$$P_{(x)}=(x-2)(x-3)(x^4+1)(x+1)(ax+b);\ a\neq 0$$

además

$$P_{(1)}=32 \quad \text{y} \quad P_{(0)}=66$$

En efecto

$$P_{(1)}=(-1)(-2)(2)(2)(a+b)=32$$

$$a+b=4 \qquad \text{(I)}$$

$$P_{(0)}=(-2)(-3)(1)(1)(b)=66$$

$$6b=66$$

$$b=11$$

De (I): $a=-7$

de donde

$$P_{(x)}=(x-2)(x-3)(x^4+1)(x+1)(-7x+11)$$

Luego, el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x+2}$ es

$$P_{(-2)}=(-4)(-5)(17)(-1)(25)=-8500$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 25

Halle un polinomio $P_{(x)}$ de segundo grado y divisible por $(2x+1)$, sabiendo además que su primer coeficiente es 4 y que al ser dividido por $(x-2)$ el resto es 5. Reconozca el menor coeficiente de $P_{(x)}$.

A) -4 B) -3 C) -5
D) 4 E) 2

Resolución

Como $P_{(x)}$ es de segundo grado y divisible por $2x+1$, entonces

$$P_{(x)}=(2x+1)(ax+b);\ a\neq 0$$

Además, su coeficiente principal es 4

$\rightarrow\ P_{(x)}=(2x+1)(2x+b)$

Así, el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ es $P_{(2)}=5$.

Luego

$$P_{(2)}=(5)(4+b)=5$$

$$4+b=1 \ \rightarrow\ b=-3$$

Entonces, $P_{(x)}=(2x+1)(2x-3)=4x^2-4x-3$

Por lo tanto, el menor coeficiente de $P_{(x)}$ es -4.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Si el residuo de la división del polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+4)$ es 7 y la suma de los coeficientes del cociente es 6, halle el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-1)$.

A) 0 B) 30 C) 7
D) 37 E) 51

Resolución

Como 7 es el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x+4}$, entonces $P_{(-4)}=7$

Por identidad fundamental, también podemos escribir $P_{(x)}=(x+4)q_{(x)}+7;\ \ q_{(1)}=6$

Es decir

$$P_{(x)} \equiv (x^4+x^2+1)Q_{(x)}+x^3+x$$

Por lo tanto, $\dfrac{P_{(x)}}{x^4+x^2+1}$ deja resto x^3+x.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

Luego de efectuar la división, calcule su resto.

$$\frac{x^{72}+x^4+1}{x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ldots+1}$$

A) 1 B) 2
C) x^4-1
D) $2x^4+1$ E) $2x^2-1$

Resolución

Tenemos la división

$$\frac{x^{72}+x^4+1}{x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ldots+1}$$

Aplicamos el teorema del resto

$$x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ \ldots\ +1=0$$

$$\leftrightarrow\ (x^4+1)(x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ \ldots\ +1)=0$$

$$\leftrightarrow\ x^{68}+1=0$$

$$\leftrightarrow\ x^{68}=-1$$

Reemplazamos en

$$x^{72}+x^4+1=x^{68}\cdot x^4+x^4+1$$

$$R_{(x)}=(-1)x^4+x^4+1=1$$

$$\therefore\ R_{(x)}=1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Un polinomio $P_{(x)}$ de cuarto grado, cuyo coeficiente principal es 3, es divisible entre x^2+1 y además la suma de sus coeficientes es nula. Si al dividir $P_{(x)}$ entre $(x-2)$ se obtuvo como residuo 50, halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-1).

A) $2(x-1)$ B) 1
C) -2
D) $6x$ E) $2x+2$

Resolución

Como $P_{(x)}$ es de cuarto grado divisible por x^2+1 y de coeficiente principal 3, entonces, usando la identidad fundamental

$$P_{(x)}=(x^2+1)(3x^2+bx+c) \text{ y además}$$

$$P_{(1)}=(2)(3+b+c)=0$$

$$\rightarrow\ b+c=-3 \qquad \text{(I)}$$

También

$$P_{(2)}=50\ \left(\text{resto de } \frac{P_{(x)}}{x-2} \text{ es } P_{(2)}\right)$$

$$\rightarrow\ P_{(2)}=(5)(12+2b+c)=50$$

$$2b+c=-2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$b=1\ \wedge\ c=-4$$

Luego

$$P_{(x)}=(x^2+1)(3x^2+x-4)$$

PROBLEMA N.° 32

Sabiendo que al dividir $\dfrac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{3^m-1}-y^{3^m-1}}$,

se obtiene como segundo término en su cociente a $x^{16}y^8$, ¿de cuántos términos está compuesto su cociente notable?

A) 4
B) 3
C) 5
D) 7
E) 6

Resolución

De

$$\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{3^m-1}-y^{3^m-1}}=\frac{\left(x^{3^m-1}\right)^{\ell}-\left(y^{3^m-1}\right)^{\ell}}{x^{3^m-1}-y^{3^m-1}},$$

donde $\ell=\dfrac{2^n}{3^m-1}$,

hallamos el segundo término

$$t_2=\left(x^{3^m-1}\right)^{\ell-2}\left(y^{3^m-1}\right)=x^{16}\cdot y^8 \text{ (dato)}$$

$\rightarrow (3^m-1)(\ell-2)=16 \quad \wedge \quad 3^m-1=8$

$\rightarrow \ell-2=2 \quad \wedge \quad 3^m=9$

$\rightarrow \ell=4 \quad \wedge \quad m=2$

Por lo tanto, el número de términos es $\ell=4$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Halle el lugar que ocupa el término de grado 101 en el desarrollo del cociente notable generado por

$\dfrac{x^{180}-z^{80}}{x^9-z^4}$.

A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

Resolución

Se tiene el cociente notable generado por

$$M_{(x;\,z)}=\frac{x^{180}-z^{80}}{x^9-z^4}=\frac{\left(x^9\right)^{20}-\left(z^4\right)^{20}}{x^9-z^4}$$

Entonces

$$t_K=\left(x^9\right)^{20-K}\left(z^4\right)^{K-1}=x^{180-9K}\cdot z^{4K-4}$$

Luego

$(180-9K)+(4K-4)=101 \quad$ (dato)

$176-5K=101$

$5K=75$

$K=15$

Por lo tanto, el término de grado 101 está en el lugar 15.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Calcule la suma de todos los exponentes de las variables del desarrollo de $\dfrac{x^{100}-y^{100}}{x^4-y^4}$.

A) 2400 B) 2500 C) 2600
D) 2700 E) 2800

Como el término independiente es -216, entonces

$$P_{(0)}=(-1)^3(-2)^3(-b)^3=-216$$

$$8b^3=216$$

$$b=3$$

Luego

$$P_{(x)}=(x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3$$

Por lo tanto, el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x-4}$ es

$$P_{(4)}=(3)^3(2)^3(1)^3=216$$

Clave D

PROBLEMA N.° 37

Determine un polinomio mónico de cuarto grado que sea divisible separadamente por x^2-3x+2; x^2-4; x^2+x-2, y que al ser dividido entre $x-3$ deje un resto igual a 100. Luego indique el residuo de dividir dicho polinomio entre $x+1$.

A) 18 B) 34 C) 36
D) 72 E) 48

Resolución

Sea $P_{(x)}$ de cuarto grado, mónico y divisible por

$$x^2-3x+2;\ x^2-4;\ x^2+x-2$$

Luego

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Observación

Si $P_{(x)}$ es divisible por $a_{(x)}$, $b_{(x)}$, $c_{(x)}$ separadamente, será divisible por el mínimo común múltiplo de $a_{(x)}$, $b_{(x)}$, $c_{(x)}$.

Entonces $P_{(x)}=(x-1)(x-2)(x+2)(x+b)$, pues $P_{(x)}$ es mónico; además, el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x-3}$ es $P_{(3)}=100$.

Luego

$$P_{(3)}=(2)(1)(5)(3+b)=100$$

$$b=7$$

De donde

$$P_{(x)}=(x-1)(x-2)(x+2)(x+7)$$

Por lo tanto, el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x+1}$ es

$$P_{(-1)}=(-2)(-3)(1)(6)=36$$

Clave C

PROBLEMA N.° 38

Si un término del cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^{n+p}}{x^3y^{n-3}-y^{n+2}}$ es x^{18}, halle el valor de $(n-p)$.

A) 16 B) 9
C) 10
D) 11 E) 17

Luego

$$t_{\underset{\rightarrow}{K}}=(x^4)^{\ell-K}(y^7)^{K-1}=x^{4(\ell-K)}\cdot y^{7(K-1)}$$

$$t_{\underset{\rightarrow}{K}}=x^p y^{28}$$

$$t_{\underset{\leftarrow}{K}}=(y^7)^{\ell-K}(x^4)^{K-1}=y^{7(\ell-K)}\cdot x^{4(K-1)}$$

$$t_{\underset{\leftarrow}{K}}=x^{16}y^{2(p-6)}$$

Entonces

$$7(K-1)=28 \wedge 4(\ell-K)=p \wedge 7(\ell-K)=2(p-6)$$

$$K=5 \rightarrow 8\cancel{(\ell-K)}(p-6)=7p\cancel{(\ell-K)}$$

$$8p-48=7p$$

$$p=48$$

$\rightarrow \ell-K=12$

Así $\ell=17$, pues $K=5$.

Entonces

$$m=4\ell=68$$

$$n=7\ell=119$$

$\therefore\ m+n+p=68+119+48=235$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 41

Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+1)^4$ se obtuvo como residuo x^3+2-3x. Calcule el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre x^2+2x+1.

A) $x+1$ B) $3x+1$

C) $3x-1$

D) 4 E) -3

Resolución

Como x^3+2-3x es el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x+1)^4$, entonces

$$P_{(x)}=(x+1)^4q_{(x)}+x^3-3x+2$$

$$=((x+1)^2)^2q_{(x)}+x^3-3x+2$$

$$=(x^2+2x+1)^2q_{(x)}+x^2\cdot x-3x+2$$

Para calcular el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x^2+2x+1}$ aplicamos el teorema del resto

$$x^2+2x+1=0 \leftrightarrow x^2=-2x-1$$

Entonces en $P_{(x)}$

$$R_{(x)}=0^2q_{(x)}+(-2x-1)x-3x+2$$

$$=0-2x^2-x-3x+2$$

$$=-2x^2-4x+2;$$

no puede ser resto ya que dicho resto es de grado menor que 2, así que

$$=-2(-2x-1)-4x+2$$

$$=4x+2-4x+2=4$$

$\therefore\ R_{(x)}=4$

Clave **D**

Resolución

Del dato

$F_{(x)}=(x+1)^nQ_{(x)}+x+1$

Evaluamos en

$x=1$

$F_{(1)}=2^nQ_{(1)}+2,\quad Q_{(x)}=3$ (dato)

$98=2^n\cdot 3+2$

$3\cdot 2^n=96$

$2^n=32$

$\therefore\ n=5$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

Dado $P_{(x)}=x^3-6x^2+11x-6$,
divisible por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$,
calcule el residuo de dividir
$P_{(x)}\div\left[x+\left(a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1}\right)\right]$,
donde a; b; c son diferentes entre sí.

A) -24 B) 24
C) 0
D) 12 E) -12

Resolución

Como

$P_{(x)}=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,

entonces, sin pérdida de generalidad, asumimos que

$a=1,\ b=2$ y $c=3$.

Entonces

$$a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$

$$=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{6}{6}=1$$

Luego

$$\frac{P_{(x)}}{x+\underbrace{a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1}}_{1}}=\frac{P_{(x)}}{x+1}$$

Entonces, el resto de dicha división es $P_{(-1)}$.

$R=P_{(-1)}=(-2)(-3)(-4)=-24$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Dados tres números reales a; b; c $(a\neq b\neq c)$ que verifican

$a^3+pa+q=0$;

$b^3+pb+q=0$;

$c^3+pc+q=0$;

calcule el valor de $\left(\dfrac{abc}{ab+ac+bc}\right)\dfrac{p}{q}$.

A) 1 B) -2 C) -1
D) 2 E) $\dfrac{p+q}{pq}$

Resolución

De problema

$a^3+pa+q=0$

$b^3+pb+q=0$

$c^3+pc+q=0$

Evaluamos en (I)

$$P_{(1)}=(1+1+1)(a+2)=9$$

$$3(a+2)=9$$

$$a=1$$

$$P_{(2)}=\left(2^{n-1}+2^{n-2}+1\right)(2a+2)=388$$

$$\left(2^{n-1}+2^{n-2}+1\right)(4)=388, \text{ pues } a=1$$

$$2^{n-1}+2^{n-2}+1=97$$

$$2^{n-1}+2^{n-2}=96$$

$$2\cdot 2^{n-2}+2^{n-2}=96$$

$$3\cdot 2^{n-2}=96$$

$$2^{n-2}=32$$

$$\rightarrow\ n-2=5$$

$\therefore\ n=7$

Clave D

PROBLEMA N.° 48

¿Qué relación cumplen p y q, tal que $x^3-pqx+q$ sea divisible por x^2+mx-1?
Considere $m\in\mathbb{R}^+$.

A) $p+q=0$
B) $q^2-1=pq$
C) $pq=1+q^2$
D) $p-q=1$
E) $p^2-1=pq$

Resolución

Como $\dfrac{x^3-pqx+q}{x^2+mx-1}$ es exacta, entonces, por el método de Horner

$$\begin{array}{c|cc:cc}
1 & 1 & 0 & -pq & q \\
\hline
-m & \downarrow & -m & 1 & \\
1 & & & m^2 & -m \\
\hline
 & 1 & -m & 0 & 0
\end{array}$$

Del resto

$$m^2+1=pq \quad \wedge \quad m=q$$

$\therefore\ q^2+1=pq$

Clave C

PROBLEMA N.° 49

Al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-1)^2$, se obtiene como residuo $2x$; y al dividirlo por $(x-2)^3$, da como residuo $3x$. Halle el residuo de la división de $P_{(x)}$ entre $(x-1)(x-2)$.

A) $8x+4$
B) $4x-2$
C) $7x+3$
D) $-x+1$
E) $-x-1$

Resolución

De los datos

$$P_{(x)}=(x-1)^2q_{(x)}+2x \ \rightarrow\ P_{(1)}=2$$

$$P_{(x)}=(x-2)^2M_{(x)}+3x \ \rightarrow\ P_{(2)}=6$$

Nos piden hallar el resto de dividir $\frac{P_{(x)}}{(x+6)^2}$.

Para ello aplicamos el teorema del resto

$$(x+6)^2=0 \leftrightarrow x^2+12x+36=0$$
$$x^2=-12x-36$$

Reemplazando en

$$P_{(x)}=\left((x+6)^2\right)^2 q_{(x)}+x^2\cdot x-a^2x+2a^3$$

tenemos

$$R_{(x)}=0^2q_{(x)}+(-12x-36)x-a^2x+2a^3$$
$$=-12x^2-36x-a^2x+2a^3$$
$$=-12(-12x-36)-\left(36x+a^2\right)x+2a^3$$
$$=144x+432-\left(36+a^2\right)x+2a^3$$
$$=\left(108-a^2\right)x+432+2a^3$$

$$\therefore\ R_{(x)}=\left(108-a^2\right)x+2a^3+432$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 52

Indique el término independiente de un polinomio de tercer grado que al ser dividido entre $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$ dé el mismo resto 20 y, además, que sea divisible por $(x+1)$.

A) 4 B) 36 C) 18
D) 10 E) 14

Resolución

Sea $P_{(x)}$ el polinomio de tercer grado que genera el mismo resto igual a 20, cuando se divide por separado por $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$.

Entonces

$$P_{(x)}=a(x-1)(x+2)(x-4)+20$$

además

$$\frac{P_{(x)}}{x+1} \text{ es exacta } \rightarrow P_{(-1)}=0$$

Luego

$$P_{(-1)}=a(-2)(1)(-5)+20=0$$
$$10a=-20$$
$$a=-2$$

de donde

$$P_{(x)}=-2(x-1)(x+2)(x-4)+20$$

Por lo tanto, el término independiente será

$$P_{(0)}=-2(-1)(2)(-4)+20=4$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 53

Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-n)$, se obtuvo como resto m; y al dividirlo entre $(x-m)$, dio como resto n. Halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $x^2-(m+n)x+mn$.

A) $x-m+n$ B) $x-n-m$
C) $x+m+n$
D) $x-n+m$ E) $-x+m+n$

Resolución

Si m es el resto de dividir $\frac{P_{(x)}}{x-n}$, entonces $R=P_{(n)}=m$. Similarmente, si n es el resto de dividir $\frac{P_{(x)}}{x-m}$, entonces $R=P_{(m)}=n$.

Resolución

Vemos que

$$\frac{x^{4m}-x^{4b}}{x^2-x^{-3}}=\frac{\left(x^2\right)^{2m}-\left(x^{-3}\right)^{-\frac{4b}{3}}}{x^2-x^{-3}}$$

esto implica que

$$2m=-\frac{4b}{3} \qquad (\alpha)$$

Luego, el décimo término contado del final es

$$\underset{\leftarrow}{t_{10}}=\left(x^{-3}\right)^{2m-10}\left(x^2\right)^9 \text{ (es independiente de } x\text{)}$$

$$=x^{-3(2m-10)}x^{18}=x^{18-3(2m-10)}$$

Como es independiente de x, entonces

$$18-3(2m-10)=0$$

$$2m-10=6$$

$$m=8$$

Así, la división que genera cociente notable es

$$\frac{\left(x^2\right)^{16}-\left(x^{-3}\right)^{16}}{x^2-x^{-3}}$$

Calculamos

$$t_K=\left(x^2\right)^{16-K}\left(x^{-3}\right)^{K-1}=x^{32-2K}\cdot x^{-3K+3}=x^{35-5K}$$

Como el término es racional y entero, entonces el exponente de x debe ser entero positivo o cero.

Entonces

$$35-5K\geq 0 \leftrightarrow K\leq 7$$

de donde

$$K=1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 7$$

Por lo tanto, existen 7 términos racionales enteros.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 56

Simplifique la expresión

$$\frac{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+...+x^{(2n-1)p}}{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+...+x^{(n-1)p}}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right).$$

A) $x^{3np}-1$ B) $x^{3np}+1$

C) $x^{2p}-1$

D) 1 E) x^p-1

Resolución

Tenemos

$$\frac{1+x^p+x^{2p}+...+x^{(2n-1)p}}{1+x^p+x^{2p}+...+x^{(n-1)p}}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right)$$

$$=\frac{1+x^p+\left(x^p\right)^2+...+\left(x^p\right)^{2n-1}}{1+x^p+\left(x^p\right)^2+...+\left(x^p\right)^{n-1}}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{1-\left(x^p\right)^{2n}}{\cancel{1-x^p}}}{\dfrac{1-\left(x^p\right)^n}{\cancel{1-x^p}}}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right)$$

$$=\frac{1-\left(x^{np}\right)^2}{1-x^{np}}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right)$$

$$=\frac{\left(1+x^{np}\right)\cancel{\left(1-x^{np}\right)}\left(1-x^{np}+x^{2np}\right)}{\cancel{\left(1-x^{np}\right)}}=1+x^{3np}$$

Por lo tanto, después de simplificar se obtiene $x^{3np}+1$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 59

Si el polinomio $P_{(x)}=x^n-bx^{n-1}+bx-1$ es divisible por $Q_{(x)}=x^m+ax^{m-2}+cx^{m-3}+d$ y $Q_{(x)}$ es divisible por $(x-1)^2$, calcule el valor de $\dfrac{b}{n-nb}$ n; $m\in\mathbb{Z}^+$.

A) 1 B) −2 C) −1 D) 2 E) −1/2

Resolución

Sean $P_{(x)}=x^n-bx^{n-1}+bx-1;\ n\in\mathbb{Z}^+$

$Q_{(x)}=x^m+ax^{m-2}+cx^{m-3}+d;\ \ m\in\mathbb{Z}^+$

Como $P_{(x)}$ es divisible por $Q_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es divisible por $(x-1)^2$, entonces $P_{(x)}$ es divisible por $(x-1)^2$; es decir, $\dfrac{P_{(x)}}{(x-1)^2}$ es una división exacta. Luego podemos aplicar la regla de Ruffini dos veces.

	1	$-b$	0	0	$0\ \ldots\ 0$	b	-1
1		1	$1-b$	$1-b$		$1-b$	1
	1	$1-b$	$1-b$	$1-b$	$1-b$	1	$\boxed{0}$
1		1	$2-b$	$3-2b$		$n-1-(n-2)b$	
	1	$2-b$	$3-2b$	$4-3b$	$\ldots$	$\boxed{((n-1)-(n-2)b)+1}$	

Entonces, por ser exacta

$$\cancel{1}+(n-\cancel{1})-(n-2)b=0$$

$$n-(n-2)b=0\ \rightarrow\ n-nb+2b=0\ \rightarrow\ n-nb=-2b$$

$$\therefore\ \ \frac{b}{n-nb}=\frac{\cancel{b}}{-2\cancel{b}}=-\frac{1}{2}$$

Clave $\boxed{E}$

CAPÍTULO 7

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Test

PROBLEMA N.° 1

Si $x+2$ es un factor primo del polinomio
$S_{(x)}=x^3-ax+4$,
indique cuál es el valor de a.

A) -2 B) 2 C) 3
D) -1 E) 1

Resolución

Si $x+2$ es un factor de

$S_{(x)}=x^3-ax+4$

$\rightarrow$ $S_{(-2)}=(-2)^3-a(-2)+4=0$

$\rightarrow$ $-8+2a+4=0$ $\rightarrow$ $a=2$

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Si $x+3$ es un factor primo de $T_{(x)}=x^3+bx+6$, halle la suma de los otros factores primos.

A) $2x-2$ B) $2x-1$ C) $2x-4$
D) $2x-3$ E) $2x+1$

Resolución

Del dato, $(x+3)$ es un factor de

$T_{(x)}=x^3+bx+6$

Entonces

$\frac{T_{(x)}}{x+3}$ es exacta

Dividimos por la regla de Ruffini

	1	0	b	6
−3	↓	−3	9	−6
	1	−3	2	0

$\underbrace{1 \quad -3 \quad 2}_{q_{(x)}}$

El otro factor es

$q_{(x)}=x^2-3+2$

$=(x-1)(x-2)$

Por lo tanto, la suma de los otros factores es

$x-1+x-2=2x-3$

Clave D

PROBLEMA N.° 3

En el polinomio $P_{(a;\,b)}=a^3b+a^2b-a^3-a^2$, calcule la suma entre el número de factores algebraicos y el número de factores primos.

A) 14 B) 15 C) 10
D) 7 E) 13

PROBLEMA N.° 7

¿Cuántos factores algebraicos tiene el polinomio
$P_{(a;\,b)}=a^3b^2-a^3b+2a^2b^2-2a^2b$?

A) 23 B) 24 C) 15
D) 14 E) 17

Resolución

Factorizamos

$$P_{(a;\,b)}=\underline{\underline{a^3b^2}}-\underline{\underline{a^3b}}+\underline{2a^2b^2}-\underline{2a^2b}$$
$$=a^3b(b-1)+2a^2b(b-1)$$
$$=(b-1)(\underline{\underline{a^3b}}+\underline{\underline{2a^2b}})$$
$$=a^2b(a+2)(b-1)$$

Entonces, el número de factores algebraicos será

$$(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)-1=23$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Indique el factor primo de mayor grado del polinomio
$P_{(x)}=x^4+2x^3+x^2+x+1$.

A) x^3+x^2+1
B) x^2+1
C) x^2+3x+1
D) x^2-x-1
E) x^3+x+1

Resolución

Factorizamos

$$P_{(x)}=\underline{x^4}+\underline{2x^3}+\underline{x^2}+x+1$$
$$=x^2(x^2+2x+1)+(x+1)$$
$$=x^2\underline{\underline{(x+1)}}^2+\underline{\underline{(x+1)}}$$
$$=(x+1)\{x^2(x+1)+1\}$$
$$=(x+1)(x^3+x^2+1)$$

Por lo tanto, el factor primo de mayor grado es
x^3+x^2+1

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

Determine el polinomio que no es un factor de $F_{(x)}$, tal que
$F_{(x)}=x^9+x^6+x^3+1$.

A) x^2+x+1 B) $x+1$
C) x^2-x+1
D) x^4-x^2+1 E) x^2+1

Resolución

Factorizamos

$$F_{(x)}=\underline{\underline{x^9}}+\underline{\underline{x^6}}+\underline{\underline{x^3+1}}$$
$$=x^6+\underline{\underline{(x^3+1)}}+\underline{\underline{x^3+1}}$$
$$=(x^3+1)(x^6+1)$$
$$=\quad(x^3+1)\quad\left((x^2)^3+1\right)$$
$$(x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

Por lo tanto, de las alternativas, (x^2+x+1) no es un factor polinomio.

Clave **A**

Problemas resueltos

NIVEL I

PROBLEMA N.° 1

Indique uno de los factores primos del siguiente polinomio:
$P_{(a;\,b)}=a^3+a^2-ab^2-b^2$.

A) $a-b$ B) $a+2b$
C) a^2-b
D) b^2-a E) $a-1$

Resolución

Agrupamos como se indica

$$=\underline{a}^3+\underline{a}^2-ab^2-b^2$$
$$=a^2(\underline{a+1})-b^2(\underline{a+1})$$
$$=(a+1)(a^2-b^2)$$
$$=(a+1)(a+b)(a-b)$$

Luego, uno de los factores primos puede ser $a+1$; $a+b$; $a-b$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

Indique un factor primo del polinomio
$T_{(a;\,b)}=a^2-b^2-6a+9$.

A) $a+b-3$ B) $a+b+3$
C) $a-b+3$
D) $a-b-1$ E) $a+b+1$

Resolución

Agrupamos convenientemente

$$T_{(a;\,b)}=\underline{a}^2-b^2-\underline{6a}+\underline{9}$$
$$=\underbrace{a^2-6a+9}-b^2$$
$$=(a-3)^2-b^2 \quad \text{(diferencia de cuadrados)}$$

$$\rightarrow\ T_{(a;\,b)}=(a-3+b)(a-3-b)$$

Entonces, sus factores primos son $a+b-3$ y $a-b-3$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Halle un factor primo del polinomio
$T_{(a;\,b)}=2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+4\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)+9abc$.

A) $a+b$
B) $a+c$
C) $b+c$
D) $a+2b$
E) $a+b+c$

Resolución

Distribuimos y agrupamos como se indica

$$=\underline{2a^2b}+\underline{2b^2c}+\underline{2c^2a}+\underline{4a^2c}+\underline{4c^2b}+\underline{4b^2a}+\underline{abc}+\underline{8abc}$$

$$=2ab(\underline{a+2b})+bc(\underline{a+2b})+2c^2(\underline{a+2b})+4ac(\underline{a+2b})$$

y extraemos el factor común indicado.

Resolución

Por aspa simple en cada caso, y recordando que $(x+1)$ es un factor, tenemos

$P_{(x)}=x^2-3x+a$

$$\begin{array}{lll} x & +1 & \\ x & +a & \rightarrow\ ax+x=-3x \ \rightarrow\ a=-4 \end{array}$$

$Q_{(x)}=2x^2-bx+5$

$$\begin{array}{lll} x & +1 & \\ 2x & +5 & \rightarrow\ 5x+2x=-bx \ \rightarrow\ b=-7 \end{array}$$

$\therefore\ a-b=-4-(-7)=3$

Clave C

PROBLEMA N.° 7

Determine un factor primo de

$P_{(a;\,b)}=a^3+ab^2-2b^3.$

A) $a+b$ B) $a-2b$ C) $a^2-ab+2b^2$

D) $a+2b$ E) $a^2+ab+2b^2$

Resolución

> **Observación**
>
> $-2b^3=-b^3-b^3$

Agrupamos como se indica:

$$=\underline{a^3}+\underline{ab^2}-\underline{b^3}-\underline{b^3}$$

$$=\left(a^3-b^3\right)+\left(ab^2-b^3\right)$$

$$=\underline{(a-b)}\left(a^2+ab+b^2\right)+b^2\underline{(a-b)}$$

$$=(a-b)\left(a^2+ab+b^2+b^2\right)$$

$$\rightarrow\ P_{(a;\,b)}=(a-b)\ \left(a^2+ab+2b^2\right)$$

Clave E

> **Observación**
>
> $a^2+ab+2b^2$ no es factorizable porque no admite aspa simple; por lo tanto, $a^2+ab+2b^2$ es un factor primo.

PROBLEMA N.° 8

Indique el término lineal del factor primo de mayor grado del polinomio

$P_{(x)}=x^4+2x^3+2x^2-1.$

A) x B) $-x$ C) $2x$

D) $-2x$ E) $3x$

Resolución

Seguramente lo primero que usted intentaría sería factorizar mediante el aspa doble especial; sin embargo, notará que el polinomio no admite ser factorizado así.

En este caso, solo le queda una posibilidad: mediante los divisores binómicos. Rápidamente, se dará cuenta de que $P_{(x)}$ se anula para $x=-1$.

Luego, por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & \downarrow & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad -1}_{Q_{(x)}}$$

Entonces

$$P_{(x)}=(x+1)\ Q_{(x)}=(x+1)(\underbrace{x^3+x^2+x-1}_{(*)})$$

(*) Toda cúbica, si es factorizable sobre $\mathbb{Q}$, necesariamente admitirá divisores binómicos.

Como x^3+x^2+x-1 no se anula para 1 ni -1, entonces no es factorizable.

Por lo tanto, su término lineal en x^3+x^2+x-1 es x.

Clave A

PROBLEMA N.° 12

Indique el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio
$P_{(x)}=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$.

A) $x-2$ B) $x-4$ C) $x+4$
D) $x+1$ E) $x+3$

Resolución

Cuarto grado aspa doble especial

$$P_{(x)}=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & \times & \boxed{-x} & \times & -12 \\ x^2 & & \boxed{-x} & & -2 \end{array}$$

$$\text{ST}: -14x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{x^2} -13x^2 : \text{SDT}$$

$$=\left(x^2-x-12\right)\left(x^2-x-2\right)$$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -4 \\ x & & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \times & -2 \\ x & & 1 \end{array}$$

$$=(x-4)(x+3)(x-2)(x+1)$$

Sus factores primos: $x-4$; $x+3$; $x-2$; $x+1$

Por lo tanto, el de mayor suma de coeficientes es $x+3$.

Clave E

PROBLEMA N.° 13

A continuación, se muestra un esquema de factorización por aspa simple:

$$G_{(x)}=3x^2-(2d+3)x+6;\ a>0$$

$$\begin{array}{ccc} ax & \times & -2 \\ bx & & c \end{array}$$

¿Cuál es un valor de $a+b+c+d$?

A) 4
B) 5
C) 3
D) 7
E) Hay dos respuestas correctas.

Resolución

Del aspa simple:

I. $ab=3 \rightarrow a=1; b=3 \vee a=3;\ b=1$.

II. $-2c=6 \rightarrow c=-3$

III. $ac-2b=-(2d+3)$

- Si $a=1$; $b=3$; $c=-3$, entonces en (III)
  $\rightarrow -3-6=-(2d+3)$
  $\rightarrow d=3$
  $\rightarrow a+b+c+d=4$
- Si $a=3$; $b=1$; $d=-3$, entonces en (III)
  $\rightarrow -9-2=-(2d+3)$
  $\rightarrow d=4$
  $\rightarrow a+b+c+d=5$

Por lo tanto, hay dos respuestas correctas.

Clave E

PROBLEMA N.° 14

Halle la suma de los factores primos del siguiente polinomio
$P_{(x)}=x^4-4x^3-x^2+16x-12$.

A) $4(x-1)$
B) $4x-3$
C) $3x-1$
D) $2x^2-4x-4$
E) x^3+3x-2

Entonces, sus factores primos son

$a;\ b;\ c;\ a-b;\ b-c;\ c-a$

Por lo tanto, existen 6 factores primos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 17

¿Cuántos factores primos tiene el polinomio $P_{(x)}=x^6-2x^4+1$?

A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución

Separamos $-2x^4 \equiv -x^4-x^4$

$$\rightarrow\ P_{(x)}=(x^6-x^4)-(x^4-1)$$

$$=x^4\underline{(x^2-1)}-\underline{(x^2-1)}(x^2+1)$$

$$=(x^2-1)(x^4-x^2-1)$$

$$=(x+1)(x-1)\underbrace{(x^4-x^2-1)}_{(*)}$$

(*) El factor (x^4-x^2-1) es primo ya que no admite aspa doble especial ni divisores binómicos.

Por lo tanto, $P_{(x)}$ tiene 3 factores primos.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

Halle un factor primo del polinomio

$M_{(x)}=x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$.

A) x^2-x+1
B) x^2+x-1
C) x^2-x+1
D) x^2+x+1
E) x^3+x-1

Resolución

El polinomio $M_{(x)}$ es recíproco.

Factorizamos x^3

$$M_{(x)}=x^3\left\{x^3-3x^2+6x-7+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right\}$$

y agrupamos convenientemente

$$=x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7\right\}$$

Haciendo un cambio de variable

$$x+\frac{1}{x}=y$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y \end{cases}$$

se tendrá

$$M_{(x)}=x^3\{y^3-3y-3(y^2-2)+6y-7\}$$

$$=x^3\{y^3-3y^2+3y^2-1\}=x^3(y-1)^3$$

Luego, por la regla de Ruffini

	1	-6	11	-6
1	↓	1	-5	6
	1	-5	6	0

$$Q_{(t)} = (t-1)\left(t^2-5t+6\right)$$

$$\begin{array}{ccc} t & \times & -3 \\ t & & -2 \end{array}$$

$$= (t-1)(t-2)(t-3)$$

Reponiendo

$t=a+b$

$Q_{(a;\,b)}=(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)$

Factores primos

$a+b-1;\ a+b-2;\ a+b-3$

Clave E

NIVEL II

PROBLEMA N.° 21

Indique el número de factores irreductibles de $P_{(x;\,y;\,z)}=x^4y^2z^7+xy^2z^7+3x^3y^2z^7+3x^2y^2z^7$.

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1

Resolución

Todos los términos tienen como factor común a xy^2z^7.

Luego

$$P_{(x;\,y;\,z)}=xy^2z^7\underbrace{\left(x^3+1+3x^2+3x\right)}_{(x+1)^3}$$

$$\rightarrow P_{(x;\,y;\,z)}=xy^2z^7(x+1)^3$$

Factores irreductibles:

$x;\ y;\ z;\ x+1$

Por lo tanto, tiene 4 factores irreductibles.

Clave D

PROBLEMA N.° 22

Factorice el polinomio $M_{(a;\,b)}=a^2-4+2ab+b^2$ e indique un factor primo.

A) $a+b+2$
B) $b-2$
C) $a+b-4$
D) $a+2$
E) $b+2$

Resolución

Agrupando convenientemente

$$\underset{\sim}{a^2}-4+\underset{\sim}{2ab}+\underset{\sim}{b^2}$$

$$=\left(a^2+2ab+b^2\right)-4=(a+b)^2-2^2$$

Por diferencia de cuadrados, que es equivalente a

$$M_{(a;\,b)}=(a+b+2)(a+b-2)$$

Por lo tanto, un factor primo es $a+b+2$.

Clave A

PROBLEMA N.° 23

Halle un factor primo del polinomio $P_{(x)}=x^2+(b+c+2d)x+d^2+(b+c)d+bc$.

A) $x+b+d$
B) $x+2d$
C) $x+d+b+c$
D) $x+c$
E) $x-2c$

PROBLEMA N.° 26

Factorice el polinomio

$P_{(a;\,b;\,c)}=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc.$

A) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$ B) $(ab+ac+bc)(a+b+c)$ C) $(a+b)(b+c)(c+a)$

D) $(a-b)(b-c)(c-a)$ E) $(ab+ac+bc)(a-b+c)$

Resolución

Operando

$$P_{(a;\,b;\,c)}=ab^2+ac^2-\cancel{2abc}+bc^2+ba^2-\cancel{2abc}+ca^2+cb^2-\cancel{2abc}+8abc$$

$$=\underline{ab^2}+\underline{ac^2}+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+\underline{2abc}$$

Agrupamos como se indica

$$a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)+a^2(b+c)$$

$$a(b+c)^2+bc(b+c)+a^2(b+c)$$

$$(b+c)\{\underbrace{a(b+c)+bc+a^2}_{(a+b)(a+c)}\}$$

$\therefore\ P_{(a;b;c)}=(a+b)(b+c)(c+a)$

Clave C

PROBLEMA N.° 27

Indique un factor primo del polinomio

$P_{(x;\,y;\,z)}=[(x-y+z)(x-y-z)+1]^2-4(x-y)^2.$

A) $x+y+z+1$ B) $x-y+z+1$ C) $x-y+z$

D) $x-y+z+2$ E) $z+y-x+2$

Resolución

Observación

$(x-y+z)(x-y-z)\equiv(x-y)^2-z^2$

Luego

$$P_{(x;\,y;\,z)}=\left[(x-y)^2-z^2+1\right]^2-4(x-y)^2$$

Por diferencia de cuadrados

$$F_{(x;\,y)}=\left(x^2+1+x^2+2xy+y^2\right)\left(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-2xy-y^2\right)$$

$$=\left(2x^2+2xy+y^2+1\right)\left(1-2xy-y^2\right)$$

Vemos que la alternativa que no aparece como término de un factor primo de $F_{(x;\,y)}$ es $-x^2$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Indique el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes, después de factorizar $M_{(x)}=x^4+4x^2+16$.

A) x^2+x-2

B) x^2+2x-4

C) x^2+x-8

D) x^2+8

E) x^2+2x+4

Resolución

Para formar una diferencia de cuadrados basta escribir $4x^2$ como $8x^2-4x^2$, así

$$M_{(x)}=\underbrace{x^4+8x^2+16}-\underbrace{4x^2}$$

$$=\quad\left(x^2+4\right)^2\;-\;(2x)^2$$

$$M_{(x)}=\left(x^2+4+2x\right)\left(x^2+4-2x\right)$$

Los dos factores cuadráticos son primos ya que no admiten el aspa simple.

Por lo tanto, el factor primo de mayor suma de coeficientes es x^2+2x+4.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 30

Factorice los polinomios

$P_{(x;\,y)}=6x^2+19xy+15y^2-11x-17y+4;$

$F_{(x;\,y)}=x^2+y^2-4+2xy+3x+3y,$

y señale como respuesta el factor primo no común de mayor suma de coeficientes.

A) $3x+5y-4$

B) $2x+3y-1$

C) $x+y+4$

D) $x+y-1$

E) $2x+y+4$

Resolución

Ambos polinomios se factorizan por el aspa doble

$$P_{(x;\,y)}=6x^2+19xy+15y^2-11x-17y+4$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 5y & -4 \\ 2x & 3y & -1 \end{array}$$

$$=(3x+5y-4)(2x+3y-1)$$

$$F_{(x;\,y)}=x^2+2xy+y^2+3x+3y-4$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & +4 \\ x & y & -1 \end{array}$$

$$=(x+y+4)(x+y-1)$$

Todos los factores primos son no comunes.

Por lo tanto, el de mayor suma de coeficientes es $x+y+4$.

Clave **C**

Sumamos y restamos y^2

$$M_{(y)}=y^5-y^2+\underline{y^2+y+1}$$

$$=y^2(y-1)\underline{(y^2+y+1)}+\underline{y^2+y+1}$$

$$=(y^2+y+1)(y^3-y^2+1)$$

Reponiendo $y=z^2$

$$M_{(z)}=(z^4+z^2+1)(z^6-z^4+1)$$

$$=(z^2+z+1)(z^2-z+1)(z^6-z^4+1)$$

Por lo tanto, $M_{(z)}$ tiene 3 factores primos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Calcule la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio
$H_{(x)}=x^3-x^2-17x+33$.

A) -3
B) -6
C) -7
D) -5
E) -8

Resolución

Por divisores binómicos

I. Las posibles raíces: $\pm\{1; 3; 11; 33\}$

II. Para 3

$\rightarrow$ $H_{(3)}=3^3-3^2-17\times3+33=0$

$\rightarrow$ $(x-3)$ es un factor.

III. Por la regla de Ruffini: $H_{(x)}\div(x-3)$

	1	-1	-17	33
3	↓	3	6	-33
	1	2	-11	0

Entonces

$$H_{(x)}=(x-3)(x^2+2x-11),$$

cuyos factores primos son $x-3$ y $x^2+2x-11$. La suma de coeficientes de un factor primo puede ser $-2 \vee -8$.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

Halle un factor primo del polinomio
$P_{(a;\,b)}=ab-(ab-1)(1+a-ab)(b+1)b-1$.

A) $1+ab$
B) ab
C) $ab-1$
D) $1+a+b$
E) $a+b$

Resolución

Agrupamos

$$P_{(a;\,b)}=(ab-1)-(ab-1)(1+a-ab)(b+1)b$$

$$=(ab-1)[1-(1+a-ab)(b+1)b]$$

Aquí ya se observa un factor primo: $ab-1$.

Clave **C**

Resolución

Descomponemos por el aspa simple

$$\begin{array}{lr} x^4+4x^5- & (x^6-1)^2 \\ x^2 & -(x^3-1)^2 \\ x^2 & (x^3+1)^2 \end{array}$$

Término de comprobación

$$x^2\underbrace{\left[(x^3+1)^2-(x^3-1)^2\right]}_{4x^3}=4x^5$$

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=\left[x^2-(x^3-1)^2\right]\left[x^2+(x^3+1)^2\right]$$

$$=(x+x^3-1)(x-x^3+1)\left[x^2+(x^3+1)^2\right]$$

Recuerda

Si $T_{(x)}=A^{\alpha}_{(x)}\cdot B^{\beta}_{(x)}\cdot C^{\gamma}_{(x)}$, $A_{(x)}$, $B_{(x)}$, $C_{(x)}$ son factores primos, el número de factores algebraicos está dado por $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)-1$.

Por lo tanto, el número de factores algebraicos de $Q_{(x)}$ es $(1+1)(1+1)(1+1)-1=7$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

Factorice el polinomio

$F_{(a;b;c)}=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+4c(a+b)-5(a+b+c)+2$

e indique el factor primo de mayor término independiente.

A) $2a+2b+2c+1$

B) $a+b+c-2$

C) $2a+2b+c-1$

D) $a+b+c+2$

E) $2a+2b+2c-1$

Resolución

Haciendo $a+b=x$, tenemos que

$$F_{(x;\,c)}=(x+c)^2+(x-c)^2+4cx-5(x+c)+2$$

$$=2(x^2+c^2)+4cx-5x-5c+2$$

Luego, ordenamos el polinomio y aplicamos el aspa doble

$$=2x^2+4cx+2c^2-5x-5c+2$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & 2c & -1 \\ x & c & -2 \end{array}$$

$$F_{(x;\,c)}=(2x+2c-1)(x+c-2)$$

$$F_{(a;\,b;\,c)}=(2a+2b+2c-1)(a+b+c-2)$$

Por lo tanto, el factor primo de mayor término independiente es $2a+2b+2c-1$.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 40

Halle la suma de factores primos del polinomio

$P_{(x;\,y)}=(x+2y)^2-2xy(3x-4xy+6y)$.

A) x^2+4y^2

B) $2x^2+2xy+8y^2$

C) x^2-4y^2

D) $2x+4y-6xy$

E) $2x^2-2xy+8y^2$

Agrupamos como se indica

$$2\beta\alpha x(x+\alpha\beta)+\alpha^2x^2(x+\alpha\beta)+\beta^2(x+\alpha\beta)$$

$$=(x+\alpha\beta)\left(\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2\right)$$

$$=(x+\alpha\beta)(\alpha x+\beta)^2$$

Por lo tanto, un factor primo es $x+\alpha\beta$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 43

Dado el polinomio
$P_{(a;\,b)}=a^4+5bc^2-a^2b-a^2c^2-2b^2-2c^4$,
indique el valor de verdad de cada proposición:

I. Tiene tres factores primos.
II. Tiene dos factores primos cuadráticos.
III. La mayor suma de coeficientes de un factor primo es $2-2c^2$; $0<c<1$.

A) VVV
B) VFF
C) FVF
D) FVV
E) VVF

Resolución

Ordenamos el polinomio y aplicamos el método de aspa doble.

$$a^4-a^2b-2b^2+5bc^2-a^2c^2-2c^4$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & -2b & +c^2 \\ a^2 & b & -2c^2 \end{array}$$

$$P_{(a;\,b)}=\left(a^2-2b+c^2\right)\left(a^2+b-2c^2\right)$$

Entonces
I. Falsa
II. Verdadera
III Verdadera

Clave **D**

PROBLEMA N.° 44

Si (x^2-5x+6) es un factor del polinomio $P_{(x)}=x^4-9x^2+mx+n$, calcule el valor de $\frac{n}{m}$.

A) 1 B) −3 C) 10
D) −5 E) 3

Resolución

Recuerda

$q_{(x)}$ es factor de $P_{(x)}$ $\leftrightarrow$ $P_{(x)}\div q_{(x)}$ es exacta

Luego, dividiendo por el método de Horner

1	1	0	−9	m	n
5		5	−6		
			25	−30	
−6				50	−60
	1	5	10	0	0

Del resto

$m-30+50=0 \;\rightarrow\; m=-20$

$n-60=0 \;\rightarrow\; n=60$

$\therefore\ \frac{n}{m}=-3$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 47

Indique aquel polinomio que no es factor de

$Q_{(x;\,y)}=x^3+2x^2y-4xy^2-8y^3-x+2y.$

A) $x-2y$

B) $x+2y+1$

C) $x-1+2y$

D) $x+2y$

E) $x^2-1+4y(x+y)$

Resolución

Agrupamos como se indica

$$Q_{(x;\,y)}=\underline{x^3}+\underline{\underline{2x^2y}}-\underline{4xy^2}-\underline{\underline{8y^3}}-x+2y$$

$$=x\left(x^2-4y^2\right)+2y\left(x^2-4y^2\right)-(x-2y)$$

$$=x(x+2y)(x-2y)+2y(x+2y)(x-2y)-(x-2y)$$

$$=(x-2y)\{x^2+2xy+2xy+4y^2-1\}$$

$$=(x-2y)\{(x+2y)^2-1\}$$

$$=(x-2y)(x+2y+1)(x+2y-1)$$

Y como vemos, solamente $x+2y$ no es factor de $Q_{(x;\,y)}$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 48

Con respecto al polinomio $P_{(z)}=z^6-9z^4+16z^3-9z^2+1$, indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Un factor primo es z^2+4z+1.

II. Un factor algebraico es $(z-1)^3$.

III. Tiene solo dos factores primos mónicos.

A) VVV

B) FVF

C) VVF

D) VFV

E) FFF

Resolución

Factorizando por divisores binómicos:

I. $P_{(1)}=0 \rightarrow (z-1)$ es un factor.

II. Por la regla de Ruffini.

	1	0	−9	16	−9	0	1
1	↓	1	1	−8	8	−1	−1
	1	1	−8	8	−1	−1	0
1	↓	1	2	−6	2	1	
	1	2	−6	2	1	0	
1	↓	1	3	−3	−1		
	1	3	−3	−1	0		
1	↓	1	4	1			
	1	4	1	0			

$$\rightarrow P_{(z)}=(z-1)^4\left(z^2+4z+1\right)$$

Luego

I. Verdadera

II. Verdadera

III. Verdadera

Clave **A**

Luego

$$P_{(x)}=\underbrace{(x^2+x+1)}(x^3-x^2+1)+\underbrace{(x^2+x+1)}(x^2-x+1)$$

$$=(x^2+x+1)\{x^3-x^2+1+x^2-x+1\}$$

$$=(x^2+x+1)(x^3-x+2)$$

Finalmente

I. Falsa

II. Falsa

III. Falsa

Clave **D**

PROBLEMA N.° 51

Indique aquel polinomio que no es factor de $P_{(x)}=6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6$.

A) $x+1$

B) $x-2$

C) $2x+1$

D) $3x^2+7x+2$

E) $3x+1$

Resolución

Polinomio recíproco de grado impar.

$P_{(-1)}=0 \quad \rightarrow \quad (x+1)$ es un factor, el otro factor lo dividimos por la regla de Ruffini.

	6	41	97	97	41	6
-1	↓	-6	-35	-62	-35	-6
	6	35	62	35	6	0

$$P_{(x)}=(x+1)(6x^4+35x^3+62x^2+35x+6)$$

Por aspa doble especial:

$$6x^4+35x^4+62x^2+35x+6$$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & \boxed{10x} & 3 \\ 2x^2 & \boxed{5x} & 2 \end{array}$$

$$\text{ST}:12x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{50x^2} 62x^2:\text{SDT}$$

$$P_{(x)}=(x+1)(3x^2+10x+3)(2x^2+5x+2)$$

$$\begin{array}{cc} 3x & 1 \\ x & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & 2 \end{array}$$

$$P_{(x)}=(x+1)(3x+1)(x+3)(2x+1)(x+2)$$

Por lo tanto, de las alternativas, $(x-2)$ no es factor.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 52

Indique un factor primo del polinomio

$$P_{(a;\,b;\,c)}=(ab)^5+(ac)^5+(bc)^5+abc\left[a^5+b^5+c^5+ab\,c\left(a^2b^2c^2+1\right)\right].$$

A) a^3+bc

B) b^4+a

C) c^4+ab

D) a^2+bc

E) b^2+ac

Finalmente

I. Falsa

II. Verdadera, pues $(3x+y-5z)+(2z-y-2x)=x-3z$

III. Falsa

Clave **E**

Luego, analizando cada proposición:

I. Verdadera

II. Verdadera

III. Falsa

Clave **B**

PROBLEMA N.° 54

Indique el valor de verdad con respecto al polinomio $P_{(x)}=x(x-1)(x+2)(x-3)+8$ en las siguientes proposiciones.

I. Tiene dos ceros racionales.

II. Tiene tres factores primos mónicos.

III. Tiene dos factores primos cuadráticos.

A) VVV B) VVF

C) VFV

D) VFF E) FVF

Resolución

Multiplicamos adecuadamente

$$P_{(x)}=x(x-1)(x+2)(x-3)+8$$
$$=\left(x^2-x\right)\left(x^2-x-6\right)+8$$

Haciendo $x^2-x=y$

$$P_{(y)}=y(y-6)+8=y^2-6y+8$$
$$\begin{array}{ccc} y & \times & -2 \\ y & & -4 \end{array}$$

$$P_{(y)}=(y-2)(y-4)$$

Reponiendo y

$$P_{(x)}=\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x-4\right)$$
$$\begin{array}{ccc} x & \times & -2 \\ x & & 1 \end{array}$$
$$=(x-2)(x+1)\left(x^2-x-4\right)$$

PROBLEMA N.° 55

Luego de factorizar un polinomio $P_{(x)}$ sobre los racionales por el criterio del aspa simple se obtuvo:

$$P_{(x)}=8x^a+bx^2-(d+2)$$
$$\begin{array}{ccc} cx^2 & \times & 1 \\ 4x^2 & & d \end{array}$$

Determine uno de sus factores primos.

A) $4x^2+1$

B) $2x^2+1$

C) $2x^2-1$

D) $2x+3$

E) $2x-3$

Resolución

Del aspa simple

I. $a=4 \wedge 4c=8 \rightarrow a=4 \wedge c=2$

II. $-(d+2)=1\cdot d \rightarrow d=-1$

III. $b=4+cd=4+-2=2$

Luego

$$P_{(x)}=\left(2x^2+1\right)\left(4x^2-1\right)$$
$$=(2x^2+1)(2x+1)(2x-1)$$

Por lo tanto, un factor primo es $2x^2+1$.

Clave **B**

Resolución

Factorizamos $P_{(x)}$ por aspa doble especial

$$P_{(x)}=x^4+0x^3-3x^2-6x-8$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & \times & \boxed{-x} & \times & -4 \\ x^2 & & \boxed{x} & & 2 \end{array}$$

$$\text{ST}:-2x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{-x^2} -3x^2 : \text{SDT}$$

Luego

$$P_{(x)}=\left(x^2-x-4\right)\left(x^2+x+2\right)$$

Del dato

$$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

Al cuadrado

$$x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{21}{4} \rightarrow x^2-x=5$$

$$\therefore \; x^2-x-4=1$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 59

Luego de factorizar

$S_{(a;\,b;\,c)}=\left(2a^2+ab+ac+bc\right)^2+a^2(b-c)^2,$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene dos factores primos cuadráticos.

II. Un factor primo es $2a^2-2ab+b^2$.

III. Tiene dos factores primos lineales.

A) VVV

B) VFV

C) VFF

D) FVF

E) FFV

Resolución

Preparando para un cambio de variable

$$S_{(a;\,b;\,c)}=\left(a^2+(a+b)(a+c)\right)^2+a^2(b-c)^2$$

Haciendo

$$a+b=x,\;\; a+c=y \;\;\rightarrow\;\; b-c=x-y$$

se tiene

$$S_{(a;\,x)}=\left(a^2+xy\right)^2+a^2(x-y)^2$$

$$=a^4+\cancel{2a^2xy}+\underline{x^2y^2}+a^2x^2-\cancel{2a^2xy}+\underline{a^2y^2}$$

$$=a^2\left(a^2+x^2\right)+y^2\left(x^2+a^2\right)$$

$$S_{(a;\,x)}=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2+y^2\right)$$

Luego, reponiendo x, y.

$$S_{(a;\,b;\,c)}=\left(a^2+(a+b)^2\right)\left(a^2+(a+c)^2\right)$$

$$=\left(2a^2+2ab+b^2\right)\left(2a^2+2ac+c^2\right)$$

Finalmente

I. Verdadera

II. Falsa

III. Falsa

Clave **C**

CAPÍTULO 8

MCD, MCM Y FRACCIONES

Test

PROBLEMA N.° 1

¿Cuál es el MCD de los polinomios

$P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-1$ y $Q_{(x)}=x^3-x^2-x+1$?

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $(x-1)^2$

D) x^2-1 E) 1

Resolución

Para hallar el máximo común divisor (MCD) antes se debe factorizar

$$P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$

$$Q_{(x)}=\underline{x^3}-\underline{x^2}-\underline{x}+\underline{1}\equiv x^2(x-1)-(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$$

$\therefore$ $\text{MCD}(P;Q)=(x-1)^2$

Clave C

PROBLEMA N.° 2

¿Cuál es el MCM de los polinomios?

$T_{(x)}=x^3+3x^2+3x+1$

$U_{(x)}=x^3+x^2-x-1$

A) $(x+1)^3$ B) $(x+1)^2(x-1)$

C) $(x+1)^2(x-1)^2$

D) $(x+1)^3(x-1)$ E) $(x+1)^3(x-1)^2$

Resolución

Para hallar el mínimo común múltiplo (MCM) se debe factorizar

$$T_{(x)}=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$$

$$U_{(x)}=\underline{x^3}+\underline{x^2}-\underline{x}-\underline{1}=x^2(x+1)-(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-1)=(x+1)^2(x-1)$$

$\therefore$ $\text{MCM}(T;U)=(x+1)^3(x-1)$

Clave D

PROBLEMA N.° 3

Si $x-1$ es el MCD de los polinomios

$A_{(x)}=x^3-2x+a$ $\wedge$ $B_{(x)}=x^3+2x+b$,

¿cuál es el término lineal del MCM?

A) $5x$ B) $-5x$ C) $3x$

D) $-3x$ E) $2x$

Resolución

Si $x-1$ es el MCD de $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$, donde

$A_{(x)}=x^3-2x+a$ $\wedge$ $B_{(x)}=x^3+2x+b$,

entonces, por la regla de Ruffini

A:				
	1	0	−2	a
1	↓	1	1	−1
	1	1	−1	0

$\rightarrow$ $A_{(x)}=(x-1)(x^2+x-1)$

Resolución

Tenemos

$$P_{(x)}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Luego, lo pedido

$$\underbrace{P_{(n-2)}}_{\frac{1}{n-2}-\frac{1}{\cancel{n-1}}}+\underbrace{P_{(n-1)}}_{\frac{1}{\cancel{n-1}}-\frac{1}{\cancel{n}}}+\underbrace{P_{(n)}}_{\frac{1}{\cancel{n}}-\frac{1}{\cancel{n+1}}}+\underbrace{P_{(n+1)}}_{\frac{1}{\cancel{n+1}}-\frac{1}{\cancel{n+2}}}+\underbrace{P_{(n+1)}}_{\frac{1}{\cancel{n+2}}-\frac{1}{\cancel{n+3}}}+\underbrace{\frac{1}{n+3}}_{\frac{1}{\cancel{n+3}}}$$

$$=\frac{1}{n-2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

¿Cuál es el equivalente reducido de la expresión? $\dfrac{x+1}{x+1-\dfrac{1}{x-1}}-\dfrac{x-1}{x-1-\dfrac{1}{x+1}}$

A) 0 B) $\dfrac{1}{x^2-1}$ C) $\dfrac{x+1}{x-1}$ D) $\dfrac{x-1}{x+1}$ E) $\dfrac{2}{x^2-1}$

Resolución

Para hallar el equivalente de $\underbrace{\dfrac{x+1}{x+1-\dfrac{1}{x-1}}}_{(I)}-\underbrace{\dfrac{x-1}{x-1-\dfrac{1}{x+1}}}_{(II)}$ reducimos separadamente (I) y (II).

Así tenemos

(I)

$$\frac{(x+1)}{\left(x+1-\dfrac{1}{x-1}\right)}\frac{(x-1)}{(x-1)}=\frac{x^2-1}{x^2-1-1}=\frac{x^2-1}{x^2-2}$$

(II)

$$\frac{(x-1)}{\left((x-1)-\dfrac{1}{x+1}\right)}\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{x^2-1}{x^2-1-1}=\frac{x^2-1}{x^2-2}$$

Finalmente, $(\mathrm{I})-(\mathrm{II})=0$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 11

Al descomponer $\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)^3}$

como una suma de fracciones parciales, se encontró que uno de los sumandos es

A) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$ B) $\dfrac{3}{(x-1)^2}$

C) $\dfrac{5}{(x-1)^3}$

D) $\dfrac{7}{(x-1)^2}$ E) $\dfrac{3}{(x-1)^3}$

Resolución

La descomposición de $\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)^3}$ en fracciones parciales es

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

Es decir

$$x^2+3x-1\equiv(x-1)^2A+(x-1)B+C$$

Como $x=1 \rightarrow 1+3-1=0+0+C \rightarrow C=3$

Por lo tanto, una de las fracciones parciales es $\dfrac{3}{(x-1)^3}$.

Clave E

PROBLEMA N.° 12

Se sabe que $f_{(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x+\dfrac{1}{x+1}}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}$.

¿Cuál es el valor reducido de $f_{(\sqrt{2})}+f_{(\sqrt{3})}+3$?

A) 8 B) 16

C) 38

D) 10 E) 3

Resolución

Para calcular $f_{(\sqrt{2})}+f_{(\sqrt{3})}+3$ previamente habrá que simplificar $f_{(x)}$.

$$f_{(x)}=\frac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x+\dfrac{1}{x+1}}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}=\frac{N}{D}$$

$$N=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x+1}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$D=\frac{x+\dfrac{1}{x+1}}{x^3-1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{\dfrac{\cancel{x^2+x+1}}{x+1}}{(x-1)\left(\cancel{x^2+x+1}\right)}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$\rightarrow\ D=\frac{2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

Luego, $f_{(x)}=\dfrac{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{x^2-1}}}{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}}=x^2+1$

Lo pedido: $\cancel{\sqrt{2}}^{\cancel{2}}+1+\cancel{\sqrt{3}}^{\cancel{2}}+1+3=10$

Clave D

Entonces $(x+1)(x^2-x-1)$

$$P_{(x)}=\underset{\sim\sim}{(x+1)}(x^2-x-1)$$

$$Q_{(x)}=\underset{\sim\sim}{(x+1)}(x-1)$$

$$R_{(x)}=(x^2+1)\underset{\sim\sim}{(x+1)}(x-1)$$

Luego, el MCD $(P; Q; R)=x+1$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

Sean dos polinomios P y Q tales que

- $P_{(x)}\cdot Q_{(x)}=(x^2-1)(x-1)^2(x+1)x$
- $\text{MCD}(P; Q)=(x-1)(x+1)$

Halle el MCM$(P; Q)$.

A) $(x-1)(x+1)$
B) $(x^2-1)x$
C) $(x^2-1)^2x$
D) $(x-1)^2(x+1)x$
E) $(x+1)^2(x-1)x$

Resolución

Aplicamos el siguiente teorema:

$$\boxed{P_{(x)}\cdot Q_{(x)}=\text{MCD}(P; Q)\cdot\text{MCM}(P; Q)}$$

Luego

$$(x^2-1)(x-1)^2(x+1)x\equiv(x-1)(x+1)\text{MCM}(P; Q)$$

Modificando se obtiene

$\rightarrow\ \text{MCM}(P; Q)=(x-1)^2(x+1)x$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 5

Dados los polinomios $R_{(x)}$ y $S_{(x)}$ tales que

I. $\dfrac{R_{(x)}}{S_{(x)}}=2x-1$

II. $\text{MCD}(R; S)\cdot\text{MCM}(R; S)$
$=(3x-1)^2(2x-1)(2x+1)^2x^2,$

halle el término cuadrático de $S_{(x)}$.

A) $3x^2$
B) $-2x^2$
C) $-x^2$
D) $2x^2$
E) x^2

Resolución

Si

$$\frac{R_{(x)}}{S_{(x)}}=2x-1\ \rightarrow\ R_{(x)}=(2x-1)S_{(x)}$$

Como

$$\text{MCD}(R; S)\cdot\text{MCM}(R; S)\equiv R_{(x)}\cdot S_{(x)}$$

entonces

$$R_{(x)}\cdot S_{(x)}=(3x-1)^2(2x-1)(2x+1)^2\cdot x^2$$

Luego

$$(2x-1)S_{(x)}\cdot S_{(x)}=(3x-1)^2(2x-1)(2x+1)^2\cdot x^2$$

$\rightarrow\ [S_{(x)}]^2=[(3x-1)(2x+1)x]^2$

$\rightarrow\ S_{(x)}=(3x-1)(2x+1)x$

$\rightarrow\ S_{(x)}=6x^3+x^2-x$

Por lo tanto, x^2 es el término cuadrático de $S_{(x)}$.

Clave **E**

Resolución

Efectuamos operaciones y simplificamos

$$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2}{x-1}}$$

$$\rightarrow\ \frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{2x}{2}=x$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Indique el resultado de simplificar

$$\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x}{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-x}+\frac{2x-4}{x-1}.$$

A) $\dfrac{x+2}{x-1}$ B) 3 C) $\dfrac{3x-2}{x-1}$

D) $\dfrac{3x+2}{x-1}$ E) 1

Resolución

Sea

$$M=\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x}{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-x}$$

entonces

$$M=\frac{\dfrac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}}{\dfrac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}}=\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1}}$$

Además

$$M=\frac{x+1}{x-1}$$

Luego

$$\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x}{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-x}+\frac{2x-4}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x-4}{x-1}$$

$$=\frac{x+1+2x-4}{x-1}$$

$$=\frac{3x-3}{x-1}$$

$$=\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

¿Cuál es el valor de la fracción

$$f_{(x)}=\frac{x^2-3x+1}{(x+1)^2},\ \text{cuando } x+\frac{1}{x}=1?$$

A) 3/4 B) 4/5 C) 3/5

D) 4/3 E) 5/4

Resolución

Se tiene que

$$f_{(x)}=\frac{x^2+2x+1+x}{x^2+2x+1}$$

$$f_{(x)}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}+\frac{x}{x^2+2x+1}=1+\frac{x}{x^2+2x+1}$$

Si $\frac{2}{a}=\frac{-m}{5}=\frac{1}{b}=\lambda$, de aquí se deduce que

$$\frac{a}{b}=2 \quad \wedge \quad bm=-5$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}+bm=2+(-5)=-3$$

Clave B

PROBLEMA N.° 13

¿Cuál es el valor aproximado de m en

$$m=\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{\vdots}}}};\ m>0?$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Resolución

Como

$$m=\cfrac{1}{m+\underbrace{\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{\vdots}}}}_{m}};\ m>0$$

entonces

$$m=\frac{1}{m+m} \quad \rightarrow \quad m=\frac{1}{2m}$$

$$\rightarrow \quad m^2=\frac{1}{2};\quad m>0$$

$$\therefore \quad m=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 14

Si la fracción

$$\frac{2x^3+x^2+2nx+m}{2x^2-3x+4} \text{ es equivalente a}$$

$$x+2+\frac{1}{2x^2-3x+4},$$

¿cuál es el valor de $4n-m$?

A) -13 B) 13

C) 6

D) -5 E) -6

Resolución

Tenemos que

$$\frac{2x^3+x^2+2nx+m}{2x^2-3x+4}=x+2+\frac{1}{2x^2-3x+4}$$

Evaluamos convenientemente para $x=-2$

$$\frac{2(-2)^3+(-2)^2+2n(-2)+m}{2(-2)^2-3(-2)+4}$$

$$=\cancel{-2}\cancel{+2}+\frac{1}{2(-2)^2-3(-2)+4}$$

$$\rightarrow \quad \frac{-16+4-4n+m}{\cancel{8+6+4}}=\frac{1}{\cancel{8+6+4}}$$

$$\rightarrow \quad -12-4n+m=1$$

$$\therefore \quad 4n-m=-13$$

Clave A

$x=0$: $0+1=A(-1)^2+B(1)(-1)+C(1)$

$$\rightarrow \quad 1=A-B+C=-\frac{1}{2}-B+2$$

$$\rightarrow \quad 1=\frac{3}{2}-B \quad \rightarrow \quad B=\frac{1}{2}$$

Luego

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Halle la expresión simplificada de

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1-x^4}.$$

A) $\frac{1}{x+1}$ B) $\frac{1}{x-1}$

C) $\frac{1}{1-x}$

D) $\frac{2}{1-x}$ E) $\frac{2}{x-1}$

Resolución

Sea

$$M=\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1-x^4}$$

$$M=\frac{1}{x+1}+\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}+\frac{4}{x^4-1}$$

Entonces

$$M=\frac{1}{x+1}+\frac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Luego

$$M=\frac{1}{x+1}+\frac{2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}$$

$$M=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{x^2-1}$$

$$M=\frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$

$$\therefore \quad M=\frac{1}{x-1}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 18

De la fracción $f_{(x)}=\frac{x^2+ax+2}{x^2-bx+3}$, al ser evaluada en $x=-1$ se obtuvo la forma $\frac{0}{0}$. Si $f_{1(x)}$ es el resultado de eliminar el factor que lleva a la forma $\frac{0}{0}$, ¿cuál es el valor de $f_{1(1)}$?

A) 4/3 B) 3/5

C) 5/3

D) 3/4 E) 3/2

PROBLEMA N.° 20

La fracción algebraica $\dfrac{3x+2}{(x-1)x(x+1)}$ puede ser escrita como una suma de fracciones parciales. Calcule la suma de sus numeradores.

A) 3 B) 2
C) 0
D) 3/2 E) 4

Resolución

Sea

$$\frac{3x+2}{(x-1)x(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$$

Entonces

$$\frac{3x+2}{(x-1)x(x+1)}=$$

$$=\frac{Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx(x-1)}{(x-1)x(x+1)}$$

$\rightarrow$ $3x+2=Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx(x-1)$

De acuerdo a lo pedido: $A+B+C$.

Recordando la identidad de polinomios, tenemos

$$0x^2+3x+2\equiv(A+B+C)x^2+(A-C)x+-B$$

$\therefore$ $A+B+C=0$

Clave **C**

Nivel II

PROBLEMA N.° 21

Halle el MCD de los siguientes polinomios:
$P_{(x)}=2x^4-x^3-3x^2+3x-9$;
$Q_{(x)}=10x^3-9x^2+17x-6$.
Dé como respuesta la suma de los coeficientes.

A) 5 B) 4
C) 3
D) 2 E) 1

Resolución

Factorizamos cada uno de los polinomios

- $P_{(x)}=2x^4-x^3-3x^2+3x-9$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & -x & 3 \\ x^2 & 0x & -3 \end{array}$$

$\rightarrow$ $P_{(x)}=\left(2x^2-x+3\right)\left(x^2-3\right)$

- $Q_{(x)}=10x^3-9x^2+17x-6$

$\rightarrow$ $Q_{(x)}=0x^4+10x^3-9x^2+17x-6$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & -x & 3 \\ 0x^2 & 5x & -2 \end{array}$$

$\rightarrow$ $Q_{(x)}=\left(2x^2-x+3\right)\left(5x-2\right)$

Luego, el MCD$(P;\,Q)$ es $f_{(x)}=2x^2-x+3$.

Por lo tanto, la suma de coeficientes es $f_{(1)}=4$.

Clave **B**

Resolución

Factorizamos los polinomios

- $P_{(x)}=x^3+x^2+x+1$

  $\rightarrow \quad P_{(x)}=(x^2+1)(x+1)$

- $Q_{(x)}=x^3+3x^2+5x+3$

  $\rightarrow \quad Q_{(x)}=x^3+x^2+2x^2+2x+3x+3$

  $Q_{(x)}=x^2(x+1)+2x(x+1)+3(x+1)$

  $Q_{(x)}=(x+1)(x^2+2x+3)$

Luego, el MCD de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es $f_{(x)}=x+1$.

Por lo tanto, la suma de coeficientes es $f_{(1)}=2$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Si el MCD de los polinomios

$M_{(x;\,y)}=48x^{n-2}y^{m+1}z^n$;

$N_{(x;\,y)}=36x^ny^m$;

$P_{(x;\,y)}=72x^{n-1}y^{m-1}$

es $12x^2y^3$, calcule el valor de m^2-n^2.

A) 0 B) 2

C) 3

D) −4 E) 5

Resolución

El MCD de los polinomios

$M_{(x;\,y)}=2^4\cdot 3x^{n-2}y^{m+1}z^n$

$N_{(x;\,y)}=2^2\cdot 3^2x^ny^m$

$P_{(x;\,y)}=2^3\cdot 3^2x^{n-1}y^{m-1}$

es $2^2\cdot 3\cdot x^{n-2}y^{m-1}$.

Luego, $\text{MCD}(M;N;P)=12x^{n-2}y^{m-1}\equiv 12\cdot x^2y^3$

$\rightarrow \quad n-2=2 \;\wedge\; m-1=3$

$\rightarrow \quad n=4 \;\wedge\; m=4$

$\therefore \quad m^2-n^2=0$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Si los polinomios

$P_{(x)}=6x^4+4x^3+5x^2+mx+n$;

$R_{(x)}=2mx^3+2nx^2+px-q$

admiten como MCD a $2x^2+2x+1$,

halle un divisor de $R_{(x)}$.

A) x^2+2x-1

B) $x-3$

C) $2x^2+x+1$

D) $3x-1$

E) $2x+1$

Resolución

Como MCD $(P;R)=2x^2+2x+1$, entonces $(2x^2+2x+1)$ es factor común de $P_{(x)}$ y $R_{(x)}$.

Por el teorema del factor

- $P_{(x)}=(2x^2+2x+1)\cdot q_{(x)}$

  $\rightarrow \quad \dfrac{P_{(x)}}{2x^2+2x+1}$ es exacta.

PROBLEMA N.° 28

Si el cociente del MCM y MCD de dos polinomios en variable x es $(x^2+1)^2-4x^2$; además, el producto de ellos es $(x^6+1)^2-4x^6$, entonces el MCD es

A) $(x-1)(x^3+1)$

B) $(x+1)(x^2+x+1)$

C) $(x^2-1)(x^2+x+1)$

D) $(x+1)(x^3-1)$

E) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Resolución

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ los polinomios.

Luego

$$\frac{\text{MCM}(P;Q)}{\text{MCD}(P;Q)}=(x^2+1)^2-4x^2=(x^2-1)^2 \qquad \text{(I)}$$

Además

$$\text{MCM}(P;Q)\cdot\text{MCD}(P;Q)=(x^6+1)^2-4x^6$$

$$=(x^6-1)^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$\text{MCM}(P;Q)=(x^2-1)^2\cdot\text{MCD}(P;Q)$$

En (II)

$$(x^2-1)^2\cdot\text{MCD}(P;Q)\cdot\text{MCD}(P;Q)=(x^6-1)^2$$

$$\rightarrow\ [\text{MCD}(P;Q)]^2=\left(\frac{x^6-1}{x^2-1}\right)^2$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(P;Q)=\frac{x^6-1}{x^2-1}$$

Entonces

$$\frac{x^6-1}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x^2-1)}(x^4+x^2+1)}{\cancel{x^2-1}}$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(P;Q)=x^4+x^2+1\equiv(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\therefore\ \text{MCD}(P;Q)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 29

Simplifique la expresión E.

$$E=\frac{16a^4+28a^2+16a+36}{8a^2+12a+18}+\frac{4a^3-8a^2-26a-18}{4a^2+6a+9}+2a$$

A) 0

B) 1

C) $2a+\frac{7}{2}$

D) $2a^2$

E) $\frac{1}{2}$

Resolución

Podemos escribir la expresión así:

$$E=\frac{\cancel{2}[8a^4+14a^2+8a+18]}{\cancel{2}(4a^2+6a+9)}+\frac{4a^3-8a^2-26a-18}{4a^2+6a+9}+2a$$

$$E=\frac{8a^4+14a^2+8a+\cancel{18}+4a^3-8a^2-26a-\cancel{18}}{4a^2+6a+9}+2a$$

$$E=\frac{8a^4+4a^3+6a^2-18a+2a(4a^2+6a+9)}{4a^2+6a+9}$$

$$E=\frac{8a^4+4a^3+6a^2-\cancel{18a}+8a^3+12a^2+\cancel{18a}}{4a^2+6a+9}$$

PROBLEMA N.° 32

Si la fracción admite simplificación

$$\frac{mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)}{mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)},$$

¿cuál es el denominador que se obtiene al efectuar dicha simplificación?

A) $2x+1$
B) $2x-1$
C) $2x+3$
D) $2x-3$
E) $2x+5$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}=\frac{mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)}{mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)}$$

Puede observarse que $x=1$ anula al numerador y denominador de $f_{(x)}$, luego $(x-1)$ es factor de ambos polinomios.

Es decir

$$f_{(x)}=\frac{(x-1)(mx^2-7x+m+1)}{(x-1)(mx^2-9x+m+7)}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}=\frac{mx^2-7x+m+1}{mx^2-9x+m+7}$$

Si $P_{(x)}=mx^2-7x+m+1$ y $Q_{(x)}=mx^2-9x+m+7$ todavía tienen otro factor común $g_{(x)}$, entonces $[P_{(x)}-Q_{(x)}]$ admite dicho factor común (que debe ser lineal).

Es decir, como

$$P_{(x)}-Q_{(x)}=mx^2-7x+m+1-(mx^2-9x+m+7)$$
$$=2x-6$$

$$\rightarrow\ P_{(x)}-Q_{(x)}=2\underbrace{(x-3)}_{g_{(x)}}$$

$$\rightarrow\ g_{(x)}=x-3$$

Entonces

3 es raíz de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

Luego

$P_{(3)}=0$ y $Q_{(3)}=0$

Si

$P_{(3)}=9m-21+m+1=0$

$\rightarrow\ m=2$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{2x^2-7x+3}{2x^2-9x+9}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}=\frac{(2x-1)\cancel{(x-3)}}{(2x-3)\cancel{(x-3)}}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}=\frac{2x-1}{2x-3}$$

Por lo tanto, el denominador es $2x-3$.

Clave **D**

Resolución

Sean $A=\dfrac{x+1}{x+1-\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}$;

$$B=\frac{x-1}{x-1+\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x-1}}};$$

$$C=\frac{2}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Entonces

$$f_{(x)}=(A-B)\div C$$

Simplificamos

$$A=\frac{x+1}{x+1-\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1+1}{x+1}}}=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}-\dfrac{\cancel{x+1}}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$B=\frac{x-1}{x-1+\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1+1}{x-1}}}=\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}+\dfrac{\cancel{x-1}}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$C=\frac{2}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2x^2}{x^4-1}$$

Luego

$$A-B=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$=\frac{\cancel{x^4}+x^2-\cancel{x^4}+x^2}{x^4-1}$$

Entonces

$$=\frac{2x^2}{x^4-1}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=(A-B)\div C=\frac{2x^2}{x^4-1}\div\frac{2x^2}{x^4-1}=1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

Sabiendo que la fracción

$$f_{(x;\,y)}=\frac{(ax+by)^2}{p^2x^2+2m^2xy+m^2y^2};\ xy\neq 0$$

toma un valor constante k no nulo, halle el equivalente de

$$\frac{a^2+b^2+p^2+m^2}{a^2+b^2-p^2-m^2}$$

en términos de k.

A) $\dfrac{k+1}{k-1}$ B) $\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$

C) $k+1$

D) $k-1$ E) k^2-1

Entonces

$$\frac{A}{3}+B+C=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{10}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 37

Simplifique la expresión

$$f_{(x)}=\frac{ax(ax+1)(ax+2)(ax+3)+1}{(1+ax)(1+2ax)(1+3ax)+a^4x^4}.$$

A) $\frac{ax+1}{ax+2}$ B) $\frac{a+x}{a+2x}$

C) $\frac{x+a}{x+2a}$

D) 1 E) $\frac{a}{x}$

Resolución

Haciendo un cambio de variable: $ax=t$,

entonces

$$f_{(x)}=\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)+1}{(1+t)(1+2t)(1+3t)+t^4}$$

$$f_{(x)}=\frac{t\left[t^3+6t^2+11t+6\right]+1}{\left[1+6t+11t^2+6t^3\right]+t^4}$$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{\cancel{t^4+6t^3+11t^2+6t+1}}{\cancel{1+6t+11t^2+6t^3+t^4}}=1$$

$\therefore\ f_{(x)}=1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 38

Reduzca la expresión

$$f_{(x)}=\frac{(x+4)^2-4}{(2x+2)^2-x^2}+\frac{4-25x^2}{x^2-(4x+2)^2}.$$

A) 1 B) 2

C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Podemos escribir la expresión

$$f_{(x)}=\frac{(x+4)^2-2^2}{(2x+2)^2-x^2}+\frac{(5x)^2-2^2}{(4x+2)^2-x^2}$$

$$f_{(x)}=\frac{(x+4+2)(x+4-2)}{(2x+2+x)(2x+2-x)}+\frac{(5x+2)(5x-2)}{(4x+2+x)(4x+2-x)}$$

$$f_{(x)}=\frac{(x+6)\cancel{(x+2)}}{(3x+2)\cancel{(x+2)}}+\frac{\cancel{(5x+2)}(5x-2)}{\cancel{(5x+2)}(3x+2)}$$

Entonces

$$f_{(x)}=\frac{x+6}{3x+2}+\frac{5x-2}{3x+2}=\frac{x+6+5x-2}{3x+2}$$

$$f_{(x)}=\frac{6x+4}{3x+2}=\frac{2\cancel{(3x+2)}}{\cancel{3x+2}}$$

$\therefore\ f_{(x)}=2$

Clave **B**

Además

$$f_{(a)}=\frac{1}{1+a}+\frac{2-2a^2}{1-a^4}-\frac{4}{1-a^4}$$

$$f_{(a)}=\frac{1}{1+a}-\frac{2+2a^2}{1-a^4}$$

$$f_{(a)}=\frac{1}{1+a}-\frac{2\cancel{(1+a^2)}}{(1-a^2)\cancel{(1+a^2)}}$$

Entonces

$$f_{(a)}=\frac{1-a}{(1+a)(1-a)}-\frac{2}{1-a^2}$$

$$f_{(a)}=-\frac{\cancel{(1+a)}}{\cancel{(1+a)}(1-a)}$$

$$\therefore\ f_{(a)}=\frac{1}{a-1}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 41

Efectúe

$$\frac{\left(\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{x}{x^3-8}\right)}{\frac{1}{x^2-2x}}.$$

A) $1+x$ B) $1-x$

C) 1

D) $1+x^2$ E) $1-x^2$

Resolución

Efectuamos las operaciones indicadas

$$\frac{\left(\frac{4+2x+x^2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x^3-2^3}\right)}{\frac{1}{x(x-2)}}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{x^2+2x+4}}{x^2}\cdot\frac{x}{(x-2)\cancel{(x^2+2x+4)}}}{\frac{1}{x(x-2)}}$$

$$=\frac{\frac{x}{x^2(x-2)}}{\frac{1}{x(x-2)}}=\frac{x\cdot x(x-2)}{x^2(x-2)}$$

$$=\frac{x^2(x-2)}{x^2(x-2)}=1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 42

Reduzca la expresión

$$\frac{x^4-\frac{z^2}{y}}{x-\frac{1}{yz}}+\frac{y^4-\frac{x^2}{z}}{y-\frac{1}{xz}}+\frac{z^4-\frac{y^2}{x}}{z-\frac{1}{xy}}.$$

A) $x^3+y^3+z^3$

B) $(x+y+z)^3$

C) xyz

D) $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$

E) 0

Entonces

$$M=n\left[\frac{a+1}{a+1}+\frac{b+1}{b+1}+\frac{c+1}{c+1}\right]$$

$$M=n[1+1+1]$$

$\therefore\ M=3n$

Clave C

PROBLEMA N.° 44

Simplifique cada una de las fracciones.

I. $$f_{(x;\,y)}=\frac{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3-1}{\frac{x-y}{x+y}-1};\ x+y\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$$

Resolución

Sea $\dfrac{x-y}{x+y}=t$ (cambio de variable)

Entonces

$$f_{(x;y)}=\frac{t^3-1}{t-1}=t^2+t+1$$

$$\rightarrow\ f_{(x;y)}=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+\frac{x-y}{x+y}+1$$

$$\rightarrow\ f_{(x;y)}=\frac{(x-y)^2+(x-y)(x+y)+(x+y)^2}{(x+y)^2}$$

$$f_{(x;y)}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2+x^2-y^2}{(x+y)^2}$$

Luego

$$f_{(x;y)}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)+x^2-y^2}{(x+y)^2}$$

$$\therefore\ f_{(x;y)}=\frac{3x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

II. $$f_{(x)}=\frac{x^2-1-\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-1}};$$

$x\notin\{0;\,1;\,-1\}\ \wedge\ x^2-x\neq 1$

Resolución

$$f_{(x;y)}=\frac{x^2-1-\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}-(x-1)}$$

Sea $x^2-1=a\ \wedge\ x-1=b$

$$\rightarrow\ f_{(x)}=\frac{a-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-b}$$

$$f_{(x)}=\frac{\frac{\cancel{ab-1}}{b}}{\frac{\cancel{1-ab}}{a}}=\frac{-a}{b}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}=\frac{-(x^2-1)}{x-1}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{-(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-(x+1)$$

VI. $f_{(x)}=\dfrac{x+1}{x+\dfrac{x}{x-1}}+\dfrac{2x}{x-\dfrac{x}{x+1}};\ x\neq 0;1;-1$

Resolución

$$f_{(x)}=\frac{x+1}{\dfrac{x^2\cancel{-x}\cancel{+x}}{x-1}}+\frac{2x}{\dfrac{x^2\cancel{+x}\cancel{-x}}{x+1}}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}+\frac{2x(x+1)}{x^2}$$

$$\rightarrow\quad f_{(x)}=\frac{x^2-1+2x^2+2x}{x^2}=\frac{3x^2+2x-1}{x^2}$$

$$\therefore\quad f_{(x)}=\frac{(3x-1)(x+1)}{x^2}$$

PROBLEMA N.° 45

Exprese las siguientes fracciones en la suma de fracciones parciales.

I. $f_{(x)}=\dfrac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}=\frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\rightarrow\quad \frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\rightarrow\quad x^2-x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

Evaluamos convenientemente

$x=-1$: $(-1)^2-(-1)=A(2)+\cancel{[B(-1)+C](0)}$

$\rightarrow\ 2=2A\ \rightarrow\ A=1$

$x=0$: $0=A(1)+C(1)\ \rightarrow\ A+C=0\ \rightarrow\ C=-1$

$x=1$: $1^2-1=A(2)+(B+C)(2)$

$\rightarrow\ 0=2(\underline{A}+B+\underline{C})\ \rightarrow\ B=0$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x^2+1}$$

II. $f_{(x)}=\dfrac{3(x^2+x)}{(x-2)(x+1)^2}$

Resolución

Observe que

$$f_{(x)}=\frac{3x(x+1)}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{3x}{(x+1)(x-2)}$$

Sea

$$f_{(x)}=\frac{3x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\rightarrow\quad \frac{3x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\rightarrow\quad 3x=A(x-2)+B(x+1)$$

V. $f_{(x)}=\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}=\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}$$

$$f_{(x)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$f_{(x)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

$$f_{(x)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$\rightarrow\ 4x-2=A(x-2)(x+1)+B(x)(x+1)+Cx(x-2)$

Evaluamos convenientemente

$x=0$: $\quad -2=-2A+\cancel{B\cdot 0}+\cancel{C\cdot 0}\ \rightarrow\ A=1$

$x=-1$: $-6=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-1)(-3)\ \rightarrow\ C=-2$

$x=2$: $\quad 6=A\cdot 0+6B+C\cdot 0\ \rightarrow\ B=1$

$$f_{(x)}=\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{x+1}$$

VI. $f_{(x)}=\dfrac{6x^2+12}{x^3+4x^2+3x}$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}=\frac{6x^2+12}{x^3+4x^2+3x}=\frac{6x^2+12}{x(x^2+4x+3)}$$

$$=\frac{6x^2+12}{x(x+1)(x+3)}$$

$$f_{(x)}=\frac{6x^2+12}{x(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

$$f_{(x)}=\frac{6x^2+12}{x(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{A(x+1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+3)}$$

$\rightarrow\ 6x^2+12=A(x+1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+1)$

Evaluamos convenientemente

$x=0$: $\quad 12=3A+\cancel{B\cdot 0}+\cancel{C\cdot 0}\ \rightarrow\ A=4$

$x=-1$: $\ 18=\cancel{A\cdot 0}+B(-2)+\cancel{C\cdot 0}\ \rightarrow\ B=-9$

$x=-3$: $\ 66=\cancel{A\cdot 0}+\cancel{B\cdot 0}+C(-3)(-2)\ \rightarrow\ C=11$

$$f_{(x)}=\frac{6x^2+12}{x^3+4x^2+3x}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{4}{x}+\frac{-9}{x+1}+\frac{11}{x+3}$$

IX. $f_{(x)}=\dfrac{5x^3+2x^2+1}{4x^3-x}$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}=\frac{5x^3+2x^2+1}{4x^3-x}=\frac{5}{4}\left[\frac{20x^3+8x^2+4}{20x^3-5x}\right]$$

$$f_{(x)}=\frac{5}{4}\left[\frac{(20x^3-5x)+8x^2+5x+4}{20x^3-5x}\right]$$

$$f_{(x)}=\frac{5}{4}\left[1+\frac{8x^2+5x+4}{20x^3-5x}\right]$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\underbrace{\left[\frac{8x^2+5x+4}{4x^3-x}\right]}_{g_{(x)}}$$

Ahora sea

$$g_{(x)}=\frac{8x^2+5x+4}{4x^3-x}=\frac{8x^2+5x+4}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$\rightarrow\quad g_{(x)}=\frac{8x^2+5x+4}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$g_{(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}$$

$$\rightarrow\quad \frac{8x^2+5x+4}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)}{x(2x+1)(2x-1)}$$

Entonces

$$8x^2+5x+4=A(2x+1)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(2x+1)$$

Evaluamos convenientemente

$$x=0:\quad 4=A(1)(-1)+\cancel{B\cdot 0}+\cancel{C\cdot 0}$$

$$\rightarrow\quad A=-4$$

$$x=-\frac{1}{2}:\ 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(-\frac{1}{2}\right)+4$$

$$=\cancel{A\cdot 0}+B\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)+\cancel{C\cdot 0}$$

Entonces

$$2-\frac{5}{2}+4=B\quad\rightarrow\quad B=\frac{7}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}:\ 8\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)+4=A\cdot 0+B\cdot 0+C\left(\frac{1}{2}\right)(2)$$

$$\rightarrow\quad 2+\frac{5}{2}+4=C$$

$$\rightarrow\quad C=\frac{17}{2}$$

Luego

$$g_{(x)}=\frac{-4}{x}+\frac{\frac{7}{2}}{2x+1}+\frac{\frac{17}{2}}{2x-1}$$

$$\therefore\quad f_{(x)}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{-4}{x}+\frac{\frac{7}{2}}{2x+1}+\frac{\frac{17}{2}}{2x-1}\right]$$

Resolución

De la segunda condición se tiene

$$\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(y^4+z^4)}{(y^2+z^2)^2}+\frac{2(x^4+z^4)}{(x^2+z^2)^2}=8 \quad\rightarrow\quad \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}-1+\frac{2(y^4+z^4)}{(y^2+z^2)^2}-1+\frac{2(x^4+z^4)}{(x^2+z^2)^2}-1=5$$

$$\rightarrow\quad \frac{2(x^4+y^4)-(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(y^4+z^4)-(y^2+z^2)^2}{(y^2+z^2)^2}+\frac{2(x^4+z^4)-(x^2+z^2)^2}{(x^2+z^2)^2}=5$$

Recuerda

$$\left[(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2=2(x^4+y^4) \quad\rightarrow\quad 2(x^4+y^4)-(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2\right]$$

$$\rightarrow\quad \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(y^2-z^2)^2}{(y^2+z^2)^2}+\frac{(z^2-x^2)^2}{(z^2+x^2)^2}=5 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y^2-z^2}{y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{z^2-x^2}{z^2+x^2}\right)^2=5$$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=5$

Clave B

PROBLEMA N.° 48

Luego de descomponer la expresión $f_{(x)}=\dfrac{5}{(x+1)^5-x^5-1}$ en fracciones parciales, indique la suma de sus numeradores.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

Resolución

Desarrollamos y reducimos el denominador

$$(x+1)^5-x^5-1=\left(\cancel{x^5}+5x^4+10x^3+10x^2+5x+\cancel{1}\right)-\cancel{x^5}-\cancel{1}$$

$$\rightarrow\quad (x+1)^5-x^5-1=5x^4+10x^3+10x^2+5x$$

$$\rightarrow\quad (x+1)^5-x^5-1=5x[x^3+2x^2+2x+1]$$

$$\rightarrow\quad (x+1)^5-x^5-1=5x(x+1)(x^2+x+1)$$

Resolución

De $A_{(x)}=\dfrac{M_{(x)}\cdot L_{(x)}}{D_{(x)}}$ se tiene $A_{(x)}\cdot D_{(x)}=M_{(x)}\cdot L_{(x)}$

Como $D_{(x)}$ es el MCM$(M;\ L)$, entonces

$A_{(x)}=$MCD$(M;\ L)$

Factorizamos los polinomios para hallar $A_{(x)}$

- $M_{(x)}=x^4-nx^3-7n^2x^2+n^3x+6n^4$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & -nx & & -6n^2 \\ & \times & & \times & \\ x^2 & & 0x & & -n^2 \end{array}$$

$\rightarrow\ M_{(x)}=\left(x^2-nx-6n^2\right)\left(x^2-n^2\right)$

$\rightarrow\ M_{(x)}=(x-3n)(x+2n)(x+n)(x-n)$

- $L_{(x)}=x^3+4nx^2+n^2x-6n^3$

  Como $L_{(n)}=n^3+4n^3+n^3-6n^3=0$ entonces n es raíz de $L_{(x)}$.

  Luego

  $(x-n)$ es factor de $L_{(x)}$

  $\rightarrow\ L_{(x)}=(x-n)\cdot q_{(x)}$

  $\rightarrow\ q_{(x)}=\dfrac{L_{(x)}}{x-n}$

  $\rightarrow\ q_{(x)}=x^2+5nx+6n^2=(x+2n)(x+3n)$

  De ahí $L_{(x)}=(x-n)(x+2n)(x+3n)$, entonces

  $A_{(x)}=$MCD$(M;\ L)=(x+2n)(x-n)$

  Luego $\dfrac{A_{(x)}}{x-3n}$ deja resto$=A_{(3n)}$

$\therefore\ A_{(3n)}=(5n)(2n)=10n^2$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 50

Si $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2=(abc)^2$, simplifique la expresión M.

$$M=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1}{2c^2-1}+\frac{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1}{2a^2-1}+\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+1}{2b^2-1}$$

A) 0

B) 1

C) $a^2+b^2+c^2$

D) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

E) abc

Resolución

De la condición $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2=(abc)^2$

se obtiene $\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{(abc)^2}=1$

$\rightarrow\ \dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

Simplificamos cada uno de los sumandos de M

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1}{2c^2-1}=\frac{1-\frac{1}{c^2}+1}{2c^2-1}=\frac{2-\frac{1}{c^2}}{2c^2-1}=\frac{\frac{2c^2-1}{c^2}}{\frac{2c^2-1}{1}}=\frac{1}{c^2}$$

Análogamente

$$\frac{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1}{2a^2-1}=\frac{1}{a^2};\quad \frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+1}{2b^2-1}=\frac{1}{b^2}$$

Luego

$$M=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

Clave **B**

Entonces

$$R=\frac{(\cancel{x+1})(m+1)}{\cancel{x+1}}-\frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n}}$$

$$\rightarrow\quad R=m+1-\frac{\frac{n+1}{\cancel{n}}}{\frac{1}{\cancel{n}}}=m+1-(n+1)$$

$\therefore\quad R=m-n$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 53

Determine el valor de k que permite que la fracción

$$f_{(x;y)}=\frac{(a-2)x^4-(a+7)xy+(2a-1)y^4}{4x^4-(a+2)xy+(3a-14)y^4}$$

tome siempre un valor constante k.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{5}$ E) 1

Resolución

Del dato

$$f_{(x;\,y)}=\frac{(a-2)x^4-(a+7)xy+(2a-1)y^4}{4x^4-(a+2)xy+(3a-14)y^4}=k$$

$$\leftrightarrow\quad \frac{a-2}{4}=\frac{a+7}{a+2}=\frac{2a-1}{3a-14}=k$$

$$\leftrightarrow\quad \frac{a-2}{4}=\frac{a+7}{a+2}\ \wedge\ \frac{a-2}{4}=\frac{2a-1}{3a-14}$$

$$a^2-4=4a+28\ \wedge\ 3a^2-20a+28=8a-4$$

$$a^2-4a-32=0\ \wedge\ 3a^2-28a+32=0$$

$$(a-8)(a+4)=0\ \wedge\ (a-8)(3a-4)=0$$

(elegimos el factor común: $a-8$)

$$\leftrightarrow\ a-8=0\ \leftrightarrow\ a=8$$

Luego

$$k=\frac{a-2}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 54

Si se sabe que el MCD de los polinomios
$A_{(x)}=2x^3-x^2+3x+m\ \wedge$
$B_{(x)}=x^3+x^2+n$ es (x^2-x+2),
calcule el valor de $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

A) $\frac{4}{3}$ B) 2 C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{10}{3}$

Resolución

Como MCD$(A;B)=x^2-x+2$, entonces (x^2-x+2) es factor o divisor común de los polinomios $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$.

Tres veces:

$$E=\frac{P}{P+1-\boxed{\dfrac{P}{P+1-\dfrac{P}{P+1}}}}=\frac{P}{P+1-\dfrac{P^3-P}{P^3-1}}$$

$$\rightarrow\ E=\frac{P(P^3-1)}{(P+1)(P^3-1)-P^3-P}=\frac{P^4-P}{P^4-1}$$

Luego, para P veces

$$E=\frac{P^{P+1}-P}{P^{P+1}-1}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 56

Descomponga la siguiente fracción

$$f_{(x)}=\frac{8-15x+4x^2}{-3x^2+4+x^3}$$

en una adición de fracciones parciales e indique una de ellas.

A) $\dfrac{4}{x+1}$

B) $\dfrac{-3}{(x-2)^2}$

C) $\dfrac{4}{x-2}$

D) $\dfrac{2}{x-2}$

E) $\dfrac{3}{x+1}$

Resolución

Tenemos

$$f_{(x)}=\frac{4x^2-15x+8}{x^3-3x^2+4}=\frac{4x^2-15x+8}{(x+1)(x^2-4x+4)}$$

$$f_{(x)}=\frac{4x^2-15x+8}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\rightarrow\ \frac{4x^2-15x+8}{(x+1)(x-2)^2}$$

$$=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}$$

$$\rightarrow\ 4x^2-15x+8=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$$

Evaluamos convenientemente

$x=2$: $4(2)^2-15(2)+8=\cancel{A\cdot 0^2}+\cancel{B(3)(0)}+C(3)$

$\rightarrow\ -6=3C$

$\rightarrow\ C=-2$

$x=-1$: $4(-1)^2-15(-1)+8=A(-3)^2+\cancel{B(0)(-3)}+\cancel{C(0)}$

$\rightarrow\ 27=9A$

$\rightarrow\ A=3$

$x=0$: $8=A(-2)^2+B(1)(-2)+C(1)$

$\rightarrow\ 8=4A-2B+C=4(3)-2B+(-2)$

$\rightarrow\ 8=10-2B$

$\rightarrow\ B=1$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{(x-2)^2}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 58

Simplifique la expresión E

$$E=a^2b^2-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{1+\cfrac{n^3-1}{n-\cfrac{n^4-1}{n-\cfrac{1}{n}}}}}$$

si se sabe que

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1.$$

A) n^5

B) $1-n^5$

C) n^{-5}

D) $1-n^{-5}$

E) $1-n$

Resolución

De la condición se tiene

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]=1$$

$$\rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{2}{\cancel{(a+b)}}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{ab}=(a+b)^2$$

$$\rightarrow\ \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{2ab}{(ab)^2}=(a+b)^2$$

$$\rightarrow\ \frac{\cancel{(a+b)^2}}{a^2b^2}=\cancel{(a+b)^2}\ \rightarrow\ a^2\cdot b^2=1$$

Simplificamos la expresión

$$E=1-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{1+\cfrac{n^3-1}{n-\boxed{\cfrac{n^4-1}{n-\cfrac{1}{n}}}}}}$$

Como

$$\frac{n^4-1}{n-\frac{1}{n}}=\frac{(\cancel{n^2-1})(n^2+1)}{\frac{\cancel{n^2-1}}{n}}=n(n^2-1)=n^3+n$$

entonces

$$E=1-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{1+\cfrac{n^3-1}{n-(n^3+n)}}}$$

Luego

$$E=1-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{\boxed{1+\cfrac{n^3-1}{-n^3}}}}$$

Como

$$1+\frac{n^3-1}{-n^3}=\frac{\cancel{-n^3}+\cancel{n^3}-1}{-n^3}=\frac{1}{n^3}$$

$$\rightarrow\ E=1-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{\frac{1}{n^3}}}=1-\frac{n^5-1}{n^3+n^3(n^2-1)}$$

$$E=1-\frac{n^5-1}{\cancel{n^3}+n^5-\cancel{n^3}}=1-\frac{n^5-1}{n^5}$$

$$\rightarrow\ E=\frac{\cancel{n^5}-(\cancel{n^5}-1)}{n^5}=\frac{1}{n^5}$$

$\therefore\ E=n^{-5}$

Clave C

CAPÍTULO 9

Radicación

Test

PROBLEMA N.° 1

Indique cuál es el resto al extraer la raíz cuadrada del polinomio
$P_{(x)}=16x^2-24x+1$.

A) 3 B) −8
C) 8
D) 7 E) −3

Resolución

Buscamos el resto de la raíz cuadrada de

$$P_{(x)}=16x^2-24x+1$$
$$=(4x)^2-2(4x)(3)+3^2-8$$
$$P_{(x)}=(4x-3)^2-8$$

Por lo tanto, el resto de $\sqrt{P_{(x)}}$ es -8.

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Dado el polinomio
$S_{(x)}=4x^4+16x^3-5x+2$.
Si $R_{(x)}$ es la raíz cuadrada y $r_{(x)}$ su residuo, calcule $R_{(0)}+r_{(1)}$.

A) 8 B) 9 C) 7
D) 10 E) 15

Resolución

Calculamos la raíz cuadrada de $S_{(x)}$

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{4x^4+16x^3-5x+2} & 2x^2+4x+4 \\
\quad -16x^3-16x^2 & (4x^2+4x)(4x) \\
\quad \cancel{16x^3} & \\
\qquad -\cancel{16x^2}-5x+2 & (4x^2+8x-4)(-4) \\
\qquad \cancel{16}x^2+32x-16 & \\
\qquad\qquad 27x-14 &
\end{array}$$

$\rightarrow$ $R_{(x)}=2x^2+4x-4$ $\rightarrow$ $R_{(0)}=-4$
$r_{(x)}=27x-14$ $\rightarrow$ $r_{(1)}=13$
$\therefore$ $R_{(0)}+r_{(1)}=9$

Clave B

PROBLEMA N.° 3

Si el polinomio
$M_{(x)}=x^4+4x^3+8x^2-ax+b$
tiene raíz cuadrada exacta, calcule el valor de ab.

A) −16 B) 16 C) 32
D) −32 E) −12

Luego

$$=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{5}$$

$$\quad 2+1 \quad 2\times 1 \quad 5+2 \quad 5\times 2$$

$$=\cancel{\sqrt{2}}+1+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{5}}=1$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Calcule n si se cumple lo siguiente

$$\sqrt{6+2n\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}=\sqrt{7}+1.$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Calculamos n en

$$\sqrt{6+2n\sqrt{10+2\underbrace{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}_{\sqrt{7}-1}}}=\sqrt{7}+1$$

$$\sqrt{6+2n\underbrace{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}_{\sqrt{7}+1}}=\sqrt{7}+1$$

$$\sqrt{6+2n(\sqrt{7}+1)}=\sqrt{7}+1$$

Entonces, necesariamente $n=1$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

Indique uno de los radicales simples que se obtiene luego de transformar el siguiente radical doble

$\sqrt{5+\sqrt{21}}$.

A) $\sqrt{\frac{7}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

Resolución

Para transformar a radicales simples

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Luego, un radical simple será $\sqrt{\frac{7}{2}} \vee \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Si el radical doble $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ es equivalente a

$\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}$; $a>b>0$,

calcule el valor de $a-b$.

A) 3 B) 4
C) 5
D) 6 E) 7

Resolución

Del dato

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}\equiv\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}};\quad a>b>0$$

Racionalizamos cada sumando

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}-\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{4}}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}}}{2}=0$$

Clave C

PROBLEMA N.° 12

Luego de racionalizar la expresión $\frac{4}{a+b-\sqrt{2ab}}$, indique su denominador.

A) $a-b$ B) $a+b$ C) a^2-b^2 D) ab E) a^2+b^2

Resolución

Multiplicamos y dividimos por su factor racionalizante

$$\underbrace{\frac{4}{a+b-\sqrt{2ab}}\cdot\frac{a+b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}}$$

$$=\frac{4\left(a+b+\sqrt{2ab}\right)}{(a+b)^2-\left(\sqrt{2ab}\right)^2}$$

$$=\frac{4\left(a+b+\sqrt{2ab}\right)}{a^2+b^2+\cancel{2ab}-\cancel{2ab}}=\frac{4\left(a+b+\sqrt{2ab}\right)}{a^2+b^2}$$

Por lo tanto, su denominador es a^2+b^2.

Clave E

Resolución

Se tiene el polinomio

$$P_{(x)}=\underset{\substack{\uparrow\\(x^2)^2}}{x^4}+8x^3+ax^2+bx+\underset{\substack{\uparrow\\1^2}}{1}$$

Luego, sea (x^2+mx+1) la raíz cuadrada de $P_{(x)}$

$$\sqrt{P_{(x)}}=\sqrt{x^4+8x^3+ax^2+bx+1}=x^2+mx+1$$

Entonces

$$x^4+8x^3+ax^2+bx+1=(x^2+mx+1)^2$$

$$x^4+8x^3+ax^2+bx+1=x^4+(mx)^2+1^2+2(mx^3+x^2+mx)$$

También

$$x^4+8x^3+ax^2+bx+1=x^4+m^2x^2+1+2mx^3+2x^2+2mx$$

$$x^4+\underline{8x^3}+\underline{\underline{ax^2}}+\underset{\sim}{bx}+1=x^4+\underline{2mx^3}+\underline{\underline{(m^2+2)x^2}}+\underset{\sim}{2mx}+1$$

Luego, por identidad de polinomios

$$2m=8 \;\wedge\; a=m^2+2 \;\wedge\; b=2m$$

Entonces

$m=4$;

$a=18$;

$b=8$

$\therefore\; a-b=10$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Luego de extraer la raíz cuadrada del polinomio

$P_{(x)}=16x^4-24x^3+ax^2+bx+6;\; b>10$

se obtiene como resto $r_{(x)}=3x+2$. Indique lo correcto.

A) $a=-7$

B) $b=14$

C) $a+b=9$

D) $a-b=22$

E) A $\wedge$ D

Resolución

Sea $q_{(x)}$ la raíz cuadrada de $P_{(x)}$

$$P_{(x)}=q^2_{(x)}+r_{(x)}$$

$$\rightarrow\; 16x^4-24x^3+ax^2+bx+6=q^2_{(x)}+3x+2$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\(4x^2)^2}}{16x^4}-24x^3+ax^2+(b-3)x+\underset{\substack{\uparrow\\(-2)^2}}{4}=q^2_{(x)}$$

Luego

$$q_{(x)}=4x^2+mx-2$$

$$\rightarrow\; 16x^4-24x^3+ax^2+(b-3)x+4\equiv(4x^2+mx-2)^2$$

$$16x^4-24x^3+ax^2+(b-3)x+4\equiv$$

$$=(4x^2)^2+(mx)^2+(-2)^2+2[4mx^3-8x^2-2mx]$$

$$=16x^4+m^2x^2+4+8mx^3-16x^2-4mx$$

PROBLEMA N.° 6

Simplifique la expresión

$S=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+...+\sqrt{49-2\sqrt{600}}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución

Tenemos

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2-2\sqrt{2\cdot 1}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\cancel{\sqrt{2}}-1$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2-2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{3}^2-2\sqrt{4\cdot 3}}=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}$$

$$+$$

....

....

....

$$\sqrt{49-2\sqrt{600}}=\sqrt{\sqrt{25}^2+\sqrt{24}^2-2\sqrt{25\cdot 24}}=\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{24})^2}=\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{24}}$$

Sumando la primera y última columna se obtiene

$S=\sqrt{25}-1$

$\therefore\ S=4$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Indique el valor de uno de los radicales simples luego de transformar la expresión

$\sqrt{1+2+3+...+10+10\sqrt{10}}$.

A) $\sqrt{50}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{10}$ D) $2\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{5}$

Resolución

Sea

$$S=\sqrt{16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}}$$

$$\rightarrow\quad S=\sqrt{7+5+4+2[\sqrt{35}-\sqrt{28}-\sqrt{20}]}$$

$$S=\sqrt{\sqrt{7}^2+\sqrt{5}^2+\sqrt{4}^2+2\left[\sqrt{7}\sqrt{5}+\sqrt{7}(-\sqrt{4})+\sqrt{5}(-\sqrt{4})\right]}$$

$$\rightarrow\quad S=\cancel{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{4})^2}}$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{7}+\sqrt{5}-2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Efectúe $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

A) 0 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}+1$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución

Tenemos

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

Efectuando y simplificando

$$=\frac{2\sqrt{3}-\cancel{2}+\sqrt{\cancel{3}}^{\,2}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\cancel{2}-\sqrt{\cancel{3}}^{\,2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-1^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{2\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}}{3-1}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\sqrt{3}$$

Clave **B**

Resolución

Tenemos

$$T=\frac{\sqrt{6+1+\sqrt{4\cdot 6}}+2}{\sqrt{3+2+\sqrt{4\cdot 6}}}$$

Entonces

$$T=\frac{\sqrt{\sqrt{6}^2+1^2+2\sqrt{6\cdot 1}}+2}{\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{3\cdot 2}}} \rightarrow T=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}+2}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} \rightarrow T=\frac{\sqrt{6}+1+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

También

$$T=\frac{\sqrt{3}\,\cancel{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\cancel{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} \rightarrow T=\sqrt{3} \rightarrow T^2=3$$

$\therefore\ T^4=9$

Clave D

PROBLEMA N.° 14

Racionalice y simplifique la expresión $\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ e indique el denominador racional.

A) 3 B) 6 C) 8 D) 4 E) 2

Resolución

Racionalizamos

$$\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}+\frac{4(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}-\frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}+\frac{4(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2)}=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{9\cdot 2-4\cdot 3}+\frac{4(3\sqrt{3}+2\sqrt{3})}{9\cdot 2-4\cdot 3}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\cdot 1}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{\underset{3}{\cancel{6}}}+\frac{\overset{2}{\cancel{4}}(3\sqrt{3}+2\sqrt{3})}{\underset{3}{\cancel{6}}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2(3\sqrt{3}+2\sqrt{3})-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, el denominador racional es 3.

Clave A

PROBLEMA N.° 17

Indique el denominador luego de racionalizar y simplificar la expresión

$$\frac{12}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{35}}.$$

A) 1 B) 7 C) 4
D) 2 E) 14

Resolución

Se tiene

$$\frac{12}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{35}}=\frac{12}{\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2\right]}$$

$$=\frac{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{7}\left[\cancel{3}+\cancel{2}+2\sqrt{6}-\cancel{5}\right]}$$

$$=\frac{\cancel{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}{\cancel{2}\sqrt{6}\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}$$

$$=\frac{\cancel{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}{\cancel{6}\cdot 7}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}{7}$$

Por lo tanto, el denominador es 7.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

¿Cuál es el equivalente de la expresión

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}?$$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-1$

B) $\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$

C) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

D) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$

E) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$

Resolución

Sea

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+1)^2}$$

$$=\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{3+5+2\sqrt{15}-(7+1+2\sqrt{7})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{\cancel{8}+2\sqrt{15}-\cancel{8}-2\sqrt{7}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\,\cancel{(\sqrt{15}-\sqrt{7})}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1)}{\cancel{2}\,\cancel{(\sqrt{15}-\sqrt{7})}}$$

$$\therefore\ \frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{17})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$$

Clave **E**

NIVEL II

PROBLEMA N.° 21

Luego de efectuar $\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}$ se obtiene

A) -1 B) 1 C) 2
D) -3 E) -7

Resolución

Sea

$$M=\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}$$

Entonces

$$M=\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[21]{(1-\sqrt{2})^3}$$

$$M=\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[21]{1-3\sqrt{2}+3\cdot 2-2\sqrt{2}}$$

$$M=\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[21]{7-5\sqrt{2}}$$

$$M=\sqrt[21]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}$$

$$M=\sqrt[21]{7^2-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt[21]{49-50}$$

$$\therefore\quad M=\sqrt[21]{-1}=-1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Indique uno de los radicales simples de la expresión

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+...+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}\,.$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}$ E) $-\sqrt{3}$

Resolución

> **Observación**
>
> $(\sqrt{2}+1)^2=2+1+2\sqrt{2}\ \rightarrow\ (\sqrt{2}+1)^2=3+\sqrt{2}$

Luego

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

$$\rightarrow\ \sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{1+2(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

Entonces

$$\underbrace{\sqrt{1+2\underbrace{\sqrt{1+...+2\underbrace{\sqrt{1+2\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}+1}}}_{\sqrt{2}+1}}}_{\sqrt{2}+1}}}_{\sqrt{2}+1}$$

Por lo tanto, uno de los radicales es $\sqrt{2}$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Si el polinomio
$P_{(x)}=1+\alpha x+9x^2+\beta x^3+16x^4$
posee raíz cuadrada exacta, calcule el valor de $\alpha\beta$.

A) 0 B) -8 C) 8
D) -16 E) 16

Resolución

Observación

$$x^3-2x^2+3x-2=x^3-x^2+2x-x^2+x-2$$
$$=x(x^2-x+2)-(x^2-x+2)$$
$$=(x^2-x+2)(x-1)$$

Además $(x^2-x+2)+(x-1)=x^2+1$

Luego

$$\sqrt{x^2+1-2\sqrt{x^3-2x^2+3x-2}}=$$

$$\sqrt{(x^2-x+2)+(x-1)-2\sqrt{x^2-x+2}\sqrt{x-1}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{x^2-x+2}^2+\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x^2-x+2}\sqrt{x-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x-1}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

El radical doble $\sqrt{24+8\sqrt{5}+12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}$ equivale a $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}$.

Calcule el valor de *xyzw*.

A) 200 B) 225
C) 215
D) 23 E) 25

Resolución

Sea

$$S=\sqrt{24+8\sqrt{5}+12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}$$

Entonces

$$S=\sqrt{4(6+2\sqrt{5})+2\sqrt{3}(6+2\sqrt{5})}$$

$$S=\sqrt{(6+2\sqrt{5})(4+2\sqrt{3})}$$

$$S=\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$S=\sqrt{\sqrt{5}^2+1^2+2\sqrt{5\cdot 1}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2+2\sqrt{3\cdot 1}}$$

$$S=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$S=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}+1)$$

$$S=\underset{\underset{x}{\uparrow}}{\sqrt{15}}+\underset{\underset{y}{\uparrow}}{\sqrt{5}}+\underset{\underset{z}{\uparrow}}{\sqrt{3}}+\underset{\underset{w}{\uparrow}}{\sqrt{1}}$$

$\therefore\ xyzw=(15)(5)(3)(1)=225$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Calcule el valor de $(m+n)$, si se sabe que el cuadrado del resto es igual a la raíz cuadrada del polinomio $P_{(x)}=81x^4+216x^3+216x^2+mx+n$.

A) 117 B) 115
C) 100
D) 99 E) 81

Luego

$C^2=A^2-B=(ax+by)^2-(ab+c)xy$ es un cuadrado perfecto

$\rightarrow$ $C^2=(ax)^2+(by)^2+2abxy-(ab+c)xy$

$C^2=(ax)^2+(2ab-ab-c)xy+(by)^2$

$\rightarrow$ $C^2=(ax)^2+\underbrace{(ab-c)}_{2ab}xy+(by)^2$: cuadrado perfecto

Observe que el término central debe ser el doble producto (positivo o negativo) de los términos ax y by.

Es decir, $(ab-c)xy=\pm 2ax\cdot by \leftrightarrow (ab-c)xy=\pm 2abxy$

Luego, $ab-c=2ab \vee ab-c=-2ab$

$\rightarrow$ $\underbrace{ab+c=0}_{\text{no puede ser}} \vee c=3ab$

$\therefore \dfrac{ab}{c}=\dfrac{1}{3}$

Clave E

PROBLEMA N.° 29

Halle el equivalente de la expresión $f_{(x)}=\sqrt{1+x+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}$. Considere $-0,5<x<0$.

A) $x+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-x$ C) $2x$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

Resolución

Sea

$$f_{(x)}^2=\left(\sqrt{1+x+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}\right)^2$$

$$f_{(x)}^2=1+x+\cancel{\sqrt{2x+1}}+1+x-\cancel{\sqrt{2x+1}}+2\sqrt{1+x+\sqrt{2x+1}}\cdot\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}$$

$$f_{(x)}^2=2x+2+2\sqrt{(1+x)^2-\sqrt{2x+1}^2} \rightarrow f_{(x)}^2=2x+2+2\sqrt{x^2+\cancel{2x+1}-(\cancel{2x+1})}$$

$$f_{(x)}^2=2x+2+2\sqrt{x^2}=2x+2+2|x|;\quad -\frac{1}{2}<x<0 \rightarrow f_{(x)}^2=\cancel{2x}+2-\cancel{2x}=2$$

$\therefore f_{(x)}=\sqrt{2}$

Clave E

Resolución

Racionalizamos la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}}{(\sqrt{21}+\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14})(\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14})}$$

$$=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}}{(\sqrt{21}+\sqrt{10})^2-(\sqrt{15}+\sqrt{14})^2}=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}}{21+10+2\sqrt{210}-(15+14+2\sqrt{210})}$$

$$=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}}{31+\cancel{2\sqrt{210}}-29-\cancel{2\sqrt{210}}}=\frac{\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}}{2}$$

Por lo tanto, el denominador racional es 2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

Indique el denominador racional de la expresión

$$\frac{-6}{-2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}.$$

A) 1 B) 2 C) −6 D) 7 E) 14

Resolución

La expresión puede escribirse así

$$M=\frac{6}{2-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$$

Entonces

$$M=\frac{6(2-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})}{(2-\sqrt{2})^2-\sqrt[4]{2}^2}$$

Luego

$$25-k=\overset{o}{6};\ 1\leq k\leq 7$$

$$\rightarrow\ k=1\ \vee\ k=7$$

Reemplazamos valores

$$k=1\ \rightarrow\ t_1=2^4=16$$

$$k=7\ \rightarrow\ t_7=2^3=8$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

Halle el denominador racional de la expresión

$$\frac{N}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{32}}.$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 6 E) 0

Resolución

Sea $\sqrt[6]{2}=y$

Entonces, el denominador es

$$1+y^3+y^2+y^5\equiv(y^3+1)(y^2+1)$$

Reponiendo

$$\frac{N}{\left(\sqrt[6]{2}^3+1\right)\left(\sqrt[6]{2}^2+1\right)}=$$

$$=\frac{N}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)}\cdot\frac{fr_1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{fr_2}{(\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{N fr_1 fr_2}{1\cdot 3}$$

Por lo tanto, el denominador es 3.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 36

Descomponga en radicales sencillos la expresión

$$f_{(x;\,y)}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y}+\sqrt{\left(\frac{4}{x^2+xy}\right)+\left(\frac{4}{xy+y^2}\right)}}$$

e indique uno de los radicales simples.

A) $\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ B) $\sqrt{\frac{x+y}{2}}$

C) $\sqrt{\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}}$

D) $\sqrt{\frac{2}{x+y}}$ E) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$

Resolución

Podemos escribir la expresión así

$$f_{(x;\,y)}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+y}+2\sqrt{\frac{1}{x(x+y)}+\frac{1}{y(x+y)}}}$$

$$\rightarrow\ f_{(x;\,y)}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+y}+2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x+y}}}$$

Entonces

$$f_{(x;\,y)}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}^{\,2}+\sqrt{\frac{1}{x+y}}^{\,2}+2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x+y}}}$$

$$f_{(x;\,y)}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{x+y}}\right)^2}$$

$$\therefore\ f_{(x;\,y)}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{x+y}}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

Halle el equivalente de la expresión irracional $\sqrt{\frac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}$.

A) $\sqrt{3}-1$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución

Sea

$$M=\frac{\sqrt{6+\sqrt{12}}}{3-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}} \rightarrow M=\sqrt{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}}=\sqrt{\frac{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}$$

$$M=\sqrt{\frac{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)^2}{\cancel{2}}}=\sqrt[\cancel{}]{(\sqrt{3}+1)^{\cancel{2}}}$$

$\therefore\ M=\sqrt{3}+1$

Clave C

PROBLEMA N.° 39

Indique el denominador racional de la expresión $M=\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}{\sqrt[9]{9^8}-\sqrt[9]{9^7}+\ldots+1}$.

A) 8 B) 9 C) 10

D) incalculable E) no se racionaliza

Resolución

Racionalizamos la expresión

$$M=\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}\cdot(\sqrt[9]{9}+1)}{\left(\sqrt[9]{9^8}-\sqrt[9]{9^7}+\sqrt[9]{9^6}-\ldots-\sqrt[9]{9}+1\right)(\sqrt[9]{9}+1)} \rightarrow M=\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}\cdot(\sqrt[9]{9}+1)}{\sqrt[\cancel{9}]{9}^{\cancel{9}}+1^9}$$

$$M=\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}\cdot(\sqrt[9]{9}+1)}{10}$$

Por lo tanto, el denominador racional es 10.

Clave C

Factorizamos el denominador

$$f=\frac{323}{(\sqrt[3]{11}-1)\left(2\sqrt[3]{11}^{2}+1\right)}$$

Racionalizamos la expresión

$$f=\frac{323\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}{(\sqrt[3]{11}-1)\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\cdot(2\sqrt[3]{121}+1)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}$$

$$f=\frac{323\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{11}^{3}-1^{3}\right)\left[(2\cdot\sqrt[3]{121})^{3}+1^{3}\right]}$$

$$f=\frac{323\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}{(11-1)(8\times121+1)}$$

$$\rightarrow\ f=\frac{\cancel{323}\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}{10\times\underset{3}{\cancel{969}}}$$

$$f=\frac{\left(\sqrt[3]{11}^{2}+\sqrt[3]{11}+1\right)\left(4\sqrt[3]{121}^{2}-2\sqrt[3]{121}+1\right)}{30}$$

Finalmente, su denominador racional es 30.

Clave $\boxed{D}$

PROBLEMA N.° 42

Efectúe y simplifique

$$4\left[\frac{1}{1+\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{4}}\right]\left[\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}+\sqrt{3}}\right].$$

A) $13+5\sqrt{3}$ B) $5+13\sqrt{3}$ C) $5-13\sqrt{3}$ D) $13-5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}-13$

PROBLEMA N.° 43

Calcule el valor de a que verifica la ecuación

$$\frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

A) 60 B) 64 C) 66

D) 62 E) 68

Resolución

Observación

$$(3+\sqrt{8})^2=9+8+2\cdot 3\cdot\sqrt{8}=17+6\cdot 2\sqrt{2}=17+12\sqrt{2}$$

Además

$$(\sqrt{2}+1)^2=2+1+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}=3+\sqrt{8}$$

Luego, en la igualdad se tiene

$$\frac{\sqrt{(3+\sqrt{8})^2}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

Entonces

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

$$\sqrt{2}+1+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

$$(8+\sqrt{2})^2=a+2\sqrt{128}$$

$$64+2+2\cdot 8\cdot\sqrt{2}=a+2\sqrt{128}$$

$$\therefore\ \underline{66}+2\sqrt{64\cdot 2}=\underline{a}+2\sqrt{128}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 44

Indique el denominador luego de racionalizar la expresión $M=\dfrac{5}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}$.

A) 2 B) 3 C) 1

D) 4 E) 5

Resolución

Factorizamos el denominador

$$M=\frac{5}{\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{5}{\sqrt[3]{5}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)-\sqrt[3]{3}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$M=\frac{5}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})}$$

Racionalizamos la expresión

$$M=\frac{5(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}$$

$$M=\frac{5(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2}^3-1)(\sqrt[3]{5}^3-\sqrt[3]{3}^3)}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{5(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(2-1)(5-3)}$$

$$M=\frac{5(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{2}$$

Por lo tanto, el denominador es 2.

Clave A

Resolución

La expresión puede escribirse así

$$f_{(x)}=\frac{1}{2}\sqrt{2x+\sqrt{8x}+4\sqrt[4]{2x^3}}\,;\,x>0$$

Haciendo un cambio de variable

$$a^2=2x \;\wedge\; b^2=\sqrt{8x}$$

Entonces

$$a=\sqrt{2x}=\sqrt[4]{(2x)^2} \;\wedge\; b=\sqrt[4]{8x}$$

además

$$ab=\sqrt[4]{(2x)^2}\cdot\sqrt[4]{8x}$$

$$ab=\sqrt[4]{(2x)(2x)(8x)}=2\sqrt[4]{2x^3}$$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2}$$

$$\rightarrow\; f_{(x)}=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}[\sqrt{2x}+\sqrt[4]{8x}]$$

$$\rightarrow\; f_{(x)}=\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 47

Si $x^2=x+1$; $x>0$, simplifique la expresión

$$P_{(x)}=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

A) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{x^3}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$

D) 1 E) $-\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

Resolución

Convenientemente escribimos

$$P_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x+2\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Como $x^2=x+1$, entonces $x=x^2-1=(x+1)(x-1)$

Luego

$$P_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{(x+1)+(x-1)+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}-\sqrt{x-1}\right\}$$

$$P_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}-\sqrt{x-1}\right\}$$

$$P_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{x+1}+\cancel{\sqrt{x-1}}-\cancel{\sqrt{x-1}}\right\}$$

$$P_{(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}}\,;\,x>0 \text{ ya que } x+1=x^2.$$

$$\therefore\; P_{(x)}=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 48

Determine el valor de

$m^2+m^2n^2+n^2-2m^2n+2mn^2-2mn,$

si se sabe que

$$m=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{29}+\sqrt{13}}{\sqrt{11}-\sqrt{29}+\sqrt{13}} \;\wedge\; n=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}.$$

A) 2 B) 1 C) −1

D) −2 E) 3

$$f_{(x)}=\frac{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x-1}}$$

$$\to\ f_{(x)}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}$$

$$\to\ f_{(x)}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)\sqrt{x-1}}{x-1}$$

Por lo tanto, el denominador es $x-1$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 50

Halle el equivalente de S.

$$S=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\ldots$$

(n sumandos)

A) $\sqrt{n}+1$ B) $\sqrt{n+1}-1$

C) $\sqrt{n}-1$

D) $\sqrt{n+1}+1$ E) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

Resolución

Sabemos que

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}$$

$$\vdots$$

Luego

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Pero

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+1}&=\cancel{\sqrt{2}}-1\\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}&=\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}&=\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}\\ &\vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}&=\sqrt{n+1}+\cancel{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\}(+)$$

$$S=\sqrt{n+1}-1$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 51

Determine el denominador de la expresión que se obtiene al racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$.

A) $3ab(a+b)$ B) $a+b$

C) a^2+b^2

D) ab E) $3ab$

Resolución

Sea

$$M=\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{-a-b}}$$

Recuerda

Identidad de Gauss

$x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx]$

Entonces

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

PROBLEMA N.° 53

Si $0<a<1$, halle el equivalente reducido de $f_{(a)}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}}+\sqrt{\dfrac{1-a^2}{a^2}}$.

A) a B) $\dfrac{1}{a^2}$ C) $\dfrac{1}{a}$ D) a^2 E) $2a$

Resolución

Podemos escribir la expresión así

$$f_{(a)}=\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}}+\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}$$

También

$$f_{(a)}=\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^2}{1^2-\sqrt{1-a^2}^{\,2}}}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cancel{\sqrt{}}a^2} \rightarrow f_{(a)}=\frac{\sqrt{\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^2}}{\sqrt{\cancel{1}-(\cancel{1}-a^2)}}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$f_{(a)}=\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\cancel{\sqrt{}}a^2}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \rightarrow f_{(a)}=\frac{1-\cancel{\sqrt{1-a^2}}+\cancel{\sqrt{1-a^2}}}{a}$$

$$\therefore\ f_{(a)}=\frac{1}{a}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 54

Transforme a radicales simples la expresión $f_{(x)}=\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-4a(a+1)-1}}$ e indique un radical simple.

A) $\sqrt{\dfrac{1-2a}{2}}$ B) $\sqrt{\dfrac{1+2a}{2}}$ C) $\sqrt{\dfrac{2+a}{2}}$ D) $\sqrt{\dfrac{2-a}{2}}$ E) $\sqrt{\dfrac{6x+2a+1}{2}}$

Luego

$$M=\frac{5\sqrt{5}+\cancel{3\cdot5\cdot\sqrt{3}}+3\cdot\sqrt{5}\cdot3+\cancel{3\sqrt{3}}+5\sqrt{5}-\cancel{3\cdot5\cdot\sqrt{3}}+3\cdot\sqrt{5}\cdot3-\cancel{3\sqrt{3}}}{\cancel{7\sqrt{7}}+3\cdot7\cdot\sqrt{5}+\cancel{3\cdot\sqrt{7}\cdot5}+5\sqrt{5}-\left(\cancel{7\sqrt{7}}-3\cdot7\cdot\sqrt{5}+\cancel{3\cdot\sqrt{7}\cdot5}-5\sqrt{5}\right)}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{\cancel{2}(5\sqrt{5}+9\sqrt{5})}{\cancel{2}(5\sqrt{5}+21\sqrt{5})}=\frac{14\cancel{\sqrt{5}}}{26\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{14}{26}$$

$$\therefore\ M=\frac{7}{13}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 56

Racionalice la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}}$ e indique el denominador racional.

A) a^2+b^2 B) a^2-b^2 C) a^4+b^4 D) $a-b$ E) $a+b$

Resolución

Sea $M=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}^3+\sqrt[4]{a}^2\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b^2}+\sqrt[4]{b}^3}$ la expresión a racionalizar.

Entonces

$$M=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}^3+\sqrt[4]{a}^2\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b^2}+\sqrt[4]{b}^3)}\ \rightarrow\ M=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}^4-\sqrt[4]{b}^4}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{a-b}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 57

Si se cumple que $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, calcule $a+b+c$.

A) $\dfrac{1}{3}+3\sqrt{2}$ B) 2 C) 1 D) 3 E) $\dfrac{1}{3}$

Resolución

Observación

$$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^2-x^3=\frac{1-2x^4+x^8}{1-2x+x^2}-x^3$$

$$=\frac{1-\cancel{2x^4}+x^8-x^3+\cancel{2x^4}-x^5}{1-2x+x^2}=\frac{x^8-x^5-x^3+1}{1-2x+x^2}$$

$$\rightarrow\ (1+x+x^2+x^3)^2-x^3=\frac{x^5(x^3-1)-(x^3-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x^3-1)(x^5-1)}{(x-1)^2}$$

- Si hacemos $x=\sqrt[5]{2}$, entonces

$$(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2-\sqrt[5]{8}=\frac{\left(\sqrt[5]{2}^3-1\right)\left(\sqrt[5]{2}^5-1\right)}{\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}\ \rightarrow\ \frac{1}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2-\sqrt[5]{8}}=\frac{(\sqrt[5]{2}-1)^2}{(\sqrt[5]{8}-1)(2-1)}$$

Luego

$$V=\frac{8}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2-\sqrt[5]{8}}=\frac{8\cdot(\sqrt[5]{2}-1)^2\left(\sqrt[5]{8}^4+\sqrt[5]{8}^3+\sqrt[5]{8}^2+\sqrt[5]{8}+1\right)}{(\sqrt[5]{8}-1)\left(\sqrt[5]{8}^4+\sqrt[5]{8}^3+\sqrt[5]{8}^2+\sqrt[5]{8}+1\right)}$$

Finalmente

$$V=\frac{8(\sqrt[5]{2}-1)^2\left(\sqrt[5]{8}^4+\sqrt[5]{8}^3+\sqrt[5]{8}^2+\sqrt[5]{8}+1\right)}{\sqrt[5]{8}^5-1^5}\ \rightarrow\ V=\frac{8(\sqrt[5]{2}-1)^2\left(\sqrt[5]{8}^4+\sqrt[5]{8}^3+\ldots+1\right)}{7}$$

- $$N=\frac{4}{\left(1-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right)(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}\cdot\frac{\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^2\right)}{\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^2\right)}$$

$$N=\frac{4\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^2\right)}{\left(1^3-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^3\right)(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}\ \rightarrow\ N=\frac{4\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^2\right)}{\left[1-(\sqrt{2}-1)\right](1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$$

$$N=\frac{4\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}^2\right)}{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2}-1)\cdot(2+\sqrt{2})}{(\sqrt[3]{2}-1)\cdot(2+\sqrt{2})}$$

Resolución

Sea $\sqrt[6]{3}=x$, entonces $\sqrt[3]{3}=x^2$; $\sqrt[6]{243}=x^5$; $\sqrt{3}=x^3$

Luego, el denominador de M es

$$D=(x^2+1)(x^5+1)+x^3(x+1)=x^7+x^5+x^2+1+x^4+x^3$$

$$\rightarrow\ D=x^7+x^5+x^3+x^4+x^2+1=x^3(x^4+x^2+1)+(x^4+x^2+1)$$

$$\rightarrow\ D=(x^4+x^2+1)(x^3+1)=(\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt{3}+1)$$

Entonces

$$M=\frac{1}{(\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt{3}+1)}\ \rightarrow\ M=\frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt[3]{3}^3-1^3)(\sqrt{3}^2-1)}=\frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(3-1)(3-1)}\ \rightarrow\ M=\frac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Por lo tanto, el denominador es 4.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 60

Simplifique la expresión $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$, si $0<a<1$.

A) –2 B) 2 C) –1 D) 1 E) 0

Resolución

Podemos escribir la expresión así

$$f_{(a)}=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}^2}{\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-a}^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

CAPÍTULO 10

BINOMIO DE NEWTON

Test

PROBLEMA N.° 1

Luego de resolver la ecuación

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!}=6n+18,$$

calcule el valor de $\sqrt{5n-1}$.

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{14}$
D) $\sqrt{24}$ E) $\sqrt{15}$

Resolución

Resolvemos la ecuación

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!}=6n+18$$

$$\frac{(n+4)\cancel{(n+3)}\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}}=6\cancel{(n+3)}$$

$\rightarrow\ n+4=6\ \rightarrow\ n=2$

$\therefore\ \sqrt{5n-1}=\sqrt{9}=3$

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Indique cuál es el valor de a que hace posible la igualdad

$$\frac{(a+1)!+(a+2)!+(a+3)!}{(a+1)!}=81.$$

A) 3 B) 9 C) 6
D) 5 E) 8

Resolución

Simplificamos en la ecuación

$$\frac{(a+1)!+(a+2)!+(a+3)!}{(a+1)!}=81$$

Luego descomponemos

$$\frac{\cancel{(a+1)!}+(a+2)\cancel{(a+1)!}+(a+3)(a+2)\cancel{(a+1)!}}{\cancel{(a+1)!}}=81$$

$$\underbrace{1+a+2+(a+3)(a+2)}=81$$

$$(a+3)^2=9^2\ \rightarrow\ a+3=9$$

$\therefore\ a=6$

Clave C

PROBLEMA N.° 3

Indique cuál es el equivalente reducido de

$C_0^{12}+3C_0^{10}-4C_{15}^{15}+5C_{100}^{101}$.

A) 101 B) 202 C) 303
D) 505 E) 707

Resolución

Para resolver la ecuación

$$4C_3^{n+1}+C_3^{n}+C_3^{n+2}=100n$$

Recuerda

$$C_k^n=\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1} \quad \wedge \quad C_0^n=1$$

Luego

$$4\frac{n+1}{3}\cdot\frac{\cancel{n}}{2}\frac{(n-1)}{1}+\frac{\cancel{n}}{3}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{1}+\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\cancel{n}}{1}=100\cancel{n}$$

$$\rightarrow\ 4n^2-4+n^2-\cancel{3n}+2+n^2+\cancel{3n}+2=600$$

$$\rightarrow\ 6n^2=600$$

$$\therefore\ n=10$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Si se cumple que

$C_{n-5}^{n-2}+C_{n-4}^{n-2}+C_{n-3}^{n-1}=C_3^{84}$,

calcule el valor de $\sqrt{n-3}$.

A) 7 B) 8
C) 9
D) 6 E) 11

Resolución

Para resolver

$$C_{n-5}^{n-2}+C_{n-4}^{n-2}+C_{n-3}^{n-1}=C_3^{84}$$

Recuerda

$$C_k^n=C_{n-k}^n$$

Entonces

$$\underbrace{C_3^{n-2}+C_2^{n-2}}+C_2^{n-1}$$

$$\underbrace{C_3^{n-1}\ +\ C_2^{n-1}}$$

$$C_3^n=C_3^{84}\ \rightarrow\ n=84$$

$$\therefore\ \sqrt{n-3}=9$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

¿Cuál es el término de lugar 13 en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^{15}$?

A) $320x^{-54}$ B) $390x^{-54}$ C) $455x^{-54}$
D) $655x^{-54}$ E) $755x^{-54}$

Resolución

Calculamos el término de lugar 13 del desarrollo de

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^{15}$$

Así

$$t_{13}=t_{12+1}=C_{12}^{15}(x^2)^{15-12}\cdot\left(\frac{1}{x^5}\right)^{12}$$

$$=C_3^{15}x^6\cdot x^{-60}=455x^{-54}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

En el desarrollo de $(1+x)^{3n}$, ¿cuál es la razón entre r y n para que los coeficientes de los términos de lugares $3r$ y $r+2$ sean iguales?

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3
D) 3/4 E) 2/5

Problemas resueltos

NIVEL I

PROBLEMA N.° 1

Simplifique la expresión S.

$$S=\frac{x!+(x+1)!}{x!}-\frac{(x+2)!-(x+1)!}{(x+1)!}$$

A) 1
B) x
C) $x-1$
D) $x+1$
E) 0

Resolución

Simplicamos la fracción

$$\frac{x!+(x+1)!}{x!}-\frac{(x+2)!-(x+1)!}{(x+1)!}$$

$$=\frac{\cancel{x!}+(x+1)\cancel{x!}}{\cancel{x!}}-\frac{(x+2)\cancel{(x+1)!}-\cancel{(x+1)!}}{\cancel{(x+1)!}}$$

$$=1+x+1-(x+2-1)$$

$$=x+2-x-1=1$$

Por lo tanto, el equivalente es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

¿Cuál es el valor simplificado de

$$M=\frac{2!-1!}{0!}+\frac{3!-2!}{1!}+\ldots+\frac{11!-10!}{9!}?$$

A) 55
B) 77
C) 285
D) 85
E) 385

Resolución

Nos piden simplificar

$$\frac{2!-1!}{0!}+\frac{3!-2!}{1!}+\ldots+\frac{11!-10!}{9!}$$

$$=(2-1)+(3\times2-2)+(4\times3-3)+\ldots+(11\times10-10)$$

$$=1+4+9+\ldots+100$$

$$=1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2$$

$$=\frac{10(11)(21)}{6}=385$$

Por lo tanto, la suma es igual a 385.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

¿Cuál es el menor valor de n que justifique la igualdad $(n+3)!=n^4+6n^3+11n^2+6n$?

A) 1 B) 0
C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Tenemos

$$T=\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}+\ldots \text{ 33 sumandos}$$

$$=\frac{\cancel{0!}}{2\times1\times\cancel{0!}}+\frac{\cancel{1!}}{3\times2\times\cancel{1!}}+\frac{\cancel{2!}}{4\times3\times\cancel{2!}}+\ldots+\frac{\cancel{32!}}{34\times33\times\cancel{32!}}$$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{33\times34}$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{33}}-\frac{1}{34}$$

$$=1-\frac{1}{34}=\frac{33}{34}$$

$$\therefore\ T=\frac{33}{34}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Sea T la expresión tal que

$$T=\frac{11^{11!+3}\cdot5^{11!}\cdot(2!)^{11!}(9!)^{(12)!}}{(9!)^{11(11)!}\cdot(11)!^{11!}\cdot11}$$

Calcule el valor de $\sqrt{T}$.

A) 11 B) $\sqrt{11}$

C) 121

D) $\sqrt{18}$ E) $\sqrt{99}$

Resolución

Se tiene

$$T=\frac{11^{11!+3}\cdot5^{11!}\cdot(2!)^{11!}(9!)^{(12)!}}{(9!)^{11(11)!}\cdot(11)!^{11!}\cdot11}$$

$$=\frac{11^{11!}\cdot11^{3}\cdot(10)^{11!}(9!)^{12.11!}}{(11)!^{11!}\cdot11\cdot(9!)^{11\cdot11!}}$$

Entonces

$$=\frac{11^{11!}\cdot10^{11!}\cdot(9!)^{11!}\cdot11^{3}}{(11!)^{11!}\cdot11}=\frac{(11\cdot10\cdot9!)^{11!}11^{3}}{(11!)^{11!}11}$$

$$=\frac{\cancel{(11!)^{11!}}\cdot11^{2}}{\cancel{(11!)^{11!}}}=11^{2}=121$$

$\rightarrow\ T=121$

$\therefore\ \sqrt{T}=11$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Indique el valor de x que verifica la ecuación.

$$C_{4}^{x+3}+C_{x-2}^{x+3}=C_{x-1}^{x+5}-1$$

A) 2 B) 4 C) 6

D) 7 E) 8

Resolución

Se tiene la ecuación

$$C_{4}^{x+3}+C_{x-2}^{x+3}=C_{x-1}^{x+5}-1$$

$$\rightarrow\ C_{4}^{x+3}+C_{5}^{x+3}=C_{x-1}^{x+5}-1$$

Luego

$$=\underbrace{C_2^5+C_3^5}+C_4^6+C_5^7+C_6^8+C_7^9$$

$$=\underbrace{C_3^6+C_4^6}+C_5^7+C_6^8+C_7^9$$

$$=\underbrace{C_4^7+C_5^7}+C_6^8+C_7^9$$

$$=\underbrace{C_5^8+C_6^8}+C_7^9$$

$$=\underbrace{C_6^9+C_7^9}$$

$$=C_7^{10}=C_3^{10}$$

Por lo tanto, la suma es C_3^{10}.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 11

Simplifique la expresión

$$\frac{C_{10}^{20}\cdot C_{20}^{26}-C_9^{19}\cdot C_6^{26}}{C_5^{25}\cdot C_9^{19}+C_6^{25}\cdot C_{10}^{19}}.$$

A) C_5^{26} B) C_{19}^{26} C) C_{19}^{25}

D) C_6^{25} E) 1

Resolución

Se tiene

$$\frac{C_{10}^{20}\cdot C_{20}^{26}-C_9^{19}\cdot C_6^{26}}{C_5^{25}\cdot C_9^{19}+C_6^{25}\cdot C_{10}^{19}}$$

$$=\frac{\frac{20}{10}C_9^{19}\cdot C_6^{26}-C_9^{19}\cdot C_6^{26}}{C_5^{25}\cdot C_9^{19}+\frac{25-6+1}{6}C_5^{25}\cdot\frac{19-10+1}{10}C_9^{19}}$$

$$=\frac{2C_9^{19}\cdot C_6^{26}-C_9^{19}\cdot C_6^{26}}{C_5^{25}\cdot C_9^{19}+\frac{10}{3}\cdot C_5^{25}\cdot C_9^{19}}=\frac{\cancel{C_9^{19}}\cdot C_6^{26}}{\frac{13}{3}\cdot C_5^{25}\cdot \cancel{C_9^{19}}}=\frac{C_6^{26}}{\frac{26}{6}\cdot C_5^{25}}$$

$$=\frac{C_6^{26}}{C_6^{26}}=1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

De la igualdad

$$\underbrace{C_9^{10}+C_9^{11}+C_9^{12}+\ldots+C_9^m}_{n\text{ sumandos}}=C_p^{29}-1$$

determine el mayor valor de $(m+n+p)$.

A) 57 B) 66

C) 49

D) 68 E) 72

Resolución

Tenemos la igualdad

$$\underbrace{C_9^{10}+C_9^{11}+C_9^{12}+\ldots+C_9^m}_{n\text{ sumandos}}=C_p^{29}-1$$

$$\leftrightarrow\ 1+C_9^{10}+C_9^{11}+C_9^{12}+\ldots+C_9^m=C_p^{29}$$

$$\leftrightarrow\ \underbrace{C_{10}^{10}+C_9^{10}}+C_9^{11}+C_9^{12}+\ldots+C_9^m=C_p^{29}$$

$$\leftrightarrow\ \underbrace{C_{10}^{11}+C_9^{11}}+C_9^{12}+\ldots+C_9^m=C_p^{29}$$

$$\underbrace{C_{10}^{12}+C_9^{12}}+\ldots+C_9^m=C_p^{29}$$

Desarrollando sucesivamente se obtiene

$$C_{10}^{m+1}=C_p^{29}$$

Resolución

Calculamos el término del lugar 25 en

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$$

$$t_{25}=C_{24}^{5n+2}\left(\frac{x^2}{y}\right)^{5n-22}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{24}=Ax^{44}=Ax^{44}\cdot y^k$$

Como x tiene exponente 44, entonces

$2(5n-22)-12=44$

$10n=100$

$n=10$

$\therefore\ n+2=12$

Clave E

PROBLEMA N.° 16

En el desarrollo de $(x^3+y^2)^m$ se cumple que el término del lugar 24 es igual al término del lugar 24 pero contado a partir del final. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo?

A) 37
B) 47
C) 48
D) 46
E) indeterminado

Resolución

Se tiene

$$(x^3+y^2)^m=t_1+t_2+\ldots+\underbrace{t_{24}+\ldots+t_{m+1}}_{24\text{ términos}}$$

Entonces $m+1=47$

$m=46$

Por lo tanto, el desarrollo tiene 47 términos.

Clave B

PROBLEMA N.° 17

Si la suma de los coeficientes del desarrollo de $(x^2+y^3)^{16}$ es cuatro veces la suma de coeficientes del desarrollo de $(x^8+x^4)^{n-1}$, ¿cuál es el valor de n?

A) 11 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

Resolución

Sea $P_{(x)}=(x^2+x^3)^{16}\ \rightarrow\ P_{(1)}=2^{16}$

$h_{(x)}=(x^8+x^4)^{n-1}\ \rightarrow\ h_{(1)}=2^{n-1}$

Del dato

$2^{16}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}\ \rightarrow\ n+1=16$

de donde $n=15$

Por lo tanto, el valor de n es 15.

Recuerda

$\sum \text{coef.}P_{(x)}=P_{(1)}$

Clave B

PROBLEMA N.° 18

Al efectuar el desarrollo de $(x+y+z+w)^n$ se obtienen 286 términos.
¿Cuál es el valor de $n+5$?

A) 14 B) 15 C) 17
D) 16 E) 13

NIVEL II

PROBLEMA N.° 21

En la expansión de $(1+x)^{43}$, los coeficientes de los términos de lugares $2r+1$ y $r+2$ son iguales. Halle r si es mayor que 2.

A) 13 B) 11
C) 10
D) 12 E) 14

Resolución

Se tiene $P_{(x)}=(1+x)^{43}$

Del dato, los términos

$$t_{2r+1}=C_{2r}^{43}x^{2r} \quad \text{y} \quad t_{r+2}=C_{r+1}^{43}x^{r+1}$$

tienen el mismo coeficiente, entonces

$$C_{2r}^{43}=C_{r+1}^{43}$$

$$\leftrightarrow\ 2r=r+1 \quad \vee \quad 2r+r+1=43$$

$$r=1 \quad \vee \quad r=14$$

y como $r>2$

$\therefore\ r=14$

Clave E

PROBLEMA N.° 22

¿Cuántos términos del desarrollo de $(3\sqrt{3}+\sqrt{2})^{12}$ son números naturales?

A) 7 B) 6
C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Desarrollaremos $(3\sqrt{3}+\sqrt{2})^{12}$, que tiene 13 términos. En efecto

$$t_{K+1}=C_K^{12}(3\sqrt{3})^{12-K}(\sqrt{2})^K$$

$$t_{K+1}=C_K^{12}\cdot 3^{12-K}\cdot 3^{\frac{12-K}{2}}\cdot 2^{\frac{K}{2}}$$

Y como el desarrollo debe tener términos naturales, entonces los exponentes

$$\frac{12-K}{2} \ \wedge\ \frac{K}{2}$$

deben ser naturales; esto implica que K es par, y como toma valores desde 0 hasta 12, entonces por ser par $K=0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$.

Por lo tanto, los términos naturales son 7.

Clave A

PROBLEMA N.° 23

En el desarrollo del binomio $(ax^a+bx^b)^n$ los términos de lugares $a+3$ y $b-1$ equidistan de los extremos; además, la suma de todos los coeficientes es 27. Halle la suma de todos los exponentes de variable (x) en su desarrollo.

A) 20 B) 18 C) 16
D) 14 E) 15

Resolución

Tenemos

$$P_{(x)}=(ax^a+bx^b)^n \text{ tal que}$$

$$P_{(1)}=(a+b)^n=27$$

PROBLEMA N.° 25

En el desarrollo del siguiente binomio $(a^4+b^5)^{3n}$ los términos de lugares $(n+6)$ y $(n+8)$ equidistan de los extremos. Determine el exponente de a en el término central.

A) 25 B) 36
C) 48
D) 72 E) 81

Resolución

Tenemos el binomio $(a^4+b^5)^{3n}$ tal que

$$t_{n+6}=C_{n+5}^{3n}(a^4)^{2n-5}(b^5)^{n+5}$$

$$t_{n+8}=C_{n+7}^{3n}(a^4)^{2n-7}(b^5)^{n+7}$$

Luego, del dato

$$C_{n+5}^{3n}=C_{n+7}^{3n}$$

$\rightarrow$ $n+5+n+7=3n$

$\rightarrow$ $n=12$

de donde se tiene el binomio $(a^4+b^5)^{36}$, cuyo desarrollo tiene 37 términos. Entonces, el término central es

$$t_c=t_{19}=C_{18}^{36}(a^4)^{18}(b^5)^{18}$$

$$t_c=t_{19}=C_{18}^{36}a^{72}\cdot b^{90}$$

Por lo tanto, el exponente de a en el término central es 72.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 26

Halle el lugar que ocupa el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}.$$

A) 111 B) 113
C) 115
D) 117 E) 120

Resolución

Calcularemos el término independiente en el desarrollo de $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}$; para ello, primero calculamos un término $K+1$:

$$t_{K+1}=C_K^{154}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{154-K}\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^K$$

$$=(-1)^K C_K^{154}x^{\frac{2(154-K)}{3}}\cdot x^{\frac{-K}{4}}=(-1)^K C_K^{154}x^{\frac{2(154-K)}{3}-\frac{K}{4}}$$

Como es término independiente, igualamos a cero el exponente de x.

$$\frac{2(154-K)}{3}-\frac{K}{4}=0$$

$\rightarrow$ $8(154-K)-3K=0$

$\rightarrow$ $11K=8(154)$

$K=112$

Por lo tanto, el término independiente es $t_{K+1}=t_{113}$.

Clave **B**

Resolución

Tenemos

$$\left(C_1^n \cdot C_2^n \cdot C_3^n \ldots C_n^n\right)(1!2!3!\ldots n!)^2=(40\ 320)^9$$

$$\left(\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdots\frac{n!}{n!0!}\right)(1!2!3!\ldots n!)^2=(40\ 320)^9$$

$$\leftrightarrow\left(\frac{n!}{1!\cancel{(n-1)!}}\cdot\frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cdot\frac{n!}{\cancel{3!(n-3)!}}\cdots\frac{n!}{\cancel{(n-1)!}1!}\cdot\frac{n!}{\cancel{n!0!}}\right)\cancel{(1!2!3!\ldots n!)}\,[\cancel{1!2!3!\ldots(n-1)!}]n!=(40\ 320)^9$$

$$\leftrightarrow\ (n!)^n\cdot(n!)=(1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8)^9\ \rightarrow\ (n!)^{n+1}=(8!)^9$$

$$\leftrightarrow\ n=8\ \leftrightarrow\ 2n=16$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

De la expansión de $\left(ax^b+bx^a\right)^{a+b}$, la raíz cuadrada de la suma de coeficientes es 216, y la parte literal (variable) del quinto término es x^{20}. Halle el coeficiente del cuarto término si $(a+b)\in\mathbb{N}$.

A) 10 240 B) 20 480 C) 5120 D) 2560 E) 51 200

Resolución

Sea $P_{(x)}=\left(ax^b+bx^a\right)^{a+b}$ tal que $\sqrt{P_{(1)}}=216$

Como $P_{(1)}=(a+b)^{a+b}$, entonces $\sqrt{(a+b)^{a+b}}=216=6^3$

$(a+b)^{a+b}=\left(6^3\right)^2=6^6$, de donde $a+b=6$.

Luego

$$P_{(x)}=\left(ax^b+bx^a\right)^6$$

Calculamos en seguida el t_5: $t_5=C_4^6\left(ax^b\right)^2\left(bx^a\right)^4=a^2b^4C_4^6\,x^{2b+4a}$

Del dato: $2b+4a=20\ \rightarrow\ b+2a=10$

Resolución

Vemos que en la suma de los combinatorios los signos van alternándose y los índices inferiores son 0; 2; 4; 6; ... Entonces, es conveniente partir por

$$(1+i)^{4n}=C_0^{4n}+C_1^{4n}i+C_2^{4n}i^2+C_3^{4n}i^3+C_4^{4n}i^4+...+C_{4n}^{4n}i^{4n}$$

$$=C_0^{4n}+C_1^{4n}i-C_2^{4n}-C_3^{4n}i+C_4^{4n}+C_5^{4n}i-C_6^{4n}+...+C_{4n}^{4n}$$

También

$$=\left(C_0^{4n}-C_2^{4n}+C_4^{4n}-C_6^{4n}+...+C_{4n}^{4n}\right)+i\left(C_1^{4n}-C_3^{4n}+C_5^{4n}-...-C_{4n-1}^{4n}\right)$$

Pero

$$(1+i)^{4n}=\left((1+i)^4\right)^n=(-4)^n=(-1)^n\cdot 4^n$$

$$\rightarrow\ (-1)^n\cdot 4^n=\left(C_0^{4n}-C_2^{4n}+C_4^{4n}-C_6^{4n}+...+C_{4n}^{4n}\right)+i\left(C_1^{4n}-C_3^{4n}+...-C_{4n-1}^{4n}\right)$$

Igualando complejos

$$C_0^{4n}-C_2^{4n}+C_4^{4n}-...+C_{4n}^{4n}=(-1)^n\cdot 4^n \text{ y}$$

$$C_1^{4n}-C_3^{4n}+C_5^{4n}-...-C_{4n-1}^{4n}=0$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{\cancel{4^n}}(-1)^n\cdot\cancel{4^n}=(-1)^n$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

Halle el equivalente reducido de S.

$$S=\frac{C_1^n}{3}+\frac{2C_2^n}{3^2}+\frac{3C_3^n}{3^3}+\frac{4C_4^n}{3^4}+...+\frac{nC_n^n}{3^n}$$

A) $\frac{n}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ B) $\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ C) $\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$

D) $\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ E) $\frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

Resolución

Se tiene

$$S=\frac{C_1^n}{3}+\frac{2C_2^n}{3^2}+\frac{3C_3^n}{3^3}+\frac{4C_4^n}{3^4}+...+\frac{nC_n^n}{3^n}$$

Entonces

$$\frac{nC_0^{n-1}}{3}+\frac{nC_1^{n-1}}{3^2}+\frac{nC_2^{n-1}}{3^3}+\frac{nC_3^{n-1}}{3^4}+\frac{nC_{n-1}^{n-1}}{3^n}$$

$$=\frac{n}{3}\left[C_0^{n-1}+C_1^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)+C_2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+C_{n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{n}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

Halle el equivalente reducido de M.

$$M=5C_0^n+\frac{5^2C_1^n}{2}+\frac{5^3C_2^n}{3}+\frac{5^4C_3^n}{4}+...+\frac{5^{n+1}C_n^n}{n+1}$$

A) $\frac{5^{n+1}-1}{n+1}$ B) $\frac{6^{n+1}+1}{n-1}$ C) $\frac{6^{n+1}-1}{n+1}$

D) $\frac{6^{n+1}-2}{n+2}$ E) $\frac{5^{n+1}-2}{n+2}$

Pero

$$(1+\sqrt{3}i)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$$

Comparando, de la igualdad de complejos se tiene

$$\sqrt{3}\left(C_1^n-3C_3^n+9C_5^n-27C_7^n+\ldots\right)=2^n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad C_1^n-3C_3^n+9C_5^n-27C_7^n+\ldots=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Clave B

PROBLEMA N.° 36

Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{1}{2}$

Resolución

Nos piden calcular el término independiente de $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

Para ello calculamos el término general:

$$t_{K+1}=C_K^9\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-K}\left(-\frac{1}{3x}\right)^K=\left(\frac{3}{2}\right)^{9-K}\left(-\frac{1}{3}\right)^K C_K^9x^{18-3K}$$

Entonces

$$18-3K=0\ \rightarrow\ K=6$$

$$t_i=t_7=\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{3}\right)^6C_6^9=\frac{1}{2^3\cdot3^3}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\times\overset{4}{\cancel{8}}\times7}{1\times\underset{1}{\cancel{2}}\times\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{84}{216}$$

$$\therefore\ \frac{7}{18}$$

Clave C

Resolución

Tenemos $P_{(x)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}(1+x)^{100}$.

Como nos piden calcular el término de mayor valor numérico, calculamos tres términos consecutivos.

$$t_K=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}C_{K-1}^{100}(x)^{K-1}$$

$$t_{K+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}C_{K}^{100}(x)^{K}$$

$$t_{K+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}C_{K+1}^{100}(x)^{K+1}$$

Tomamos

$$t_K<t_{K+1} \;\wedge\; t_{K+1}>t_{K+2} \text{ para } x=1$$

$$\rightarrow\; C_{K-1}^{100}<C_{K}^{100} \;\wedge\; C_{K}^{100}>C_{K+1}^{100}$$

$$\rightarrow\; \frac{\cancel{100!}}{(K-1)!(101-K)!}<\frac{\cancel{100!}}{K!(100-K)!} \;\wedge$$

$$\frac{\cancel{100!}}{K!(100-K)!}>\frac{\cancel{100!}}{(K+1)!(99-K)!}$$

$$\rightarrow\; \cancel{K!}(100-K)!<(\cancel{K}-1)!(101-K)! \;\wedge$$

$$(K+1)!(99-K)!>K!(100-K)!$$

$$K<101-K \;\wedge\; K+1>100-K$$

$$2K<101 \;\wedge\; 2K>99$$

$$K<\frac{101}{2} \;\wedge\; K>\frac{99}{2}$$

$$K<50{,}5 \;\wedge\; K>49{,}5\,;\; K\in\mathbb{N}$$

Como $K=50$, el término $K+1=51$.

Por lo tanto, el término de mayor valor numérico es el de lugar 51, y dicho término es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}C_{50}^{100}=2^{-100}\cdot\frac{(100)!}{50!\cdot 50!}$$

$$=\frac{100!}{(50!)^2}\cdot 2^{-100}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 40

Sabiendo que en la expansión de $(3x+1)^n$ los términos de los lugares sexto y séptimo tienen el mismo coeficiente, calcule la suma de todos los coeficientes de dicha expansión.

A) 2^{22} B) 2^{26} C) 2^{34}
D) 2^{36} E) 2^{46}

Resolución

Sea

$$P_{(x)}=(3x+1)^n$$

Luego

$$t_6=C_5^n(3x)^{n-5} \;\wedge\; t_7=C_6^n(3x)^{n-6}$$

$$=3^{n-5}C_5^nx^{n-5} \;\wedge\; =3^{n-6}C_6^nx^{n-6}$$

Como los coeficientes de t_6 y t_7 son iguales, entonces $3^{n-5}C_5^n=3^{n-6}C_6^n$

$$\rightarrow\; 3\cancel{C_5^n}=C_6^n=\frac{n-6+1}{6}\cancel{C_5^n}$$

$$\rightarrow\; 18=n-5$$

$$n=23$$

Resolución

Veamos el desarrollo de

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n=(x+1)^n(1+x)^n$$

En efecto

$$(1+x)^{2n}=C_0^{2n}+C_1^{2n}x+C_2^{2n}x^2+\ldots+C_n^{2n}x^n+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

$$(x+1)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}+C_2^nx^{n-2}+\ldots+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+C_3^nx^3+\ldots+C_n^nx^n$$

Efectuamos

$$(x+1)^n(1+x)^n=\left(C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}+C_2^nx^{n-2}+\ldots+C_n^n\right)\left(C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\ldots+C_n^nx^n\right)$$

$$=\left((C_0^n)^2+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\ldots+(C_n^n)^2\right)x^n+\ldots$$

Comparando con el coeficiente de x^n tenemos que

$$(C_0^n)^2+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_n^{2n}$$

$$=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 44

Halle el segundo término de la expansión de

$$\frac{(1+x)^{1/4}\cdot\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}.$$

A) $\frac{17}{2}x$ B) $\frac{23}{4}x$ C) $\frac{19}{4}x$

D) $6x$ E) $\frac{17}{4}x$

Resolución

Desarrollando

$$(1+x)^{1/4}=1+\binom{1/4}{1}x+\binom{1/4}{2}x^2+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\ldots$$

También

$$(1+5x)^{1/2}=1+\binom{1/2}{1}(5x)+\binom{1/2}{2}(5x)^2+\ldots$$

$$\rightarrow\ =1+\frac{5}{2}x-\frac{25}{8}x^2+\ldots$$

$$(1-x)^{-2}=1+\binom{-2}{1}(-x)+\binom{-2}{2}(-x)^2+\ldots$$

$$\rightarrow\ =1+2x+3x^2+\ldots$$

Luego, efectuamos

$$\frac{(1+x)^{1/4}(1+5x)^{1/2}}{(1-x)^2}=(1+x)^{1/4}(1+5x)^{1/2}(1-x)^{-2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\ldots\right)\left(1+\frac{5}{2}x-\frac{25}{8}x^2+\ldots\right)(1+2x+3x^2+\ldots)$$

$$=\left(1+\frac{11}{4}x-\frac{83}{32}x^2+\ldots\right)(1+2x+3x^2+\ldots)$$

$$=\left(1+\frac{19}{4}x+\ldots\right)$$

Por lo tanto, el segundo término es $\frac{19}{4}x$.

Clave **C**

Resolución

Sea $f_{(x)}=1+x+x^2$

Calculamos las raíces de $f_{(x)}$; es decir, haciendo $f_{(x)}=0$ tenemos

$$1+x+x^2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$$

De donde se observa $x_2=x_1^2$

Llamemos

$$w=x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^2=x_2=x_1^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Vemos que

$$1+w+w^2=0 \ \vee \ w+w^2=-1 \ \vee$$
$$w^3=1 \ \vee \ w^{3K}=1$$

Luego, en la identidad

$$(1+x+x^2)^n\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$
$$+a_5x^5+\ldots+a_{2n}x^{2n}$$

Evaluamos en

$x=1$: $3^n=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{2n}$

$x=w$: $0=(a_0+a_3+a_6+\ldots)+(a_1+a_4+a_7+\ldots)w$
$+(a_2+a_5+a_8+\ldots)w^2$

$x=w^2$: $0=(a_0+a_3+a_6+\ldots)+(a_1+a_4+a_7+\ldots)w^2$
$+(a_2+a_5+a_8+\ldots)w$

Haciendo

$$a=a_0+a_3+a_6+\ldots;\quad b=a_1+a_4+a_7+\ldots;$$
$$c=a_2+a_5+a_8+\ldots$$

tenemos

$$a+b+c=3^n \qquad \text{(I)}$$

$$a+bw+cw^2=0 \qquad \text{(II)}$$

$$a+bw^2+cw=0 \qquad \text{(III)}$$

Sumando miembro a miembro (I), (II) y (III)

$$3a+b\underbrace{(1+w+w^2)}_{0}+c\underbrace{(1+w^2+w)}_{0}=3^n$$

$$\rightarrow\ 3a=3^n\ \rightarrow\ a=3^{n-1}$$

Sumando (II) y (III)

$$2a+b(w+w^2)+c(w^2+w)=0$$

$$2a-b-c=0$$

$$b+c=2a=2\cdot 3^{n-1} \qquad (*)$$

Restando (II) y (III)

$$b(w-w^2)+c(w^2-w)=0$$

$$\underbrace{(w-w^2)}_{\neq 0}\ (b-c)=0$$

$$\rightarrow\ b-c=0\ \rightarrow\ b=c$$

De (*)

$$\cancel{2}b=\cancel{2}\cdot 3^{n-1}\ \rightarrow\ b=3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_1+a_4+a_7+\ldots=3^{n-1}$$

Clave **B**

Luego

$$=1-\frac{1}{2^n\cdot n!}=\frac{2^n\cdot n!-1}{2^n\cdot n!}$$

$$\therefore\ S=\frac{2^n\cdot n!-1}{2^n\cdot n!}$$

Clave **B**

Luego, los términos son

$$9C_4^7,\ 5C_5^7,\ 5C_6^7$$

y equivalen a

$$9\cdot7\cdot5;\ 7\cdot5\cdot3;\ 7\cdot5$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{(9\cdot7\cdot5)(7\cdot5\cdot3)(7\cdot5)}=\sqrt[3]{7^3\cdot5^3\cdot3^3}=105$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 50

Indique la raíz cúbica del producto de todos los términos de la progresión de 3 términos.

$$\div\div\ 9C_4^n:5C_5^n:5C_6^n$$

A) 25 B) 105 C) 116
D) 95 E) 138

Resolución

Tenemos los 3 términos consecutivos de una progresión geométrica.

$$9C_4^n,\ 5C_5^n\ \text{ y }\ 5C_6^n$$

$$\rightarrow\ \left(5C_5^n\right)^2=9C_4^n\cdot5C_6^n$$

$$\rightarrow\ 5\left(C_5^n\right)^2=9C_4^n\cdot C_6^n$$

$$5C_5^n\cdot C_5^n=9C_4^n\cdot C_6^n$$

$$\cancel{5}\left(\frac{n-5+1}{\cancel{5}}\right)\cancel{C_4^n}\cdot\cancel{C_5^n}=9\cancel{C_4^n}\cdot\frac{n-6+1}{6}\cancel{C_5^n}$$

$$n-4=\frac{\cancel{9}\,(n-5)}{\cancel{6}}$$

$$2n-8=3n-15\ \rightarrow\ n=7$$

PROBLEMA N.° 51

¿Cuál es el valor del término independiente en el desarrollo de

$$A_{(x)}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5?$$

A) 10 B) 20 C) 30
D) 39 E) 25

Resolución

Se tiene

$$A_{(x)}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^5$$

Calculamos

$$t_{K+1}=C_K^5\left(\sqrt{x}\right)^{5-K}\left(\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^K=C_K^5x^{\frac{5-K}{2}-\frac{K}{3}}$$

Como nos piden el término independiente, igualamos a cero el exponente de x.

En efecto:

$$\frac{5-K}{2}-\frac{K}{3}=0\ \rightarrow\ K=3$$

$$\therefore\ t_i=t_4=C_3^5=10$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 54

En la expansión de la expresión $F_{(x)}=\left(x^3\sqrt{x}-x^{-4}\right)^{15}$, el término de lugar $(2n-3)$, contado a partir del extremo final, tiene por grado 45. Halle el grado del término de lugar $(n-1)$, contado a partir del extremo inicial.

A) 8 B) 26 C) 28
D) 0 E) 30

Resolución

Se tiene

$$F_{(x)}=\left(x^3\sqrt{x}-x^{-4}\right)^{15}$$

Luego

$$t_{2n-3}=C^{15}_{\underleftarrow{2n}-4}\left(-x^{-4}\right)^{19-2n}\left(x^3\sqrt{x}\right)^{2n-4}$$

$$=C^{15}_{2n-4}(-1)^{19-2n}x^{\frac{7}{2}(2n-4)-4(19-2n)}$$

Del dato

$$\frac{7}{2}(2n-4)-4(19-2n)=45$$

$$7n-14-76+8n=45$$

$$15n=135$$

$$n=9$$

Luego

$$t_{n-1}=t_8=C^{15}_7\left(x^3\sqrt{x}\right)^8\left(-x^{-4}\right)^7$$

$$=-C^{15}_7x^0$$

Por lo tanto, el grado de dicho término es cero.

Clave D

PROBLEMA N.° 55

Los términos de lugares: n; $(n+1)$ y $(n+2)$ del desarrollo de $E_{(x)}=(1-x)^m$ se hallan en progresión geométrica. Según esto, halle el término de lugar veinte e indique la parte literal.

A) x^{19} B) x^{21}
C) x^{22}
D) x^{20} E) x^{23}

Resolución

Sea $E_{(x)}=(1-x)^m$ tal que t_n, t_{n+1}, t_{n+2} están en progresión geométrica, luego

$$t_n=C^m_{n-1}(-x)^{n-1};\ t_{n+1}=C^m_n(-x)^n;$$

$$t_{n+2}=C^m_{n+1}(-x)^{n+1}$$

Entonces

$$\left(C^m_n(-x)^n\right)^2=C^m_{n-1}(-x)^{n-1}C^m_{n+1}(-x)^{n+1}$$

$$\left(C^m_n\right)^2\cdot\cancel{x^{2n}}=C^m_{n-1}\cdot C^m_{n+1}\cancel{x^{2n}}$$

$$C^m_n\cdot C^m_n=C^m_{n-1}\cdot C^m_{n+1}$$

$$\frac{m-n+1}{n}\cancel{C^m_{n-1}}\cdot\cancel{C^m_n}=\cancel{C^m_{n-1}}\cdot\frac{m-n}{n+1}\cdot\cancel{C^m_n}$$

$$\rightarrow\ (m-n+1)(n+1)=n(m-n)$$

$$\rightarrow\ \cancel{mn}+m+1-\cancel{n^2}=\cancel{mn}-\cancel{n^2}$$

$$m=-1$$

PROBLEMA N.° 58

Halle el coeficiente de x^7y^2 en el desarrollo de $f_{(x;\,y)}=(x+y)^5(2x-y)^4$.

A) -16 B) 24 C) -160

D) 48 E) 344

Resolución

Se tiene

$$f_{(x;\,y)}=(x+y)^5(2x-y)^4$$

Como nos piden calcular el coeficiente de x^7y^2 entonces veamos: $(x+y)^5 \;\wedge\; (2x-y)^4$

$$t_{K+1}=C_K^5x^{5-K}y^K;\quad t_{r+1}=C_r^4(2x)^{4-r}(-y)^r$$

Multiplicando generaremos el término de la forma x^7y^2

$$t_{K+1}\,t_{r+1}=C_K^5\cdot C_r^4\cdot 2^{4-r}(-1)^r x^{9-K-r}\cdot y^{K+r}$$

Igualando exponentes

$K+r=2$; además $K;\, r\in\mathbb{Z}^+$

$\rightarrow K\leq 5;\, r\leq 4$

De donde

$$\begin{cases} K=0; & r=2\\ K=1; & r=1\\ K=2; & r=0\end{cases}$$

Luego, el coeficiente final de x^7y^2 es

$$(-1)^2\cdot 2^{4-2}C_0^5C_2^4+(-1)^1\cdot 2^{4-1}C_1^5\cdot C_1^4$$
$$+(-1)^0\cdot 2^{4-0}C_2^5\cdot C_0^4$$

$$=24-160+160=24$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^7y^2 es 24.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 59

Calcule el valor aproximado de

$S=\sqrt[3]{30}+\sqrt[4]{93}+\sqrt[5]{288}+\ldots 27$ radicales.

A) 80 B) 81

C) 82

D) 83 E) 84

Resolución

Nos piden sumar

$$\underbrace{\sqrt[3]{30}+\sqrt[4]{93}+\sqrt[5]{288}+\ldots}_{27\text{ sumandos}}$$

Analizaremos cada uno de los radicales

$$\sqrt[3]{30}=(27+3)^{\frac{1}{3}}=\left(27\left(1+\frac{3}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=3\left(1+\frac{3}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=3\left(1+\frac{\cancel{3}}{27}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$=3\left(1+\frac{1}{27}\right)$$

$$\sqrt[4]{93}=(81+12)^{\frac{1}{4}}=\left(81\left(1+\frac{12}{81}\right)\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=3\left(1+\frac{12}{81}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

$$=3\left(1+\frac{1}{27}\right)$$

CAPÍTULO **11**

NÚMEROS REALES

Test

PROBLEMA N.° 1

Determine el valor simplificado de $N=0,1+0,2+0,3+...+2,9$.

A) 43,5 B) 42,5 C) 39,2
D) 45,4 E) 39,6

Resolución

Simplificamos

$$N=0,1+0,2+ \dots +2,9$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\dots+\frac{29}{10}$$

$$=\frac{1}{10}+\underbrace{\{1+2+\dots+29\}}_{\frac{29\times30}{2}}=\frac{1}{1\cancel{0}}\cdot\frac{29\times3\cancel{0}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{87}{2}=43,5$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

Verifique si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

I. No es posible encontrar un número irracional del que se conozcan todas sus cifras decimales.
II. La suma de un número racional con otro irracional es irracional.
III. La suma de dos números irracionales es irracional.
IV. El producto de dos números irracionales es irracional.

A) VVVV B) VVFF
C) VFFF
D) FFFV E) FVVV

Resolución

Veamos el valor de verdad de cada proposición:

I. **Verdadero**
No es posible encontrar un número irracional del que se conozcan todas sus cifras decimales.

II. **Verdadero**
La suma de un número racional con otro irracional es irracional.

III. **Falso**
La suma de dos números irracionales es otro irracional.

Ejemplo

$$\underbrace{(\sqrt{2}+1)}_{\mathbb{Q}'}+\underbrace{(5-\sqrt{2})}_{\mathbb{Q}'}=\underbrace{6}_{\mathbb{Q}}$$

III. **Verdadero**

El inverso de todo número real es otro real (no nulo).

Clave D

PROBLEMA N.° 5

¿Cuál es la fracción generatriz de $3,\widehat{51}$?

A) $\frac{115}{33}$ B) $\frac{315}{99}$ C) $\frac{375}{99}$

D) $\frac{335}{99}$ E) $\frac{116}{33}$

Resolución

Nos piden la fracción generatriz de $3,\widehat{51}$

Recuerda

$$\bar{a},\widehat{bc}=\frac{\overline{abc}-a}{99}$$

Entonces

$$3,\widehat{51}=\frac{351-3}{99}=\frac{116}{33}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 6

¿Cuál es la fracción generatriz de $3,5\widehat{1}$?

A) $\frac{295}{90}$ B) $\frac{158}{45}$ C) $\frac{157}{45}$

D) $\frac{147}{45}$ E) $\frac{293}{90}$

Resolución

Nos piden la fracción generatriz de $3,5\widehat{1}$

Recuerda

$$a,b\widehat{c}=\frac{\overline{abc}-\overline{ab}}{90}$$

Luego

$$3,5\widehat{1}=\frac{351-35}{90}=\frac{158}{45}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 7

Sean los siguientes subconjuntos de los números reales:

$A=\{x\in\mathbb{Z}/x\in[-10;\ 11]\}$

$B=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 0\leq x<2\}$

¿Cuántos números integran el conjunto $A-B$?

A) 21 B) 10

C) 20

D) 11 E) 19

Resolución

Sean los conjuntos

$$A=\{x\in\mathbb{Z}/x\in[-10;\ 11]\}=\{-10;-9;\ldots;\ 11\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 0\leq x<2\}=[0;\ 2\rangle$$

Nos piden $A-B$, equivalente a

$$A\cap B^C=\{-10;-9;\ldots;\ 11\}\cap(\langle-\infty;0\rangle\cup[2;\ +\infty\rangle)$$

$$=\{-10;-9;\ldots-1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 11\}$$

Observamos que en total son 20 números.

Clave C

Ahora buscamos $x+y$

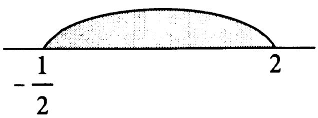
$$-4+4 < x+y < -3+5 \rightarrow 0 < x+y < 2$$

$\therefore\ 0 < |x+y| < 2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

El conjunto representado en la siguiente recta numérica es el conjunto solución de la inecuación $(ax+1)(x-b) \leq 0$.



Calcule el valor de $a-b$.

A) $-5/2$ B) $5/2$ C) $3/2$
D) $-3/2$ E) 0

Resolución

Del gráfico, $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ es el conjunto solución de $(ax+1)(x-b) \leq 0$, cuya inecuación será equivalente a

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0 \quad \vee \quad (2x+1)(x-2) \leq 0$$

De donde

$$a=2 \ \wedge \ b=2$$

$\therefore\ a-b=0$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Si los intervalos
$M=\langle -2; x+2]$ y $N=[2x-1; +\infty\rangle$
tienen un solo elemento en común, indique dicho elemento.

A) 3 B) 4
C) 5
D) 7 E) 2

Resolución

Del dato, $M=\langle -2; x+2] \ \wedge \ N=[2x-1; +\infty\rangle$ ambos tienen un solo elemento común: p.

$$\underbrace{x+2=2x-1}_{\text{(I)}}=p$$

De (I): $x=3$

$\therefore\ p=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

Simplifique e indique el equivalente de

$0,5+0,02+\frac{1}{2}$.

A) 1,02 B) 1,2 C) 3,05
D) 2,25 E) 2,02

Resolución

Se tiene que sumar

$$0,5+0,02+\frac{1}{2}=\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{50}+\frac{1}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{50}=\frac{51}{50}$$

$$=\frac{102}{100}=1,02$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Dado el operador matemático $\oplus$, definido por $a \oplus b=\overline{ab}-2$, califique las siguientes proposiciones:

I. $\oplus$ es conmutativo sobre $\mathbb{Q}$.
II. $\oplus$ es asociativo sobre $\mathbb{R}$.
III. El elemento neutro de $\oplus$ es $2-9a$ para cada a racional.

A) VVV B) VVF C) FFV
D) FVF E) FFF

Resolución

I. **Falsa**

Se tiene la operación $\oplus$ definida por

$a \oplus b=\overline{ab}-2$

Entonces

$b \oplus a=\overline{ba}-2$,

de allí que $\overline{ab} \neq ba$.

Entonces

$a \oplus b \neq b \oplus a$

Finalmente, la operación $\oplus$ no es conmutativa.

II. **Falsa**

Veamos la asociatividad

$$(a \oplus b) \oplus c=(\overline{ab}-2) \oplus c=\overline{(\overline{ab}-2)c}-2$$

$$a \oplus (b \oplus c)=a \oplus (\overline{bc}-2)=\overline{a(\overline{bc}-2)}-2$$

Se observa que $\oplus$ no es asociativo.

III. **Falsa**

Sea e el elemento neutro de $a \in \mathbb{Q}$

$\rightarrow \quad a \oplus e=\overline{ae}-2=a$

$10a+e-2=a$

$e=2-9a$

Como $\overline{ae}$ es numeral, además $a;\ e \in \mathbb{Z}^+$, entonces $2-9a \notin \mathbb{Z}^+$, de donde $e=2-9a$ no es el inverso de a.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

Definido el operador matemático $\oplus$ sobre $\mathbb{R}$ como $a \oplus b=a+b-2009$, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

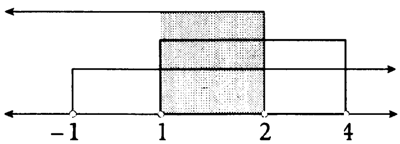
I. Su elemento neutro es 2009.
II. El inverso de 2009 es 2009.
III. El operador $\oplus$ es asociativo.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

Resolución

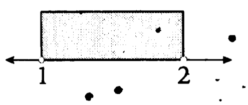
Graficamos

$$1 < x < 4 \;\wedge\; -1 < x \;\wedge\; x < 2$$



$x \in \langle 1; 2\rangle$

Por lo tanto, el conjunto es



Clave C

PROBLEMA N.° 8

Resuelva la inecuación $3+\dfrac{x-3}{6} > \dfrac{x+5}{3}-\dfrac{7}{3}$.

A) $x < 17$
B) $x > 19$
C) $x < 19$
D) $x > 17$
E) $x < 18$

Resolución

Resolveremos la inecuación

$$3+\frac{x-3}{6} > \frac{x+5}{3}-\frac{7}{3}$$

$\leftrightarrow \quad 18+x-3 > 2x+10-14$

$\leftrightarrow \quad 15 > x-4$

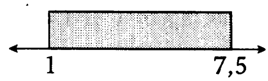
de donde $x < 19$

$\therefore \; x < 19$

Clave C

PROBLEMA N.° 9

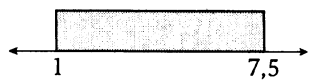
¿Cuál es la longitud del listón que se está midiendo?



A) 6 m B) 7 m C) 6,5 m
D) 7,5 m E) 5,5 m

Resolución

Se tiene el gráfico



Por lo tanto, la medida del listón es

$7{,}5-1=6{,}5$ m

Clave C

PROBLEMA N.° 10

Resuelva la inecuación cuadrática $(x-1)(ax-b) > 0$; $a > 1 > b > 0$ e indique el complemento de su conjunto solución.

A) $\left\langle \dfrac{b}{a}; 1\right\rangle$

B) $\left\langle 1; \dfrac{a}{b}\right\rangle$

C) $\left[\dfrac{b}{a}; 1\right]$

D) $\left\langle -\infty; \dfrac{b}{a} > \cup < 1; +\infty \right\rangle$

E) $\langle -\infty; 1\rangle$

Resolución

Veamos la inecuación

$$0<\frac{1}{2x^2+x}<1$$

$\leftrightarrow\ 2x^2+x>1$

Efectuamos por aspa simple

$$2x^2+x-1>0$$

$$\begin{array}{ll} 2x & -1 \\ x & +1 \end{array}$$

$\rightarrow\ (2x-1)(x+1)>0$

$(2x-1>0 \wedge x+1>0) \vee (2x-1<0 \wedge x+1<0)$

$$\left(x>\frac{1}{2}\wedge x>-1\right)\vee\left(x<\frac{1}{2}\wedge x<-1\right)$$

Finalmente

$$x>\frac{1}{2} \vee x<-1$$

$\therefore\ CS=\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 1/2;+\infty\rangle$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

Resuelva la inecuación $\dfrac{x-1}{2}>x-2$.

A) $x>3$ B) $x<3$
C) $x>2$
D) $x>4$ E) $x<4$

Resolución

Tenemos

$$\frac{x-1}{2}>x-2$$

Operando

$x-1>2x-4$

$3>x \leftrightarrow x<3$

$\therefore\ x<3$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

Si los intervalos $A=\langle 0;x+2]$ y $B=\langle 2x-1;+\infty\rangle$ tienen intersección no vacía, tal que $A\cap B\subset\langle 1;3]$, entonces:

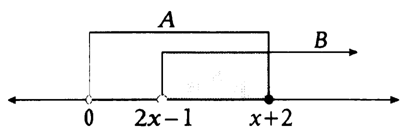
A) $x\in\langle 1;2\rangle$ B) $x\in\{0;1;2\}$
C) x es negativo
D) $x\in\langle 0;1\rangle$ E) $x\in\{2;3\}$

Resolución

Se tienen los intervalos

$A=\langle 0;x-2]$ y $B=\langle 2x-1;+\infty\rangle$

cuya intersección es no vacía. Entonces, graficamos



$\rightarrow\ 2x-1\leq x+2$ y como $A\cap B\subset\langle 1;3]$

$x\leq 3 \wedge 1\leq 2x-1 \wedge x+2\leq 3$

$x\leq 3 \wedge 1\leq x \wedge x\leq 1$

$x\leq 3 \wedge 1\leq x\leq 1$

$$\underbrace{x\leq 3 \wedge x=1}_{x=1}$$

Entonces

$x=1$

$\therefore\ x\in\{0;1;2\}$

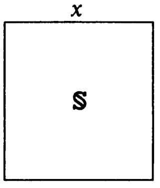
Clave **B**

Resolución

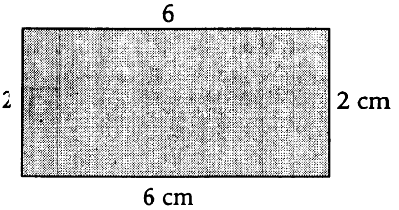
Sea x el lado del cuadrado en mención

$S=x^2$

$P_{\square}=4x$



y tenemos el rectángulo



donde su perímetro $P=16$

Del dato

$4x \leq 16$

$x \leq 4$

y como $x > 0$

$\rightarrow x^2 \leq 16$

Por lo tanto, el área del cuadrado es menor o igual que 16.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

La desigualdad $0 < |x+3| < 1$ es cierta cuando:

A) $-4 < x < 1$
B) $-3 < x < 1$
C) $-2 < x < 2$
D) $-4 < x < -2 \ \wedge \ x \neq -3$
E) $0 < x < 1$

Resolución

Sea

$0 < |x+3| < 1$

$\leftrightarrow |x+3| < 1 \ \wedge \ x \neq -3$

$\leftrightarrow -1 < x+3 < 1 \ \wedge \ x \neq -3$

$-4 < x < -2 \ \wedge \ x \neq -3$

$\therefore \ x \in (\langle -4; -2\rangle - \{-3\})$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

¿Cuáles son los números x cuyo triple excede a su duplo en más de 20?

A) $x < 12$
B) $x < 16$
C) $x < 18$
D) $x > 22$
E) $x > 20$

Resolución

Sean x los números, entonces

$3x-2x > 20$

$\leftrightarrow x > 20$

$\therefore \ x > 20$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Se define la operación binaria

$*/*: (a; b) \rightarrow 2a+3b \quad \forall\, a; b \in \mathbb{R}$

Luego, se puede afirmar que

A) la operación * es conmutativa.

B) la operación * es asociativa.

C) no hay un elemento identidad para la operación *.

D) no tienen elementos recíprocos para cada elemento de $\mathbb{Q}$

E) $(4*3)*(3*4)$ es 71.

Resolución

Tenemos

$a*b=2a+3b \quad \forall\, a; b \in \mathbb{R}$

Veamos la conmutatividad

$a*b=2a+3b$

$b*a=2b+3a$

Como $a*b \neq b*a$, la operación no es conmutativa.

Similarmente se prueba que * no es asociativa.
Veamos el elemento neutro (identidad).

Sea e el elemento neutro, entonces

$a*e=2a+3e=a$

$3e=-a$

$e=-a/3$

También

$e*a=2e+3a=a$

$2e=-2a$

$e=-a$

Por lo tanto, vemos que no existe elemento neutro único.

Clave C

PROBLEMA N.° 24

Se define una operación * en el conjunto de los números naturales de modo que

$a*b=a+(b+1)$.

Indique el valor de verdad en las siguientes proposiciones:

I. $3*2$ es 6.

II. $\mathbb{N}$ es cerrado para esta operación.

III. La operación * es conmutativa y asociativa.

A) VVV B) VVF

C) VFV

D) VFF E) FVV

Resolución

Se tiene

$a*b=a+b+1 \quad \forall\, a; b \in \mathbb{N}$

Veamos

I. **Verdadera**

$3*2=3+2+1=6$

II. **Verdadera**

$a*b=a+b+1 \in \mathbb{N}$; luego * es cerrado en $\mathbb{N}$.

III. **Verdadera**

Se prueba que * es asociativa y conmutativa (ver ejercicios anteriores).

Clave A

PROBLEMA N.° 27

Demuestre que

$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$, $\forall\ a;\ b\in\ \mathbb{R}-\{0\}$.

Resolución

Nos piden demostrar $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$; para ello, basta con demostrar

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)=1$$

En efecto

$$(ab)\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)=\left((ab)\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}$$

$$=\left(a\left(b\frac{1}{a}\right)\right)\frac{1}{b}=a\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot b\right)\frac{1}{b}$$

$$=\left(\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)b\right)\cdot\frac{1}{b}=(1\cdot b)\frac{1}{b}$$

$$=b\cdot\frac{1}{b}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$$

PROBLEMA N.° 28

Demuestre que

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $\forall\ a;\ b;\ c\in\ \mathbb{R}$ y $b\neq 0$

Resolución

Nos piden demostrar

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Demostración

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=a\cdot b^{-1}+c\cdot b^{-1}\ \text{(def. de división)}$$

$$=(a+c)b^{-1}\ \text{(distribución)}$$

$$=\frac{a+c}{b}\ \text{(def. de división)}$$

PROBLEMA N.° 29

Demuestre que

$-(-a)=a,\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}$

Resolución

Nos piden demostrar $-(-a)=a$

En efecto

$$(-a)+(-(-a))=0$$

$$=(-a)+a$$

$\rightarrow$ $(-a)+(-(-a))=(-a)+a$; aplicando la cancelación de $-a$

Finalmente

$$-(-a)=a$$

PROBLEMA N.° 30

Demuestre que

$-(a+b)=-a+(-b),\ \ \forall\ a;\ b\in\ \mathbb{R}$.

Resolución

I. Nos piden demostrar

$$-(a+b)=-a+(-b)$$

En efecto

$$-(a+b)=(-1)(a+b)$$

$$=(-1)a+(-1)b$$

$$=-a+(-b)$$

II. $-0=-0+0$

$$=0$$

$\therefore\ -0=0$

Resolución

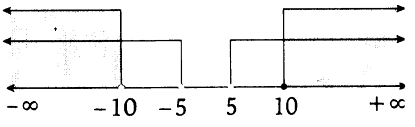
Veamos el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} / x^2 > 25 \wedge x^2 \geq 100\}$$

Resolvemos

$$x^2 > 25 \wedge x^2 \geq 100$$

$$(x > 5 \vee x < -5) \wedge (x \geq 10 \vee x < -10)$$



$\rightarrow x \leq -10 \wedge x \geq 10$

Luego, el conjunto es $\langle -\infty; -10] \cup [10; +\infty\rangle$.

Por lo tanto, el conjunto no es acotado.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Demuestre los siguientes teoremas:

I. $\forall\, a; b; c; \in \mathbb{R}$, si $a > b$ y $b > c \rightarrow a > c$.

II. $a<b \leftrightarrow -a > -b$.

III. Si $a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$.

IV. Si $a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$.

V. Si $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$ (x^{-1} inverso multiplicativo de x).

VI. Si x e y tienen el mismo signo $\rightarrow xy > 0$.

Resolución

I. $a > b \leftrightarrow (a-b) > 0$ (definición)

$b > c \leftrightarrow b-c > 0$ (definición)

$\rightarrow (a-b)+(b-c) > 0$ (ley de clausura)

$(a-c) > 0 \rightarrow a > c$ (definición)

II. Si $a < b$ sumamos $(-a-b)$ miembro a miembro

$a+(-a-b) < b+(-a-b)$

$(a-a)-b < -a+(-b+b)$

$-b < -a \leftrightarrow -a > -b$ (definición)

III. $a < b \wedge c > 0$

$a-b < 0 \wedge c > 0$

$(a-b)c > 0$

$ac-bc < 0 \leftrightarrow ac < bc$ (definición)

IV. $a < b \wedge c < 0$

$a-b < 0 \wedge c < 0$

$(a-b)c < 0$

$ac-bc < 0 \leftrightarrow ac < bc$ (definición)

V. Si $x \neq 0 \leftrightarrow x^{-1} \neq 0$

(inverso multiplicativo de x)

$\Rightarrow$ Si $a > 0$, suponga que $a^{-1} < 0$

$a \cdot a^{-1} < 0 \cdot a^{-1}$ por (III)

$1 < 0$ (absurdo)

$\rightarrow$ Si $a > 0 \rightarrow a^{-1} > 0$

$\Leftarrow$ Si $a^{-1} > 0$, suponga que $a < 0$

$a^{-1} \cdot a^2 > 0 \cdot a^2 \rightarrow a > 0$

(contradicción de hipótesis)

De $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ queda demostrado.

VI. $xy > 0 \leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

$\Rightarrow xy > 0 \leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0$

i. Si $x > 0 \rightarrow x^{-1} > 0$ (de V)

$\frac{1}{x}(xy) > 0 \rightarrow y > 0$

ii. Si $x < 0 \rightarrow x^{-1} < 0$

$x^{-1}(xy) < 0 \rightarrow y < 0$

$\Leftarrow x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow xy > 0$

(ley de clausura)

Primero empecemos con

$$b*(b+1)=b^2+(b+1)^2-b(b+1)$$
$$=b^2+\cancel{b^2}+2b+1-\cancel{b^2}-b$$
$$=b^2+b+1$$

Luego

$$a*(b*(b+1))=a*(b^2+b+1)$$
$$=a^2+(b^2+b+1)^2-a(b^2+b+1)$$
$$=a^2+(b^2+b+1)(b^2+b+1-a)$$
$$=(b^2+b+1)(b^2+b+1-a)+a^2$$

$$\therefore\ a*(b*(b+1))=(b^2+b+1)(b^2+b+1-a)+a^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

En $\mathbb{R}$ definimos las siguientes operaciones:

- $a*b=3b+\frac{1}{2}a$
- $a\#b=3a+\frac{3}{2}b$
- $a\Delta b=7a-3b$

Si $x*x=9$; $y\#y=21$, halle el valor de $(x\Delta y)+20$.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 28 E) 14

Resolución

Tenemos

$$a*b=3b+\frac{1}{2}a$$

$$a\#b=3a+\frac{3}{2}b$$

$$a\Delta b=7a-3b$$

$$\rightarrow\ x*x=3x+\frac{1}{2}x=9$$

$$7x=18$$

$$x=\frac{18}{7}$$

Luego

$$y\#y=3y+\frac{3}{2}y=21$$

$$9y=42$$

$$y=\frac{14}{3}$$

$$x\Delta y=\frac{18}{7}\Delta\frac{14}{3}=7\left(\frac{18}{7}\right)-3\left(\frac{14}{3}\right)$$

$$=18-14=4$$

$$\therefore\ x\Delta y+20=24$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

Sea $B=\{m;n;p;q\}$ y $*$ la operación definida en A mediante la tabla. Halle el valor de $x=\left[(q*m^{-1})^{-1}*n\right]^{-1}$.

*	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

Obs.: m^{-1} representa el inverso de m bajo la operación $*$.

A) m B) q C) n
D) p E) mn

Resolución

Tenemos $G=\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y

$$a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j}, & i-j<5 \\ a_{i+j-5}, & i+j\geq 5 \end{cases}$$

Entonces construimos la tabla

*	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_0
a_2	a_2	a_3	a_4	a_0	a_1
a_3	a_3	a_4	a_0	a_1	a_2
a_4	a_4	a_0	a_1	a_2	a_3

De la tabla, el elemento neutro es a_0 y

$b_2=(a_2)^*=a_3$

$b_3=(a_3)^*=a_2$

$b_4=(a_4)^*=a_1$

$\therefore\ b_2*(b_3*b_4)=a_3*(a_2*a_1)=a_3*a_3=a_1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 42

Sea * una operación binaria definida en $\mathbb{R}$ como $a*b=(a^2-b)(b^2-a)$.

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. * es conmutativa.

II. $4*(3*2)=5\cdot 9^2$.

III. $\forall\, k\in\mathbb{R}$: $k^2[a*b]=[ka]*[kb]$.

A) VFV B) VVV C) FVV

D) VVF E) FFV

Resolución

Se tiene

$a*b=(a^2-b)(b^2-a)$

Veamos

I. **Verdadera**

$b*a=(b^2-a)(a^2-b)$

$=(a^2-b)(b^2-a)$

$=a*b$

II. **Verdadera**

$4*(3*2)=4*(7\cdot 1)=4*7$

$=(9)(45)$

$=5\cdot 9^2$

III. **Falsa**

$k^2(a*b)=k^2(a^2-b)(b^2-a)$

$(ka)*(kb)=(k^2a^2-kb)(k^2b^2-ka)$

$=k(ka^2-b)\cdot k(kb^2-a)$

$=k^2(ka^2-b)(kb^2-a)$

de donde

$k^2(a*b)\neq((ka)*(kb))$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 43

Se define

$a*b=\text{mín}\ \{a; b\}$

$a\Delta b=\text{máx}\ \{a; b\}\in\mathbb{R}$.

Además

mínimo: menor entre a y b

máximo: mayor entre a y b

Calcule $(5\Delta 4)*(\sqrt{2}*\pi)$.

A) 5 B) 4 C) 0

D) $\sqrt{2}$ E) 1

PROBLEMA N.° 46

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas si se comparan dos variables independientes del tercero.

I. Si x varía directamente con y, y varía directamente con z; entonces x varía directamente con z.

II. Si x varía directamente con z, y varía directamente con z; entonces $x+y$ varía directamente con z; donde x; y; z son positivos.

III. Sean $x; y \in \mathbb{R}^-$. Si x varía directamente con y; y varía directamente con x; entonces $x=y$.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) VFF

Resolución

I. **Verdadera**

$x=K_1 y \quad \wedge \quad y=K_2 z$

$\rightarrow \quad x=K_1 \cdot K_2 z$

$x=(K_1 K_2)z$

II. **Verdadera**

$x=K_1 z$

$y=K_2 z$

$\rightarrow \quad x+y=(K_1+K_2)z$

III. **Falsa**

$x=K_1 y; \quad y=K_2 x$

Esto no significa que $y=x$, salvo

$K_1=1 \quad \wedge \quad K_2=1$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 47

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. $a < b \quad \leftrightarrow \quad -a > -b$

II. $0 < a < 1 \quad \leftrightarrow \quad a^3 < a^2$

III. $b \not< a \quad \leftrightarrow \quad a \neq b$

IV. $a \not< b \wedge a \not> b \quad \rightarrow \quad a \neq b$

A) I
B) I y II
C) I, II y IV
D) I y III
E) I, III y IV

Resolución

I. **Verdadera**

$a < b \quad \leftrightarrow \quad (-1)a > (-1)b$

$\leftrightarrow \quad -a > -b$

II. **Falsa**

Si $0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad a^3 < a^2$

Si $a^3 < a^2 \quad \rightarrow \quad a^3-a^2 < 0$

$\rightarrow \quad a^2(a-1) < 0$

$\rightarrow \quad a-1 < 0 \wedge a \neq 0$

$\rightarrow \quad a < 1 \wedge a \neq 0$

Luego, $0 < a < 1$ no es equivalente a $a^3 < a^2$.

III. **Falsa**

$b \not< a \quad \leftrightarrow \quad b \geq a$

IV. **Verdadera**

$(x*1)=2-x^2$

Si $x \leq 1 \rightarrow x=2-x^2$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2 \vee x=1$

Si $x > 1 \rightarrow 1=2-x^2$

$x^2=1$

$x=1$

Por lo tanto, la proposición III es falsa.

Clave B

PROBLEMA N.° 50

Demuestre que

$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$

$\forall\ a;\ b \in \mathbb{R}.$

Resolución

Tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)]&=((a+b)+(-a))+(-b)\\&=(a+(b+(-a)))+(-b)\\&=(a+((-a)+b))+(-b)\\&=((a+(-a))+b)+(-b)\\&=(0+b)+(-b)\\&=b+(-b)\\&=0\end{aligned}$$

PROBLEMA N.° 51

Demuestre que

$(-a)(-b)=ab.$

Resolución

Tenemos

$$\begin{aligned}(-a)(-b)&=((-1)a)(-b)\\&=(a(-1))(-b)\\&=a((-1)(-b))\\&=a(-(-b))\\&=a\cdot b\end{aligned}$$

PROBLEMA N.° 52

Demuestre que

$a(-1)=-a \ \ \forall\ a \in \mathbb{R}.$

Resolución

Tenemos

$$\begin{aligned}a+a(-1)&=a\cdot 1+a(-1)\\&=a(1+(-1))\\&=a\cdot 0\\&=0\\&=a+(-a)\end{aligned}$$

Entonces $a+a(-1)=a+(-a)$; cancelando a

$a(-1)=-a$

PROBLEMA N.° 53

Sean a y b números naturales. Si se define $a*b=a+2b$, entonces es verdadero que

A) $(a*b)*a=a+4b$
B) $a*b=b*a$
C) $(a*b)*b=a+4b$
D) $(a*b)*(a*b)=(a+2b)^2$
E) $(a*b)*c=a*(b*c)$

Resolución

Tenemos

$$a \odot b = \text{máx}\{a; b\},$$

entonces

$$(x^2+1) \odot 1 \geq 5 \odot 4; x \in \mathbb{R}$$

$\leftrightarrow \quad \text{máx}\{x^2+1;\ 1\} \geq 5$

$\leftrightarrow \quad x^2+1 \geq 5$

Luego

$$x^2 \geq 4$$

$$x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2$$

$\therefore \quad CS=\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 57

Se define * en $\mathbb{R}$ como

$$x^* = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$$

Halle los valores de x que verifican $(x-3)^*=5$.

A) 8; −2 B) 8 C) −2
D) 1; −8 E) 2; 1

Resolución

Como $x^* = \begin{cases} x;\ x \geq 0 \\ -x;\ x < 0 \end{cases}$

entonces

$$(x-3)^*=5$$

Si y solo si

$$\begin{cases} x-3=5 \quad \wedge \quad x-3 \geq 0 \\ \qquad \vee \\ -(x-3)=5 \quad \wedge \quad x-3<0 \end{cases}$$

$\leftrightarrow \ (x=8 \wedge x \geq 3) \vee (x=-2 \wedge x < 3)$

$\leftrightarrow \ x=8 \vee x=-2$

$\therefore \ x=8 \quad \vee \quad x=-2$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 58

Sea la operación * definida en $\mathbb{R}$ tal que $a * b=(ab)^{-1}=\dfrac{1}{ab}$. Halle la suma límite de

$S=1*2+2*3+3*4+...$

A) 1/3 B) 1
C) 2
D) 4 E) 1/2

Resolución

Como $a*b=(ab)^{-1}$, entonces

$$S=1*2+2*3+3*4+...$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+...$$

$$=1$$

$\therefore \ S=1$

Clave **B**

CAPÍTULO 12

NÚMEROS COMPLEJOS

Test

PROBLEMA N.° 1

Sea el número complejo

$z=(13-5i)+(15i-4)-(-6-2i)$.

Calcule el valor de $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$.

A) 27 B) 12 C) 17
D) 19 E) 37

Resolución

Operamos en z

$$\begin{aligned} z&=(13-5i)+(15i-4)-(-6-2i)\\ &=\underline{13}-5i+15i-\underline{4}+\underline{6}+2i\\ &=(13-4+6)+(-5+15+2)i\\ &=15+12i \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\mathrm{Re}(z)=15$, $\mathrm{Im}(z)=12$

$\therefore$ $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=27$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

Calcule la parte imaginaria del complejo z.

$$z=(4-i)\left\{(-1+5i)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i\right)\right\}$$

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{11}{12}$

D) $\frac{55}{3}$ E) $\frac{58}{3}$

Resolución

Operamos en z

$$\begin{aligned} z&=(4-i)\left\{-\underline{1}+5i+\underline{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}i\right\}\\ &=(4-i)\left\{\left(-1+\frac{2}{3}\right)+\left(5-\frac{1}{4}\right)i\right\}\\ &=(4-i)\left(-\frac{1}{3}+\frac{19}{4}i\right) \end{aligned}$$

Nos piden $\mathrm{Im}(z)$

$$\mathrm{Im}(z)=\cancel{4}\cdot\frac{19}{\cancel{4}}+(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)=19+\frac{1}{3}$$

$\therefore$ $\mathrm{Im}(z)=\frac{58}{3}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 6

Indique cuál es el argumento principal del número complejo z, tal que

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{(4+3i)^5}.$$

A) 45° B) 37° C) 115°
D) 35° E) 112°

Resolución

Calculamos el argumento principal de z

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{(4+3i)^5}$$

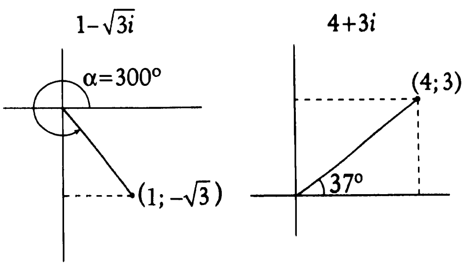
Recuerda

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1^n)=n\operatorname{Arg}(z_1)$$

Luego

$$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}(1-\sqrt{3}i)-5\operatorname{Arg}(4+3i)$$



Finalmente

$$\operatorname{Arg}(z)=300°-5(37)^0$$

$$\therefore\ \operatorname{Arg}(z)=115°$$

Clave C

PROBLEMA N.° 7

Exprese en su forma polar el número complejo

$$z=\frac{(1+i)^2(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+i}.$$

A) 2cis15°

B) 2cis25°

C) 2cis99°

D) 2cis17°

E) 2cis30°

Resolución

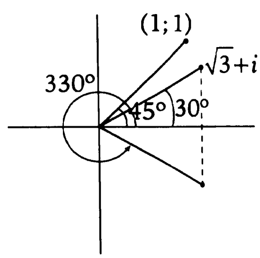
Nos piden la forma polar de

$$z=\frac{(1+i)^2(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+i}$$

Ahora calculamos el módulo

$$|z|=\frac{|1+i|^2\,\cancel{|\sqrt{3}-i|}}{\cancel{|\sqrt{3}+i|}}=\sqrt{2}^2=2$$

Luego, calculamos su argumento



$$\operatorname{Arg}(z)=2(45°)+330°-30°$$

$$=390°\ \text{o}\ 30°$$

$$\therefore\ z=|z|\operatorname{cis}(\operatorname{Arg}z)=2\operatorname{cis}30°$$

Clave E

Resolución

Calculamos el módulo de z, tal que

$$z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{(1+\sqrt{3}i)}=\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{1+\sqrt{3}i}$$

$$=e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}$$

$$z=e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{3}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\quad |z|=e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 11

¿Cuál es el argumento principal del número complejo z tal que $z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^{i}$?

A) $\ln 4$
B) $2\ln 2$
C) $\ln 2$
D) e^{2}
E) e^{-2}

Resolución

Nos piden el argumento principal de

$$z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^{i}$$

Entonces

$$z=(2\text{cis}300)^{i}=\left(2e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)^{i}$$

$$z=2^{i}\cdot e^{-\frac{5\pi}{3}}=e^{(\ln 2)i}e^{-\frac{5\pi}{3}}$$

$$\therefore\quad \operatorname{Arg}(z)=\ln 2$$

Clave C

PROBLEMA N.° 12

Sea z un número complejo tal que $z\neq 1$. ¿Cuál es el valor mínimo de $|z+1|+|z-3|$?

A) 2 B) 3 C) 1
D) $\sqrt{2}$ E) 4

Resolución

Nos piden el valor mínimo de $|z+1|+|z-3|$. Para hallarlo, hacemos uso de la desigualdad triangular

$$|z+1|+|z-3|=|z+1|+|3-z|\geq|\cancel{z}+1+3-\cancel{z}|$$

$$\therefore\quad |z+1|+|z-3|\geq 4$$

Clave E

III. $z_3=-12-12i$

$$\rightarrow \begin{cases} |z_3| = \sqrt{(-12)^2+(-12)^2} = 12\sqrt{2} \\ \alpha = \arctan\left(\dfrac{-12}{-12}\right) = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad z_3 = 12\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

IV. $z_4 = \sqrt{3}i$

$$\begin{cases} |z_4| = \sqrt{3} \\ \alpha = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{0}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad z_4 = \sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

V. $z_5=12-5i$

$$\rightarrow \begin{cases} |z_5| = \sqrt{12^2+(-5)^2} = 13 \\ \alpha = \arctan\left(\dfrac{-5}{12}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad z_5 = 13\text{cis}\left[\arctan\left(\frac{-5}{12}\right)\right]$$

VI. $z_6=-4i$

$$\rightarrow \begin{cases} |z_6| = \sqrt{0^2+(-4)^2} = 4 \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad z_6 = 4\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

PROBLEMA N.° 3

Escriba los siguientes números complejos en forma cartesiana.

I. $\sqrt{2}\ (\cos 45° + i\text{sen}45°)$

II. $12(\cos 135° - i\text{sen}135°)$

III. $4(\cos 180° + i\text{sen}180°)$

IV. $5\sqrt{3}\ \underline{|210°}$

V. $18\text{cis}75°$

Resolución

Para expresar en la forma cartesiana basta reemplazar los valores de cosα y senα en la forma polar.

I. $z_1 = \sqrt{2}\ (\cos 45° + i\text{sen}45°)$

$$= \cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{i}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = 1+i$$

II. $z_2 = 12(\cos 135° - i\text{sen}135°)$

$$= 12\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$$

III. $z_3 = 4(\cos 180° + i\text{sen}180°)$

$$= 4(-1+0i) = -4$$

IV. $z_4 = 5\sqrt{3}\ \underline{|210°}$

$$= 5\sqrt{3}(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°)$$

$$= 5\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{15}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

Entonces

$$= -4\sqrt{3} + 4i + (2\sqrt{3})^2 i - 4\sqrt{3}\,\underbrace{\cancel{i}^{2}}_{-1}$$

$$= -4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + (4+12)i = 16i$$

II. Recordemos también que para dividir en la forma binómica multiplicamos al dividendo y al divisor por la conjugada del divisor.

$$\frac{4-4i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(4-4i)(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}^2 - i^2}$$

$$= \frac{\cancel{4}(1-i)(\sqrt{3}+i)}{\cancel{3+1}} = (1-i)(\sqrt{3}+i)$$

$$= \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i - \underbrace{\cancel{i^2}}_{-1}$$

$$= (\sqrt{3}+1) + (1-\sqrt{3})i$$

PROBLEMA N.° 6

Halle las potencias indicadas de los números complejos siguientes, expresando los resultados en forma cartesiana.

I. $2(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)^6$

II. $[4(\cos 20° + i\operatorname{sen} 20°)]^3$

III. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)^{10}$

Resolución

Recuerda

$(|z|\operatorname{cis}\alpha)^n = |z|^n \operatorname{cis} n\alpha$

Entonces

I. $2(\operatorname{cis}15°)^6 = 2\operatorname{cis}(6\cdot 15°)$

$$= 2\operatorname{cis}90°$$

$$= 2(\underbrace{\cancel{\cos 90°}}_{0} + i\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}90°}}_{1}) = 2i$$

II. $(4\operatorname{cis}20°)^3 = 4^3 \cdot \operatorname{cis}(20°\cdot 3)$

$$= 64(\cos 60° + i\operatorname{sen}60°)$$

$$= 64\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 32 + 32\sqrt{3}i$$

III. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{10} = \left(\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}\right)^{10} = \operatorname{cis}\frac{11\pi}{\cancel{6}} \times \cancel{10}$

$$= \operatorname{cis}\left(\frac{55\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(18\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

PROBLEMA N.° 7

Halle todas las raíces indicadas en cada caso.

I. $(\cos 135° + i\operatorname{sen}135°)^{1/2}$

II. $[32(\cos 200° + i\operatorname{sen}200°)]^{1/5}$

III. $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$

IV. $\sqrt[5]{2 - 2\sqrt{3}i}$

Entonces

$$z^6=z^4\cdot z^2=(-7-24i)(-3+4i)$$

$$=21-28i+72i-96\underbrace{\cancel{i^2}}_{-1}$$

$$=21+96+(72-18)i$$

$$\rightarrow\ z^6=117+54i$$

II. $(2+i)^7+(2-i)^7$

Operando se tiene

$$\left.\begin{array}{l}2+i=x\\ 2-i=y\end{array}\right\}\begin{array}{l}x+y=4\\ xy=5\end{array}$$

Se busca x^7+y^7

Sabemos

$$(x+y)^3=(4)^3\ \rightarrow\ x^3+y^3+3\underbrace{\cancel{xy}}_{5}\underbrace{\left(\cancel{x+y}\right)}_{4}=64$$

$$\rightarrow\ x^3+y^3=4 \qquad \text{(I)}$$

$$(x+y)^2=4^2\ \rightarrow\ x^2+y^2+2\underbrace{\cancel{xy}}_{5}=16$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=6^2\ \rightarrow\ x^4+y^4+2\underbrace{\left(\cancel{xy}\right)^2}_{5}=36$$

$$\rightarrow\ x^4+y^4=-14 \qquad \text{(II)}$$

Multiplicamos (I)×(II)

$$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=4\cdot(-14)$$

$$x^7+x^3y^4+y^3x^4+y^7=-56$$

$$x^7+y^7+\underbrace{\left(\cancel{xy}\right)^3}_{5}\underbrace{\left(\cancel{x+y}\right)}_{4}=-56$$

$$\rightarrow\ x^7+y^7=-656$$

PROBLEMA N.° 9

Sean los números complejos
$z_1=(2;3),\quad z_2=(-3;5),\quad z_3=(-1;2)$.
Calcule $2z_1+3z_2-z_3$ y dé como respuesta la segunda componente del resultado.

A) 7	B) 6	C) 13
D) 21		E) 19

Resolución

Recuerda

$m(a;b)=(ma;mb)$
$(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$

Para el problema

$$2z_1+3z_2-z_3=2(2;3)+3(-3;5)-(-1;2)$$

$$=(4;6)+(-9;15)+(1;-2)$$

$$=(4-9+1;6+15-2)=(-4;19)$$

Por lo tanto, la segunda componente es 19.

Clave E

PROBLEMA N.° 10

Sean los números complejos
$z_1=(5;-2),\quad z_2=(3;4)$.
Sume las componentes del resultado de $z_1\cdot z_2$

A) 20	B) 35	C) 37
D) 17		E) 29

PROBLEMA N.° 13

Halle el equivalente de $(1+i)^{50}$.

A) $-2^{25}i$ B) $2^{25}i$ C) $2^{50}i$
D) -2^{50} E) $-2^{50}i$

Resolución

Recuerda

$(1+i)^2=2i$

Entonces

$\rightarrow\ (1+i)^{50}=\left[(1+i)^2\right]^{25}=(2i)^{25}$

$=2^{25}\cdot i^{25}$

Además

$i^{\overset{o}{4}+K}=i^K \rightarrow i^{25}=i^{\overset{o}{4}+1}=i$

$\therefore\ (1+i)^{50}=2^{25}\cdot i$

Clave B

PROBLEMA N.° 14

Simplifique e indique el equivalente de
$\dfrac{i^{375}+i^{421}+2i^{793}}{i^{662}+2i^{776}}$.

A) i B) $4i$
C) $-2i$
D) $-4i$ E) $(1+i)^2$

Resolución

Recuerda

$i^{\overset{o}{4}+K}=i^K$

Entonces

$i^{375}=i^{\overset{o}{4}+3}=i^3=-i$

$i^{421}=i^{\overset{o}{4}+1}=i$

$i^{793}=i^{\overset{o}{4}+1}=i$

$i^{662}=i^{\overset{o}{4}+2}=i^2=-1$

$i^{776}=i^{\overset{o}{4}}=1$

Luego, en lo pedido se tiene

$$\frac{-i+i+2i}{-1+2\cdot 1}=\frac{2i}{1}=2i$$

$\therefore\ 2i=(1+i)^2$

Clave E

PROBLEMA N.° 15

El número complejo $z=\dfrac{3+5i}{2+xi}$ representa a un número complejo real, cuyo equivalente es $z=m$. Calcule el valor de m.

A) $\dfrac{10}{3}$ B) $\dfrac{15}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$

D) $\dfrac{3}{2}$ E) 60

Resolución

Si z representa a un número real

$$z=\frac{3+5i}{2+xi}=m/m\in\mathbb{R}$$

Resolución

Se pide el módulo de $\sqrt{3-4i}$.

Sabemos que

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16}\,\sqrt{-1}=4i$$

Recuerda

$$|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|}\ \geq 0;\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Entonces

$$|\sqrt{3-4i}|=\sqrt{|3-4i|}=\sqrt{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{25}}=\sqrt{5}$$

No ha sido necesario primero calcular $\sqrt{3-4i}$, más bien se debe aplicar directamente una de las propiedades del módulo.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

¿Cuál es el módulo del número complejo z,

tal que $z=\dfrac{(45+3i)(\sqrt{3}+i)^3}{\sqrt{i+2\sqrt{2}}\,(1+15i)}$?

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución

Recuerda

La propiedad del módulo (resumidamente) es

$$z=\frac{a\cdot b^n}{\sqrt[K]{c}}\Big/ a;b;c\in\mathbb{C}\ \rightarrow\ |z|=\frac{|a|\cdot|b|^n}{\sqrt[K]{|c|}}$$

En el problema

$$z=\frac{3(15+i)(\sqrt{3}+i)^3}{\sqrt{i+2\sqrt{2}}\,(1+15i)}$$

Aplicamos la propiedad del módulo

$$|z|=\frac{|3||15+i||\sqrt{3}+i|^3}{\sqrt{|i+2\sqrt{2}|}\;|1+15i|}$$

$$=\frac{3\cdot\cancel{\sqrt{15^2+1^2}}\cdot\sqrt{3+1}^{\,3}}{\sqrt{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}}\cdot\cancel{\sqrt{1^2+15^2}}}=\frac{3\cdot\sqrt{4}^{\,3}}{\sqrt{\sqrt{9}}}$$

$$=\frac{3\cdot 2^3}{\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\cdot 2^3\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}}=8\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el módulo del número complejo z es $8\sqrt{3}$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

Exprese $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ en su forma polar.

A) $2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

B) $\sqrt{8}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$

C) $4\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

D) $6\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

E) $\sqrt{12}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$

PROBLEMA N.° 23

¿Cuál de los siguientes no es argumento de $z=1+i$?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) $\frac{9\pi}{4}$

D) $\frac{17\pi}{4}$ E) $\frac{25\pi}{4}$

Resolución

El argumento es una función que está definida por

$$\boxed{\arg(z)=\arctan\frac{b}{a}+2K\pi / K\in\mathbb{Z}\ \wedge\ z=a+bi}$$

Para $z=1+i$

$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)+2K\pi;\ \text{además } K\in\mathbb{Z}$$

$$=\arctan 1+2K\pi=\frac{\pi}{4}+2K\pi$$

Luego

$$\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2K\pi$$

Finalmente, todas las alternativas tienen esta forma, a excepción de la alternativa B.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

¿Cuál es el argumento del número complejo z, tal que $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{5}$

Resolución

Recuerda

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right)=\arg(a)-\arg(b) \big/ a;b\in\mathbb{C}$$

En el problema

- $\arg(1+i)=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$
- $\operatorname{arc}\left(\sqrt{3}+i\right)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

Luego

$$\arg(z)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi-2\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 25

Sea z un número complejo de argumento θ tal que $|z|=1\ \wedge\ \theta\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$. ¿Cuál es el argumento de $z+1$?

A) 2θ B) $\frac{\pi}{2}-\theta$ C) $\frac{\theta}{2}$

D) $\frac{\pi-\theta}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}+\theta$